

DIDIER ARQUÈS

JEAN-FRANÇOIS BÉRAUD

Énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 31, n° 4 (1997),
p. 385-409

http://www.numdam.org/item?id=ITA_1997__31_4_385_0

© AFCET, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ÉNUMÉRATION DES CARTES POINTÉES SUR LA BOUTEILLE DE KLEIN (*)

par Didier ARQUÈS et Jean-François BÉRAUD ⁽¹⁾

Résumé. – Dans cet article, nous présentons la première énumération explicite des cartes pointées sur la bouteille de Klein. La série génératrice des cartes dessinées sur la bouteille de Klein est solution d'une équation fonctionnelle dite « de Tutte », obtenue par l'opération de suppression du brin pointé de la carte. Nous résolvons cette équation par des techniques mises au point dans le cadre des cartes dessinées sur des surfaces orientables (par Arquès en 1987, Bender et Canfield en 1991) et appliquées par Bender et al. dans le cadre du plan projectif (1988, 1993). Nous donnons le détail de la résolution pour l'obtention d'un système paramétrique donnant la série génératrice des cartes dessinées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre d'arêtes. Nous donnons de plus ce système paramétrique dans le cas où l'énumération est réalisée en fonction des nombres de sommets et de faces.

Abstract. – In this article, we present the first enumeration of rooted maps on the Klein bottle. The series for the rooted maps drawn on the Klein bottle is the unique solution of the Tutte functional equation, which is obtained by removing the rooted edge of the map. We solve this equation using techniques usually used for maps on orientable surfaces (by Arquès in 1987, Bender and Canfield in 1991), and applied to the projective plane by Bender et al. (1988, 1993). Here, we solve in details the Tutte equation to obtain a parametric system giving the generating series for the rooted maps on the Klein bottle, with respect to the number of edges. Moreover, we give this parametric system when the enumeration is done with respect to the number of vertices and faces.

1. INTRODUCTION

En regard des nombreux travaux sur les cartes sur les surfaces orientables, le travail effectué sur les cartes sur les surfaces non orientables est moins développé.

Les premières études commencent pourtant dès 1966 avec W. Brown, au chapitre 2 de [10]. Mais il faut attendre 1988 pour voir apparaître la première énumération explicite sur ce type de surface, avec E. Bender *et al.* Ils énumèrent dans [6] le nombre de cartes pointées sur le plan projectif, en fonction du nombre d'arêtes. Dans un article encore plus récent [8], ils énumèrent ces mêmes cartes, cette fois en leur nombre de sommets et de faces.

(*) Reçu en mars 1997.

(¹) Institut Gaspard Monge, Université de Marne la Vallée, 2, rue de la Butte Verte, 93166 Noisy-le-Grand Cedex, France. e-mail: {arquès,beraud}@univ-mlv.fr

L'énumération des cartes pointées sur le plan projectif reste le seul exemple d'énumération explicite de cartes générales sur des surfaces non orientables. Quelques travaux récents prouvent le regain d'intérêts pour de telles cartes (cf. [7, 9, 12]) en particulier concernant leurs propriétés asymptotiques, mais il n'y a pas de nouvelles énumérations explicites à l'heure actuelle.

On se propose ici de trouver explicitement la série génératrice du nombre de cartes pointées sur la bouteille de Klein, en fonction du nombre d'arêtes de manière détaillée. Selon une approche classique développée par D. Arquès pour les cartes sur le tore dans [3], et par E. Bender *et al.* dans [4, 5, 6, 8], nous partons de l'équation de Tutte, introduite pour la première fois dans [14], que nous résoudrons par des méthodes analytiques. Nous donnons également le résultat plus général de l'énumération de la série génératrice du nombre de cartes pointées sur la bouteille de Klein, en fonction du nombre de sommets et de faces.

2. DÉFINITIONS

Nous rappelons ici succinctement les quelques définitions nécessaires à la compréhension de l'article. Se reporter à [2, 11, 13] pour des définitions plus détaillées.

2.1. Rappels sur les surfaces

Les rappels sur les surfaces présentés ici, peuvent être trouvés par exemple dans le livre de W. S. Massey [13].

On appelle dans la suite *surface* une variété compacte de dimension deux (sans bord). Le théorème de classification nous dit que toute variété compacte de dimension 2 orientable est homéomorphe à la sphère ou à une somme connexe de tores, et que toute variété compacte de dimension 2 non orientable est une somme connexe de plans projectifs, ce qui est homéomorphe à la somme connexe d'une surface orientable avec le plan projectif ou la bouteille de Klein (par *somme connexe* de deux surfaces S_1 et S_2 , nous entendons la surface notée $S_1 \# S_2$ créée par identification des bords de deux trous « circulaires » découpés dans chacune des deux surfaces; la bouteille de Klein est ainsi la somme connexe de deux plans projectifs). Cette classification se traduit par un invariant numérique attaché à chaque surface S (à homéomorphisme près), appelé *caractéristique d'Euler* $\chi(S)$ et égal à $s + f - a$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces d'une triangulation quelconque de S . La caractéristique

d'Euler de la somme connexe $S_1 \# S_2$ de deux surfaces S_1 et S_2 étant donnée par la formule $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$, on déduit de la classification des surfaces, et des caractéristiques d'Euler de la sphère (2), du tore (0) et du plan projectif (1), celles des différents types de surfaces :

Surface	Caractéristique d'Euler
Surfaces orientables	
Sphère	2
Somme connexe de n tores	$2 - 2n$
Surfaces non orientables	
Somme connexe de n plans projectifs	$2 - n$
Exemple : Bouteille de Klein (somme connexe de 2 plans projectifs) Une surface non orientable sera donc :	0
Soit une somme connexe d'un plan projectif et de n tores ($2n + 1$ plans projectifs)	$1 - 2n$
Soit une somme connexe d'une bouteille de Klein et de n tores ($2n + 2$ plans projectifs)	$-2n$

Ainsi, la caractéristique d'Euler d'une surface orientable est toujours paire, tandis que pour une surface non orientable elle peut être paire (somme connexe d'une bouteille de Klein et de n tores) ou impaire (somme connexe d'un plan projectif et de n tores).

Usuellement, une surface qui est la somme connexe de n tores ou de n plans projectifs est dite de genre n , sachant que la sphère est de genre 0. La relation suivante décrit le lien entre le genre g et la caractéristique d'Euler χ d'une surface compacte :

$$\begin{cases} g = \frac{1}{2}(2 - \chi) & \text{dans le cas orientable,} \\ g = 2 - \chi & \text{dans le cas non orientable.} \end{cases}$$

Notation

On note :

T_g la surface orientable de genre g (somme connexe de g tores);

P_g la surface non orientable de genre $g (\geq 1)$ impair, (somme connexe d'un plan projectif et de $(g - 1)/2$ tores);

B_g la surface non orientable de genre $g (\geq 2)$ pair (somme connexe d'une bouteille de Klein et de $(g - 2)/2$ tores).

2.2. Carte

2.2.1. Carte topologique

- On appelle *carte topologique* C sur une surface Σ de \mathbb{R}^3 une partition de Σ en trois ensembles finis de cellules :
 - i. L'ensemble des sommets de C qui est un ensemble fini de points ;
 - ii. L'ensemble des arêtes de C qui est un ensemble fini d'arcs simples ouverts de Jordan, deux à deux disjoints, dont les extrémités sont des sommets ;
 - iii. L'ensemble des faces de C qui sont des domaines simplement connexes dont la frontière, pour chaque face, est une réunion de sommets et d'arêtes.
- Tout le vocabulaire lié à la surface Σ est étendu aux cartes : orientable, non orientable, ainsi que le genre.
- Une carte orientable de genre 0, c'est-à-dire dessinée sur la sphère de \mathbb{R}^3 , est dite planaire. Une carte non orientable de genre 1 (resp. 2) est dessinée sur le plan projectif (resp. sur la bouteille de Klein).
- Deux cellules sont dites *incidentes* si l'une est dans la frontière de l'autre.
- Le *degré d'un sommet* est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes (une boucle, arête dont les extrémités sont confondues, est comptée pour deux dans le degré de son extrémité). Le *degré d'une face* est le nombre d'arêtes qui lui sont incidentes, un isthme (arête incidente des deux côtés à une seule face) étant compté deux fois.

Sur la figure 1.a, une carte orientable de genre 0 est dessinée sur le plan. Les degrés des sommets s_1, s_2 et s_3 sont respectivement 3, 4 et 1. L'arête 2 est un isthme, car elle est uniquement incidente à la face f_1 . L'arête 4 est aussi un isthme. Les degrés des faces f_1, f_2 et f_3 sont respectivement 4 (l'isthme 2 compte deux fois), 1 et 3 (l'isthme 4 compte deux fois).

Sur la figure 1.b une carte non orientable de genre 1 est dessinée sur le plan projectif. Le plan projectif est représenté par un disque dont tous les points

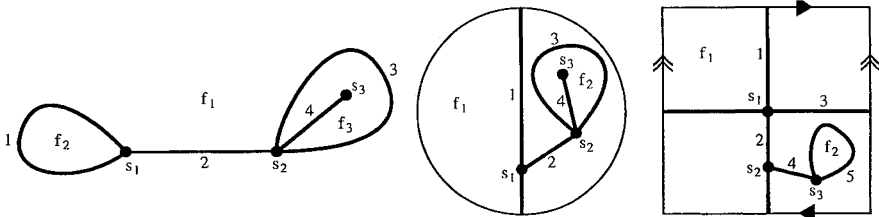


Figure 1. – Exemple de carte (a) sur le plan, (b) sur le plan projectif, (c) sur la bouteille de Klein.

du bord sont identifiés deux à deux par une symétrie centrale. Les degrés des sommets s_1 , s_2 et s_3 sont respectivement 3, 4 et 1. Les arêtes 1, 2 et 4 sont des isthmes. Les degrés des faces f_1 et f_2 sont respectivement 5 (les isthmes 1 et 2 comptent deux fois chacun) et 3 (l'isthme 4 compte deux fois).

Sur la figure 1.c une carte non orientable de genre 2 est dessinée sur la bouteille de Klein. La bouteille de Klein est représentée par un pavé dont une paire de côtés sont identifiés en sens opposé et une paire dans le même sens. Les degrés des sommets s_1 , s_2 et s_3 sont respectivement 4, 3 et 1. Les arêtes 1, 2, 3 et 4 sont des isthmes. Les degrés des faces f_1 et f_2 sont respectivement 9 (les isthmes 1, 2, 3 et 4 comptent deux fois chacun) et 1.

Dans la suite, nous utiliserons une représentation du plan projectif couramment appelée *crosscap*, présentée aux figures 2.a et 2.b.

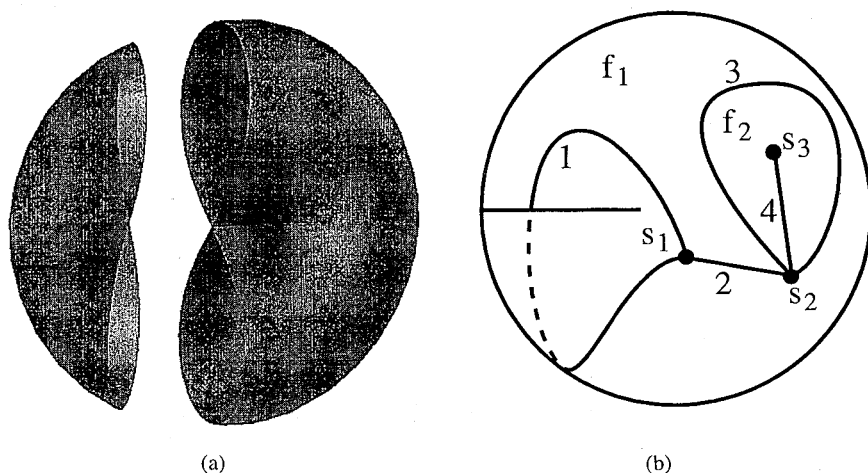


Figure 2. - (a) Dessin en perspective d'une crosscap, coupée par un plan orthogonal à l'auto-intersection; (b) La carte de la figure 1.b dessinée sur une crosscap stylisée (l'auto-intersection est représentée par le segment horizontal).

2.2.2. Carte pointée

Toute arête a naturellement deux sens de parcours et deux sens de traversée (ou côtés incidents). Il y a donc quatre possibilités de choisir pour une arête a donnée, un sens de parcours p et un sens de traversée t . Une carte sera dite *pointée* si un triplet (a, p, t) est choisi, constitué d'une arête a munie d'un sens de parcours p et d'un sens de traversée t . Le sommet s (initial de l'arête a pour le sens p choisi) et l'arête a sont dits pointés. La face f incidente à l'arête a du côté final du sens de traversée t est appelée *face pointée* (ou *face extérieure*) associée au triplet (a, p, t) . Lorsque parcourant

a dans le sens p , on parcourt le bord de la face f située du côté t , on définit par continuité un nouveau triplet (a', p', t') tel que a' succède (pour le sens p) à l'arête a et (p', t') succède naturellement à (p, t) dans le parcours topologique orienté du bord de f . On appellera *parcours orienté* d'une face f , une telle suite ainsi définie de triplets successifs (a_i, p_i, t_i) bordant la face donnée f à partir d'un triplet initial (a_1, p_1, t_1) .

Soit r un entier naturel non nul. Une carte est dite *r-pointée* si une séquence de r triplets dont toutes les faces associées sont différentes, est choisie.

Deux cartes r -pointées de même genre sont dites *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme de la surface associée appliquant les sommets, arêtes et faces de la première carte respectivement sur ceux de la seconde, et échangeant les r pointages dans l'ordre (c'est-à-dire échangeant dans les deux cartes, les arêtes a_i munies de leurs deux sens de parcours et de traversée p_i et t_i , pour i de 1 à r).

Une *classe d'isomorphie* dans l'ensemble des cartes pointées orientables (resp. non orientables) de genre g sera encore appelée *carte pointée orientable* (resp. non orientable) de genre g dans la suite. Ce sont ces classes d'isomorphie que l'on cherche à dénombrer dans la suite.

Remarques. – 1. On représente usuellement les sens de parcours p et de traversée t d'une arête a par des flèches comme sur la figure 3.a. Une autre représentation classique est celle de graphe « gras » ou « à bande » présenté

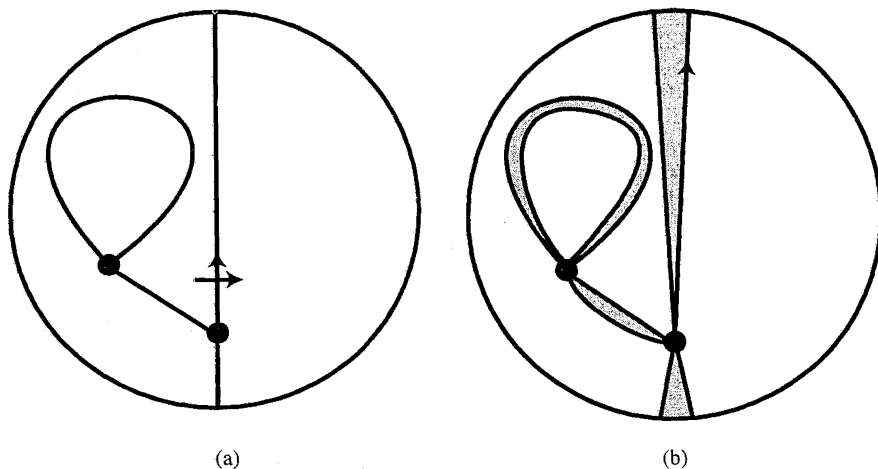


Figure 3. – (a) Une représentation d'une carte pointée sur le plan projectif, le pointage étant représenté par des flèches ; (b) Une représentation d'une carte pointée sur le plan projectif, les arêtes étant représentées par des bandes. Le bord de bande indique le sens de parcours pointé (le sens de traversée pointé est implicite).

dans la figure 3.b. Dans cette représentation, les arêtes sont représentées en « gras » (dédoublées) le côté de l'arête grasse choisi indiquant le sens de traversée vers la face qui lui est incidente.

2. Pour les cartes orientables, cette définition est en fait équivalente à celle classiquement utilisée et que l'on trouve par exemple dans [2]. En effet, il semblerait que la définition ci-dessus donne deux fois plus de façons de définir une carte simplement pointée que dans la définition classique. Le nombre de classes d'isomorphie de ces cartes n'est en fait pas changé car pour une carte orientable, il y a deux façons de définir l'orientation positive de la surface. Comme la définition d'isomorphisme précédente n'impose pas à l'homéomorphisme de préserver l'orientation de la surface (à la différence de la définition classiquement utilisée en orientable), les classes d'équivalence de cartes pointées contiennent simplement « deux fois plus » d'éléments dépendant de l'orientation choisie sur la surface orientable.

L'essentiel des résultats connus concerne l'énumération des cartes sur les surfaces orientables (*cf.* par exemple [1, 2, 3, 4]). Quelques résultats ont été établis pour les cartes non orientables (*cf.* [6, 8]). Nous nous intéressons dans cet article à l'énumération de cartes pointées sur la bouteille de Klein.

2.3. Séries génératrices

Rappel

Si $f(n_1, \dots, n_k)$ est le nombre d'objets appartenant à une certaine famille, paramétrée par k paramètres associés aux variables x_1, \dots, x_k , alors $F(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 0} f(n_1, \dots, n_k) x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$ est la série génératrice de cette famille.

Notations

- $T_g(v_1, \dots, v_r, z)$ (resp. $P_g(v_1, \dots, v_r, z)$, $B_g(v_1, \dots, v_r, z)$) est la série génératrice des cartes r -pointées sur T_g (resp. P_g , B_g). Pour tout entier k compris entre 1 et r , le degré de la variable v_k est le degré de la k -ième face pointée. Le degré de la variable z est le nombre d'arêtes de la carte. $T_g(v_1, \dots, v_r, z)$ (resp. $P_g(v_1, \dots, v_r, z)$, $B_g(v_1, \dots, v_r, z)$) présente la propriété d'être symétrique par rapport aux variables v_1, \dots, v_r .
- Nous définissons à présent une notation abrégée utile à l'expression des équations fonctionnelles définissant $T_g(v_1, \dots, v_r, z)$, $P_g(v_1, \dots, v_r, z)$ et $B_g(v_1, \dots, v_r, z)$.

Soit α un entier naturel non nul, β un entier naturel et Φ une fonction de $(\alpha + \beta)$ variables. Si Φ est symétrique par rapport à ses α premières variables, alors pour toute permutation σ sur l'ensemble $\{1, \dots, \alpha\}$, les expressions $\Phi(x_1, \dots, x_\alpha, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\beta})$ et $\Phi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(\alpha)}, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\beta})$ sont égales. On note donc $\Phi(X, x_{\alpha+1}, \dots, x_{\alpha+\beta})$ une quelconque de ces expressions, où X est l'ensemble $\{x_1, \dots, x_\alpha\}$.

Exemple

La série formelle $T_g(v_1, \dots, v_r, z)$ étant symétrique par rapport aux variables $\{v_1, \dots, v_r\}$, elle l'est également par rapport aux variables $\{v_2, \dots, v_r\}$. Ceci justifie la notation $T_g(v_1, W, z)$ utilisée dans les équations du paragraphe suivant, si W est l'ensemble $\{v_2, \dots, v_r\}$. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que les autres expressions du même type utilisées dans la suite sont légitimées par la symétrie de la fonction considérée, par rapport à certaines de ses variables.

3. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Nous présentons ici l'ensemble des équations fonctionnelles pour les cartes r -pointées de genre g orientables et non orientables. Nous aurons besoin de chacune de ces équations (appliquées pour un genre précis) pour résoudre le problème de l'énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein. Ces équations sont obtenues par la traduction en termes d'équations fonctionnelles de la classique opération de suppression de l'arête pointée. La première équation concerne les surfaces orientables, et peut être trouvée dans [1, 4]. La somme des trois équations est donnée dans [5]. Nous présentons les trois équations respectivement des surfaces orientables, des surfaces orientables issues d'un plan projectif, des surfaces non orientables issues d'une bouteille de Klein, avec un système de notation cohérent. Cette présentation permet en particulier de voir comment l'opération de suppression de l'arête pointée modifie selon les cas le genre de la carte et sa non orientabilité en orientabilité.

Introduisons quelques notations utiles à l'écriture de ces équations :

- g désigne un entier naturel et r un entier naturel non nul.
- W désigne l'ensemble vide si $r = 1$ et l'ensemble $\{v_2, \dots, v_r\}$ si $r > 1$.
- Si X est une partie de W (on note $X \subseteq W$), alors la partie complémentaire de X dans W est désignée par $W - X$.
- Enfin, on note $\delta_{a,b}$ le symbole de Kronecker, égal à 1 si a et b sont égaux et à 0 sinon.

Famille d'équations fonctionnelles pour les cartes r -pointées orientables de genre g

La série génératrice $T_g(v_1, W, z)$ des cartes pointées sur le tore à g trous (sur T_g) est la solution de l'équation fonctionnelle (1) :

$$\begin{aligned}
 T_g(v_1, W, z) = & \delta_{g,0} \delta_{r,1} + v_1^2 z \sum_{\substack{X \subseteq W \\ g_1, g_2 \geq 0 \\ g_1 + g_2 = g}} T_{g_1}(v_1, X, z) T_{g_2}(v_1, W - X, z) \\
 & + v_1^2 z T_{g-1}(v_1, v_1, W, z) \\
 & + v_1 z \frac{v_1 T_g(v_1, W, z) - T_g(1, W, z)}{v_1 - 1} \\
 & + z \sum_{j=2}^r v_1 v_j \frac{\partial}{\partial v_j} \\
 & \times \left[v_j \frac{v_j T_g(v_j, W - \{v_j\}, z) - v_1 T_g(v_1, W - \{v_j\}, z)}{v_j - v_1} \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

Famille d'équations fonctionnelles pour les cartes r -pointées non orientables de genre g impair

La série génératrice $P_g(v_1, W, z)$ des cartes pointées sur la surface P_g (g impair et supérieur ou égal à 1) est la solution de l'équation fonctionnelle (2) :

$$\begin{aligned}
 P_g(v_1, W, z) = & 2 v_1^2 z \sum_{\substack{X \subseteq W \\ g_1, g_2 \geq 0 \\ g_1 + g_2 = g \\ g_1 \text{ mod } 2 = 1}} P_{g_1}(v_1, X, z) T_{\frac{g_2}{2}}(v_1, W - X, z) \\
 & + v_1^2 z P_{g-2}(v_1, v_1, W, z) \\
 & + v_1^2 z \frac{\partial}{\partial v_1} [v_1 T_{\frac{g-1}{2}}(v_1, W, z)] \\
 & + v_1 z \frac{v_1 P_g(v_1, W, z) - P_g(1, W, z)}{v_1 - 1} \\
 & + z \sum_{j=2}^r v_1 v_j \frac{\partial}{\partial v_j} \\
 & \times \left[v_j \frac{v_j P_g(v_j, W - \{v_j\}, z) - v_1 P_g(v_1, W - \{v_j\}, z)}{v_j - v_1} \right] \quad (2)
 \end{aligned}$$

Famille d'équations fonctionnelles pour les cartes r -pointées non orientables de genre g pair

La série génératrice $B_g(v_1, W, z)$ des cartes pointées sur la surface B_g (g pair et supérieur ou égal à 2) est la solution de l'équation fonctionnelle (3) :

$$\begin{aligned}
 B_g(v_1, W, z) = & 2v_1^2 z \sum_{\substack{X \subseteq W \\ g_1, g_2 \geq 0 \\ g_1 + g_2 = g \\ g_1 \bmod 2 = 0}} B_{g_1}(v_1, X, z) T_{\frac{g_2}{2}}(v_1, W - X, z) \\
 & + v_1^2 z \sum_{\substack{X \subseteq W \\ g_1, g_2 \geq 0 \\ g_1 + g_2 = g \\ g_1 \bmod 2 = 1 \\ g_2 \bmod 2 = 1}} P_{g_1}(v_1, X, z) P_{g_2}(v_1, W - X, z) \\
 & + v_1^2 z B_{g-2}(v_1, v_1, W, z) + v_1^2 z T_{\frac{g-2}{2}}(v_1, v_1, W, z) \\
 & + v_1^2 z \frac{\partial}{\partial v_1} [v_1 P_{g-1}(v_1, W, z)] \\
 & + v_1 z \frac{v_1 B_g(v_1, W, z) - B_g(1, W, z)}{v_1 - 1} \\
 & + z \sum_{j=2}^r v_1 v_j \frac{\partial}{\partial v_j} \\
 & \times \left[v_j \frac{v_j B_g(v_j, W - \{v_j\}, z) - v_1 B_g(v_1, W - \{v_j\}, z)}{v_j - v_1} \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

Preuve succincte

Ces équations sont obtenues en utilisant l'opération topologique de suppression de l'arête pointée. Afin de comprendre l'origine des termes les constituant, nous rappelons succinctement leur obtention en illustrant la démonstration par des figures afin d'aider l'intuition du lecteur dans le cas plus complexe des surfaces non orientables.

Notons (a, p, t) le premier triplet pointé d'une carte C . En raisonnant comme dans [4], nous pouvons distinguer quatre cas :

1. L'arête pointée a du triplet est un isthme et
 - a) sa suppression déconnecte la carte C en deux sous-cartes, ou
 - b) sa suppression ne déconnecte pas la carte C .
2. L'arête pointée a n'est pas un isthme et
 - a) la face incidente du côté $(-t)$ à l'arête a n'est pas une face pointée, ou
 - b) la face incidente du côté $(-t)$ à l'arête a est une autre face pointée.

1. Dans le cas où a est un isthme, il existe une courbe simple fermée π , entièrement contenue dans la face extérieure (sauf pour le point de a ou π traverse a), et telle que le parcours sur π nous fasse passer d'un côté à l'autre de a . Coupons la surface le long de π et bouchons le ou les trous ainsi créés en recollant un ou des disques (voir également [5]).

Cas 1.a) La suppression de l'isthme pointé a déconnecte la carte C en deux sous-cartes.

Après avoir rempli les trous créés par la coupure, on obtient deux surfaces. Soient C_1 et C_2 les deux cartes correspondantes sur ces deux surfaces, issues de C par suppression de a . On les pointe respectivement en distinguant les arêtes a_1 et a_2 immédiatement avant et après l'arête pointée a dans le parcours de la face extérieure induit par le sens de parcours p de a (cf. § 2.2). On munit a_1 et a_2 d'un sens de parcours et de traversée compatibles avec la face extérieure de la carte globale. Ceci correspond aux premières sommations des équations (1), (2) et (3).

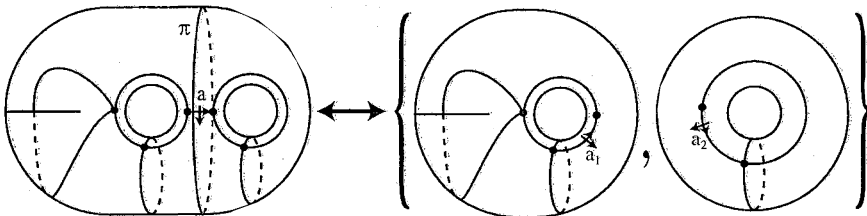


Figure 4. – Surface non orientable de genre 5. La coupure selon π déconnecte la surface en une surface non orientable de genre 3 et un tore.

Cas 1.b) La suppression de l'isthme pointé a ne déconnecte pas la carte C .

Dans ce cas, le résultat de la coupure est une seule surface, et la coupure produit soit un, soit deux trous dans cette surface.

- S'il y a deux trous, la courbe simple fermée π coupe une anse de la surface. Dans le cas orientable, en bouchant les deux trous on obtient une carte C' sur une surface de genre $g - 1$ orientable. Dans le cas non orientable, soit la coupure fait disparaître la bouteille de Klein, auquel cas on se retrouve

sur une surface orientable de genre $(g - 2)/2$, soit elle fait disparaître un simple tore, auquel cas on se retrouve sur une surface non orientable de genre $g - 2$. Ce cas apparaît après les sommations dans les équations (1), (2) et (3). Il traduit l'apparition d'une carte où deux faces distinctes sont pointées (d'où les deux variables v_1) respectivement en distinguant les arêtes a_1 et a_2 immédiatement avant et après l'arête pointée a dans le parcours de la face extérieure induit par le sens de parcours p de a . On munit a_1 et a_2 d'un sens de parcours et de traversée compatibles avec la face extérieure de la carte globale.

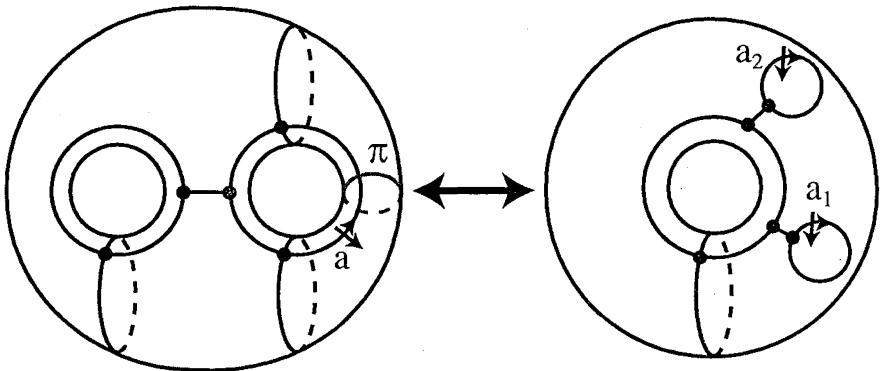


Figure 5. – Surface orientable de genre 2. La coupure selon π supprime une anse de la surface qui devient orientable de genre 1.

- Si par contre un seul trou est créé par la suppression, cela signifie que la courbe simple fermée π coupe une bande de Möbius. Ce cas n'apparaît donc que pour les surfaces non orientables.

Quand le trou est bouché par un disque, la nouvelle surface possède un plan projectif en moins. Autrement dit, si la surface initiale est dérivée du plan projectif (P_g), la surface obtenue est orientable et de genre $(g - 1)/2$, et si la surface initiale est dérivée de la bouteille de Klein (B_g), la surface obtenue est non orientable, de genre $g - 1$. Si la nouvelle face pointée est de degré r , il y a $(r + 1)$ possibilités pour rattacher l'arête a ; la contribution de ce cas correspond aux premiers termes du type " $v_1^2 z \partial / \partial v_1 [v_1 X_i(v_1, W, z)]$ " avec dérivées partielles des équations (2) et (3).

Une autre façon de justifier la forme de ce terme est de pointer, dans la nouvelle carte C' obtenue par suppression du triplet pointé (a, p, t) de C , les deux éléments suivants :

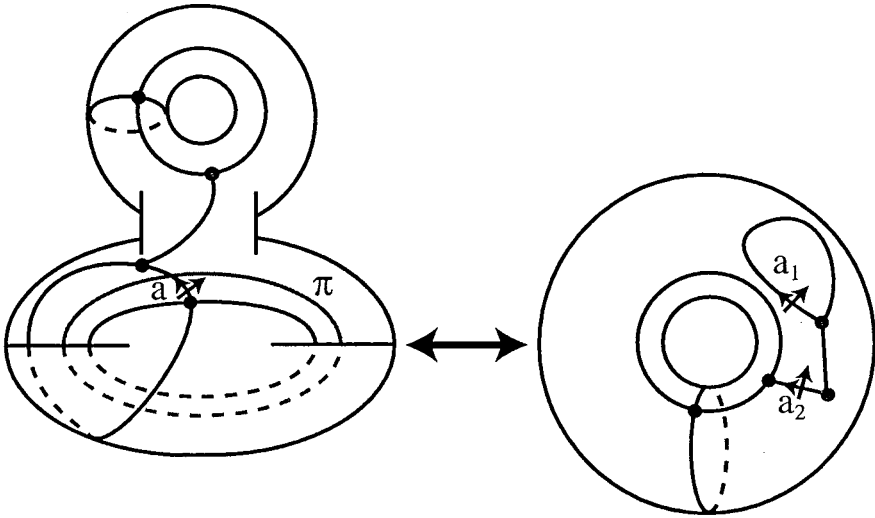


Figure 6. – Surface non orientable de genre 4. La coupure selon π supprime la bouteille de Klein de la surface qui devient orientable de genre 1.

1. le dernier triplet (a_1, p_1, t_1) (avec $a_1 \neq a$) précédent (a, p, t) dans le parcours orienté de la face extérieure de C ;
2. le triplet (a_2, p_2, t_2) suivant immédiatement (a, p, t) dans le parcours orienté de la face extérieure de C si $a_2 \neq a$ (sinon, on ne définit pas de second triplet pointé).

On obtient ainsi une carte dont la face extérieure est doublement pointée sauf si le triplet pointé (a, p, t) de C est constitué d'une arête isthme a qui est une boucle et telle que le triplet suivant (a', p', t') dans le parcours orienté de la face extérieure de C à partir de (a, p, t) soit $(a, p, -t)$, avec $-t$ sens de traversée opposée à t . Ce cas correspond à une disposition parfaitement définie de la boucle (a, p, t) (voir fig. 8).

La série génératrice des cartes dont la face extérieure est doublement pointée est $v_1^2 z \cdot v_1 \cdot \partial / \partial v_1 [X_i(v_1, W, z)]$. Celle des cartes simplement pointées est $v_1^2 z X_i(v_1, W, z)$, le terme $v_1^2 z$ correspondant à l'arête isthme à rajouter. La somme de ces deux séries génératrices donne bien le terme annoncé.

2. Les cas 2.a et 2.b sont totalement analogues aux termes obtenus dans le cas des cartes orientables. La non orientabilité ne changeant rien dans cette

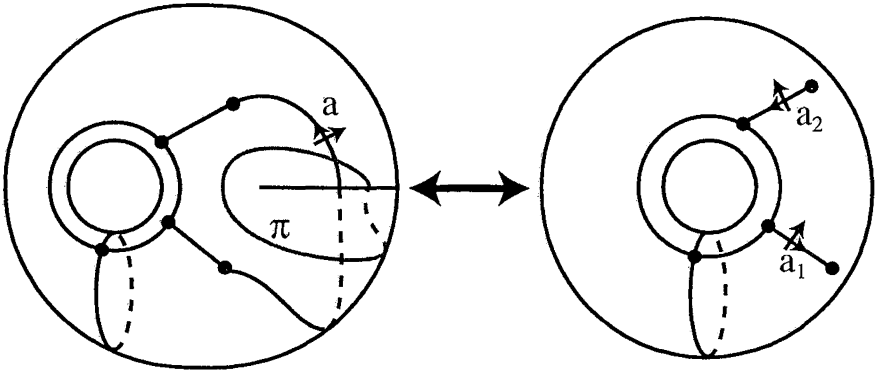


Figure 7. – Surface non orientable de genre 3. La coupure selon π supprime une auto-intersection de la surface qui devient orientable de genre 1.

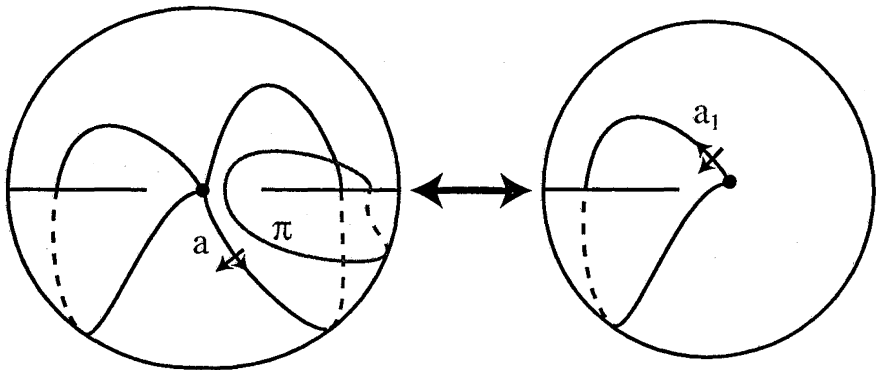


Figure 8. – Surface non orientable de genre 2. La coupure selon π supprime une auto-intersection de la surface qui devient le plan projectif.

situation purement locale où l'on se contente de supprimer l'arête pointée de la carte :

Cas 2.a) Dans ce cas la suppression de l'arête pointée donne une carte sur le même type de surface, qui se traduit par le terme quotient, avant dernier terme de équations (1), (2) et (3).

Cas 2.b) Dans ce cas la suppression de l'arête pointée donne une carte sur le même type de surface, qui se traduit par le terme dérivé d'un quotient, dernier terme des équations (1), (2) et (3).

4. ÉNUMÉRATION DES CARTES POINTÉES SUR LA BOUTEILLE DE KLEIN

Le premier théorème donne le système paramétrique permettant l'énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre d'arêtes.

THÉORÈME 1: *La série génératrice $B_2(1, z)$ énumérant les cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre d'arêtes est solution du système paramétrique :*

$$\begin{cases} z = p(1 - 3p) \\ B_2(1, z) = \frac{(1 - 3p) \{1 - 4p + \sqrt{(1 - 6p)(1 - 2p)}\}}{(1 - 6p)^2 (1 - 2p)} \end{cases}$$

Dans la suite, la méthode utilisée pour la résolution de l'équation satisfaite par la série génératrice des cartes pointées dessinées sur la bouteille de Klein est analogue à celle du cas orientable (cf. [1, 3, 4, 6]), et utilise les trois types d'équations précédemment donnés pour les cartes orientables et non orientables.

De l'équation (2) pour les cartes pointées sur les surfaces non orientables, on extrait l'équation sur la bouteille de Klein en posant $g = 2$ et $W = \emptyset$:

$$\begin{aligned} B_2(v, z) = v^2 z \{ & 2 B_2(v, z) T_0(v, z) + P_1(v, z)^2 \} \\ & + v^2 z T_0(v, v, z) + v^2 z P_{1,1,2}(v, z) \\ & + vz \frac{v B_2(v, z) - B_2(1, z)}{v - 1} \end{aligned} \quad (4)$$

où $P_{1,1,2}(v, z) = \frac{\partial}{\partial v} [v P_1(v, z)]$, en notant $P_{g,1,q}$ la série génératrice des cartes sur la surface P_g , où une face est pointée par un nombre maximal q de triplets.

4.1. Expression de $B_2(1, z)$ en fonction des séries génératrices de cartes de genres inférieurs

Isolons $B_2(v, z)$ dans (4) et multiplions par $(1 - v)$. On obtient :

$$\begin{aligned} B_2(v, z) A(v, z) = vz B_2(1, z) + (1 - v) v^2 z P_{1,1,2}(v, z) \\ + (1 - v) v^2 z T_0(v, v, z) + (1 - v) v^2 z P_1(v, z)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$A(v, z) = 1 - v + v^2 z - 2(1 - v)v^2 z T_0(v, z) \quad (6)$$

On note $V = V(z)$ la série formelle définie par :

$$V = \frac{1}{1 - V z T_0(V, z)} \quad (7)$$

qui est l'unique solution de l'équation suivante (cf. [2] où une preuve simple, fondée sur une autre équation pour T_0 issue d'une autre décomposition, rend triviale la vérification) :

$$A(V, z) = 0 \quad (8)$$

En isolant $B_2(1, z)$ dans (5), puis en évaluant l'expression en V , on obtient l'équation qui va permettre de déterminer $B_2(1, z)$:

$$B_2(1, z) = V(V - 1) \{P_1(V, z)^2 + P_{1,1,2}(V, z) + T_0(V, V, z)\} \quad (9)$$

Pour simplifier l'écriture de (9) et des calculs suivants, on note dans la suite $X[k] = [\frac{\partial^k X}{\partial v^k}]|_{v=V}$ pour toute série formelle X .

Par définition de $P_{1,1,2}(V, z)$, avec cette notation nous avons :

$$P_{1,1,2}(V, z) = P_1[0] + V P_1[1] \quad (10)$$

De (9), on en déduit l'équation donnant $B_2(1, z)$ en fonction des dérivées de séries génératrices de cartes dessinées sur le plan projectif et le tore :

$$B_2(1, z) = V(V - 1) \{P_1[0]^2 + P_1[0] + V P_1[1] + T_0(V, V, z)\} \quad (11)$$

Pour obtenir $B_2(1, z)$, il nous reste donc à calculer les dérivées successives $P_1[0]$, $P_1[1]$ de P_1 (cf. § 4.2) et $T_0(V, V, z)$ (cf. § 4.3).

4.2. Dérivées successives de P_1

De l'équation générale de Tutte (2) sur les surfaces non orientables, on extrait l'équation sur le plan projectif en posant $g = 1$:

$$P_1(v, z) = 2v^2 z P_1(v, z) T_0(v, z) + v^2 z T_{0,1,2}(v, z) + v z \frac{v P_1(v, z) - P_1(1, z)}{v - 1} \quad (12)$$

Afin de déterminer $P_1 [1]$ en fonction des dérivées successives de T_0 et de A , on isole $P_1 (v, z)$ dans (12) pour obtenir l'équation (13) que l'on dérivera deux fois par rapport à v :

$$P_1 (v, z) A (v, z) = vz P_1 (1, z) + (1 - v) v^2 z T_{0,1,2} (v, z) \tag{13}$$

Pour obtenir $P_1 [0]$, dérivons l'expression (13) une première fois par rapport à v , puis évaluons la en $v = V$. Puisque $A [0] = A (V (z), z) \equiv 0$, on déduit :

$$\begin{aligned} P_1 [0] A [1] &= P_1 (V, z) A [1] \\ &= z P_1 (1, z) + (2 - 3V) V z \left\{ \frac{\partial}{\partial v} (v T_0 (v, z)) \right\}_{|v=V} \\ &\quad + V^2 (1 - V) z \left\{ \frac{\partial^2}{\partial v^2} (v T_0 (v, z)) \right\}_{|v=V} \\ &= z P_1 (1, z) + (2 - 3V) V z (T_0 [0] + V T_0 [1]) \\ &\quad + V^2 (1 - V) z (2 T_0 [1] + V T_0 [2]) \\ &= z \{ P_1 (1, z) + V (2 - 3V) T_0 [0] + V^2 (4 - 5V) T_0 [1] \\ &\quad + V^3 (1 - V) T_0 [2] \} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$P_1 [0] = \frac{\left\{ z \{ P_1 (1, z) + V (2 - 3V) T_0 [0] + V^2 (4 - 5V) T_0 [1] + V^3 (1 - V) T_0 [2] \} \right\}}{A [1]} \tag{14}$$

Pour obtenir $P_1 [1]$, dérivons une seconde fois l'expression (13) par rapport à v , et évaluons le résultat en V :

$$\begin{aligned} P_1 [1] A [1] + P_1 [0] A [2] \\ &= z \{ 2 P_1 (1, z) + (2 - 3V) T_0 [0] + 2V (5 - 9V) T_0 [1] \\ &\quad + V^2 (7 - 9V) T_0 [2] + V^3 (1 - V) T_0 [3] \} \end{aligned} \tag{15}$$

On en déduit l'expression de $P_1 [1]$:

$$P_1 [1] = \frac{\left\{ z \{ 2 P_1 (1, z) + (2 - 3 V) T_0 [0] + 2 V (5 - 9 V) T_0 [1] \right.}{A [1]} \left. + V^2 (7 - 9 V) T_0 [2] + V^3 (1 - V) T_0 [3] \right\} - P_1 [0] A [2]}{A [1]} \quad (16)$$

4.3. Calcul de $T_0 (V, V, z)$ en fonction des dérivées successives de T_0

De l'équation générale (1), on déduit l'équation fonctionnelle dont la série génératrice du nombre de cartes planaires 2-pointées $T_0 (v_1, v_2, z)$ est solution :

$$\begin{aligned} T_0 (v_1, v_2, z) &= 2 v_1^2 z T_0 (v_1, v_2, z) T_0 (v_1, z) \\ &+ v_1 z \frac{v_1 T_0 (v_1, v_2, z) - T_0 (1, v_2, z)}{v_1 - 1} \\ &+ v_1 v_2 z \frac{\partial}{\partial v_2} \left[v_2 \frac{v_1 T_0 (v_1, z) - v_2 T_0 (v_2, z)}{v_1 - v_2} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

On constate sur cette expression, la nécessité de connaître $T_0 (1, V, z)$ pour déterminer $T_0 (V, V, z)$.

4.3.1. Calcul de $T_0 (1, V, z)$

La méthode est la même que précédemment. Dans (17), on isole $T_0 (v_1, v_2, z)$ que l'on multiplie par $(1 - v_1)$ et l'on exprime également la dérivée du troisième terme du second membre :

$$\begin{aligned} A (v_1, z) T_0 (v_1, v_2, z) &= v_1 z T_0 (1, v_2, z) \\ &+ v_1 v_2 (1 - v_1) z \frac{v_1 T_0 (v_1, z) - v_2 T_0 (v_2, z)}{v_1 - v_2} \\ &+ \frac{v_1 v_2^2 (1 - v_1)}{(v_1 - v_2)^2} z \left[v_1 T_0 (v_1, z) - v_2 T_0 (v_2, z) \right. \\ &\left. - (v_1 - v_2) \frac{\partial}{\partial v_2} [v_2 T_0 (v_2, z)] \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Substituons alors V à v_1 et v_2 (le coefficient $A (V, z)$ de $T_0 (V, V, z)$ dans le premier membre s'annule). On obtient en utilisant un développement

de Taylor de $vT_0(v, z)$ en v_2 et en utilisant les notations introduites précédemment :

$$T_0(1, V, z) = V(V - 1) \left(T_0[0] + 2VT_0[1] + \frac{V^2}{2} T_0[2] \right) \quad (19)$$

4.3.2. Calcul de $T_0(V, V, z)$

En reprenant le développement de Taylor des termes du second membre de l'équation (18) au voisinage de v_2 , et en dérivant par rapport à v_1 , on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{A(v_1, z)}{1 - v_1} \frac{\partial T_0(v_1, v_2, z)}{\partial v_1} + (v_2 - v_1) L(v_1, v_2, z) \\ &= \left(4v_1 z T_0(v_1, z) + 2v_1^2 z \frac{\partial T_0(v_1, z)}{\partial v_1} + \frac{2v_1}{v_1 - 1} - \frac{v_1^2 z}{(v_1 - 1)^2} \right) \\ & \quad \times T_0(v_1, v_2, z) + \frac{z}{(v_1 - 1)^2} T_0(1, v_2, z) \\ & \quad + v_2 z \frac{\partial}{\partial v_2} [v_2 T_0(v_2, z)] + v_2^2 z \frac{\partial^2}{\partial v_2^2} [v_2 T_0(v_2, z)] \\ & \quad + \frac{v_1 v_2^2 z}{3!} \frac{\partial^3}{\partial v_2^3} [v_2 T_0(v_2, z)] \end{aligned} \quad (20)$$

où L est une série formelle en z , à coefficients dans l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[v_1, v_2]$.

En substituant V à v_1 et v_2 , les coefficients de L et de $\frac{\partial T_0(v_1, v_2, z)}{\partial v_1}$ s'annulent d'où :

$$\begin{aligned} & - \left(4V z T_0[0] + 2V^2 z T_0[1] + \frac{2V}{V - 1} - \frac{V^2 z}{(V - 1)^2} \right) T_0(V, V, z) \\ &= \frac{z}{(V - 1)^2} T_0(1, V, z) + Vz(T_0[0] + VT_0[1]) \\ & \quad + V^2 z(2T_0[1] + VT_0[2]) + \frac{V^3 z}{3!} (3T_0[2] + VT_0[3]) \end{aligned} \quad (21)$$

En utilisant l'équation (19) donnant $T_0(1, V, z)$, on déduit l'expression de $T_0(V, V, z)$ en fonction des dérivées successives de T_0 :

$$T_0(V, V, z) = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (1-V)V \{6T_0[0] + 6(3V-1)T_0[1] \\ + 3V(3V-2)T_0[2] + V^2(V-1)T_0[3]\} \end{array} \right\}}{6\{4(V-1)^2T_0[0] + 2V(V-1)^2T_0[1] + V-2\}} \quad (22)$$

Il reste maintenant à calculer les expressions de $A[0]$, $A[1]$, $A[2]$ (cf. §4.4), $T_0[0]$, $T_0[1]$, $T_0[2]$ et $T_0[3]$ (cf. §4.5).

4.4. Dérivées successives de A

Pour calculer les $A[k]$ pour $k > 0$, partons de l'expression (cf. (6)) de A et de l'équation de Tutte pour les cartes planaires, obtenue à partir de l'expression générale pour les cartes pointées orientables (1), en posant $g = 0$:

$$T_0(v, z) = 1 + v^2 z T_0(v, z)^2 + v z \frac{v T_0(v, z) - T_0(1, z)}{v-1} \quad (23)$$

On déduit de la définition de la série formelle A (6) et de l'équation (23) l'égalité suivante :

$$A(v, z)^2 = C(v, z) \quad (24)$$

où

$$C(v, z) = (1 - v + v^2 z)^2 - 4v^2 z (v-1)^2 + 4v^3 z^2 (v-1) T_0(1, z) \quad (25)$$

En dérivant (24) plusieurs fois successivement par rapport à v , on déduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A[1]^2 = \frac{C[2]}{2} \\ A[2] = \frac{C[3]}{6A[1]} \\ A[3] = \frac{C[4] - C[3]^2 / (3C[2])}{8A[1]} \end{array} \right. \quad (26)$$

On dérive plusieurs fois successivement par rapport à v , l'expression de C donnée par l'équation (25). On l'évalue en $v = V$, puis on utilise l'expression

de $T_0(1, z)$ en fonction de V (cf. [2]) : $T_0(1, z) = \frac{(4-3V)V}{(3-2V)^2}$. Finalement on obtient :

$$\begin{cases} C[2] = \frac{2(5V-6)(V-2)}{V^2} \\ C[3] = \frac{60(V-1)(V-2)}{V^3} \\ C[4] = \frac{24(V-1)(5V-9)}{V^4} \end{cases} \quad (27)$$

À l'aide de (26) et (27), on peut donc exprimer $A[k]$ en fonction de V .

4.5. Dérivées successives de T_0

L'équation (8) s'écrit explicitement :

$$A[0] = A(V(z), z) = 1 - V + V^2 z - 2(1 - V)V^2 z T_0[0] \equiv 0 \quad (28)$$

On déduit de (28) l'expression de $T_0[0]$ en fonction de V et de z :

$$T_0[0] = \frac{1 - V + V^2 z}{2(1 - V)V^2 z} \quad (29)$$

Pour obtenir les expressions de $T_0[k]$ pour $k > 0$, il faut dériver successivement l'équation (6) par rapport à v , puis l'évaluer en V . On obtient alors :

$$\begin{cases} A[1] = -1 + 2Vz - 2(2 - 3V)Vz T_0[0] \\ \quad - 2(1 - V)V^2 z T_0[1] \\ A[2] = 2z - 2(2 - 6V)z T_0[0] \\ \quad - 4(2 - 3V)Vz T_0[1] - 2(1 - V)V^2 z T_0[2] \\ A[3] = 12z T_0[0] - 6(2 - 6V)z T_0[1] - 6(2 - 3V)Vz T_0[2] \\ \quad - 2(1 - V)V^2 z T_0[3] \end{cases} \quad (30)$$

Il reste à isoler $T_0 [k]$:

$$\begin{cases} T_0 [1] = \frac{-1 + 2Vz - 2(2 - 3V)VzT_0 [0] - A [1]}{2(1 - V)V^2z} \\ T_0 [2] = \frac{2z - 2(2 - 6V)zT_0 [0] - 4(2 - 3V)VzT_0 [1] - A [2]}{2(1 - V)V^2z} \\ T_0 [3] = \frac{12zT_0 [0] - 6(2 - 6V)zT_0 [1] - 6(2 - 3V)VzT_0 [2] - A [3]}{2(1 - V)V^2z} \end{cases} \quad (31)$$

On peut donc exprimer $T_0 [k]$ en fonction de V et de z .

4.6. Énumération

À partir de la formule (9), il ne reste plus qu'à « rassembler les morceaux ». On obtient ainsi le nombre de cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction de la série formelle V :

$$B_2(1, z) = \frac{2V \{6V^2 - 17V + 12 + (2V - 3)\sqrt{(5V - 6)(V - 2)}\}}{(5V - 6)^2(2 - V)} \quad (32)$$

En sachant que l'expression de z en fonction de la série formelle V , obtenue au cours de la résolution du cas planaire (cf. [2]) est :

$$z = \frac{(V - 1)(3 - 2V)}{V^2} \quad (33)$$

En posant $V = 1/(1 - p)$ et avec l'expression (33), on peut exprimer z en fonction de la série formelle p :

$$z = p(1 - 3p) \quad (34)$$

ce qui nous permet d'obtenir le nombre de cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction de la série formelle p :

$$B_2(1, z) = \frac{(1 - 3p) \{1 - 4p + \sqrt{(1 - 6p)(1 - 2p)}\}}{(1 - 6p)^2(1 - 2p)} \quad (35)$$

On déduit de ce système paramétrique la table d'énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre d'arêtes :

z	$B_2(1, z)$
1	0
2	4
3	84
4	1340
5	19280
6	263284
7	3486224
8	45247084
9	579150012
10	7338291224

z	$B_2(1, z)$
11	92272957568
12	1153361204996
13	14348020042512
14	177803262186064
15	2196338193610064
16	27057921450352204
17	332583930387073712
18	4079999052767236876
19	49967134038473916656
20	611036991553770691720

4.7. Généralisation

On peut généraliser le théorème 1 à l'énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre de sommets et de faces de la carte. Il faut partir des généralisations de l'équation de Tutte en fonction du nombre de sommets et de faces, puis les calculs sont semblables aux précédents, quoique plus complexes. Nous donnons au théorème 2 le résultat de ces calculs, en fonction des variables paramétriques p et q , déjà utilisées dans [3, 8], $B_g(v, s, f)$ étant la série génératrice des cartes pointées sur B_g , le degré de la variable v donnant le degré de la face pointée, le degré de la variable s (resp. f) étant le nombre de sommets (resp. faces) moins 1 de la carte.

THÉORÈME 2: La série génératrice $sfB_2(1, s, f)$ des cartes pointées sur la bouteille de Klein énumérées en fonction des nombres de sommets et de faces est solution du système paramétrique :

$$\left\{ \begin{array}{l} s = p(1 - p - 2q) \\ f = q(1 - 2p - q) \\ sfB_2(1, s, f) \\ = \frac{2 - 9(p + q) + 12(p^2 + q^2) - 4(p^3 + q^3) + 28pq - 20(p^2q + pq^2)}{((1 - 2p - 2q)^2 - 4pq)^2} \\ - \frac{(2 - 5(q + p) + 8pq + 2(q^2 + p^2)) \sqrt{(1 - 2p - 2q)^2 - 4pq}}{((1 - 2p - 2q)^2 - 4pq)^2} \end{array} \right. \quad (36)$$

On déduit de ce système paramétrique la table d'énumération des cartes pointées sur la bouteille de Klein en fonction du nombre de sommets et de faces :

s	f	$B_2(1, s, f)$
1	1	4
1	2	42
1	3	304
1	4	1870
1	5	10488
1	6	55412
2	1	42
2	2	732
2	3	7770
2	4	65010
2	5	471450
2	6	3105648
3	1	304
3	2	7770
3	3	112288
3	4	1216250
3	5	11011008
3	6	88099908

s	f	$B_2(1, s, f)$
4	1	1870
4	2	65010
4	3	1216250
4	4	16452236
4	5	181005984
4	6	1722733530
5	1	10488
5	2	471450
5	3	11011008
5	4	181005984
5	5	2369291544
5	6	26373780972
6	1	55412
6	2	3105648
6	3	88099908
6	4	1722733530
6	5	26373780972
6	6	338598540480

5. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons énuméré les cartes pointées sur la bouteille de Klein. Cette étude devrait se généraliser aux genres supérieurs (comme dans [1] pour les cartes sur les surfaces orientables), car les calculs présentés sont automatisables, malgré une complexité qui augmente extrêmement rapidement et des équations légèrement plus complexes que dans le cas orientable. Ce travail est actuellement en cours.

Dans un autre article, en préparation, nous nous efforçons de mieux comprendre la structure interne topologique des cartes non orientables, en particulier sur le plan projectif et sur la bouteille de Klein. Pour ce faire, nous utilisons une opération topologique plus complexe, généralisant celle

de contraction de la face extérieure en un sommet utilisée pour le genre 0 dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. D. ARQUÈS et A. GIORGETTI, Énumération des cartes pointées sur une surface orientable de genre quelconque en fonction des nombres de sommets et de faces, *Rapport de recherche Institut Gaspard Monge*, 1997, 97-21, soumis à publication.
2. D. ARQUÈS, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1985, 39, p. 27-42.
3. D. ARQUÈS, Relations fonctionnelles et dénombrement des cartes pointées sur le tore, *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1987, 43, p. 253-274.
4. E. BENDER et E. CANFIELD, The number of rooted maps on an orientable surface, *J. Combin. Theory, Ser. B*, 1991, 53, p. 293-299.
5. E. BENDER et E. CANFIELD, The asymptotic number of rooted maps on a surface, *J. Combin. Theory, Ser. A*, 1986, 43, p. 244-257.
6. E. BENDER, E. CANFIELD et R. ROBINSON, The enumeration of maps on the torus and the projective plane, *Canad. Math. Bull.*, 1988, 31(3), p. 257-271.
7. E. BENDER, E. CANFIELD et R. ROBINSON, The asymptotic number of tree-rooted maps on a surface, *J. Combin. Theory, Ser. A*, 1988, 48, p. 156-164.
8. E. BENDER, E. CANFIELD et L. RICHMOND, The asymptotic number of rooted maps on a surface. II. Enumeration by vertices and faces, *J. Combin. Theory, Ser. A*, 1993, 63, p. 318-329.
9. E. BENDER, Z. GAO, L. RICHMOND et N. WORMALD, Asymptotic properties of rooted 3-connected maps on surfaces, *J. Austral. Math. Soc.*, 1996, 60, p. 31-41.
10. W. G. BROWN, On the enumeration of non-planar maps, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1966, 65.
11. R. CORI, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque, S.M.F.*, 1975, 27.
12. I. P. GOULDEN et D. M. JACKSON, Maps in locally orientable surfaces, the double coset algebra, and zonal polynomials, *Canad. J. Math.*, 1966, 48 (3), p. 569-584.
13. W. S. MASSEY, Algebraic topology: an introduction, *Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics*, 1977, 56.
14. W. T. TUTTE, On the enumeration of planar maps, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1968, 74, p. 64-74.