RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

ALAIN FINKEL
LAURE PETRUCCI

Composition/décomposition de réseaux de Pétri et de leurs graphes de couverture

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 28, n° 2 (1994), p. 73-124

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1994__28_2_73_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 28, n° 2, 1994, p. 73 à 124)

COMPOSITION/DÉCOMPOSITION DE RÉSEAUX DE PETRI ET DE LEURS GRAPHES DE COUVERTURE (*)

par Alain FINKEL (1) et Laure PETRUCCI (2)

Communiqué par W. BRAUER

Résumé. – *Dans cet article, nous nous intéressons à la composition et à la décomposition de réseaux de Petri* via *un ensemble commun de places ou de transitions. Nous montrons que certaines propriétés sont conservées par ces techniques, d'autres pouvant être obtenues par composition des graphes de couverture. Nous proposons des algorithmes permettant la décomposition d'un réseau selon les propriétés que l'on désire vérifier. Nous présentons un algorithme permettant de composer des graphes de couverture minimaux, moins coûteux qu'une construction directe, aussi bien en temps qu'en espace.*

Abstract. – *In this paper, we study composition and decomposition of Petri nets via a common set of places or transitions. We prove that some properties are preserved by these techniques, and some other ones can be obtained by the composition of the covering graphs. We propose some algorithms to decompose a net according to the properties that must be verified. We present an algorithm to compose minimal covering graphs, less expensive than a straightforward construction, concerning as well time as space.*

INTRODUCTION

Le but de cet article est d'analyser de gros réseaux de Petri sans calculer directement leurs graphes de couverture complets même lorsque le graphe de couverture est minimal [6]. Il y a deux manières d'étudier un gros réseau de Petri : la première part du principe que l'on a composé des petits réseaux de Petri (des modules) par fusion de places et/ou par fusion de transitions, la deuxième consiste à étudier un réseau de Petri sans connaître la méthode modulaire ayant permis de l'obtenir. Nous examinerons ces deux cas et nous proposerons des méthodes d'analyse modulaire pour les deux cas envisagés.

(*) Reçu en mai 1990, accepté en septembre 1993.
(1) LIFAC, École Normale Supérieure de Cachan, 61, avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan Cedex, e-mail: finkel @ ens-cachan.fr.
(2) CEDRIC-IIE, 18, allée Jean Rostand, F-91025 Évry Cedex, e-mail: petrucci @ iie.cnam.fr.
Work supported by the Esprit project DEMON (BRA 3148) and C3.

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
0988-3754/94/02/$4.00/

Soit le premier cas où nous construisons un gros réseau de Petri par composition de modules. Nous utilisons alors la construction modulaire pour faire de l'analyse modulaire en calculant, en parallèle, les graphes de couverture minimaux de chacun des modules. De l'ensemble de ces graphes de couverture minimaux, on peut déduire plusieurs propriétés générales sur le réseau global; cependant, il peut être nécessaire de calculer le graphe de couverture minimal du réseau complet : nous présentons, pour ce faire, un algorithme de composition des graphes de couvertures de chacun des modules qui construit le graphe de couverture minimal complet. Le calcul du graphe de couverture minimal est ainsi réduit par rapport à la construction directe du graphe de couverture minimal complet. Si les propriétés des petits réseaux ne permettent pas de déduire les propriétés souhaitées pour le réseau total, au lieu de construire le graphe de couverture de ce dernier, on peut le considérer comme un gros réseau à décomposer en modules, et donc utiliser la démarche duale.

La démarche duale consiste à partir d'un gros réseau de Petri sans indication sur la démarche modulaire ayant servi à le construire. La personne qui a travaillé un certain temps sur un gros réseau commence à avoir certaines idées sur par exemple les places bornées et celles non bornées, et elle sait que toutes ses transitions doivent être quasi-vivantes. Soit p une place qu'on suppose bornée. Nous décomposons le grand réseau en petits réseaux communiquant par transitions communes. Prouver que la place p est bornée dans l'un de ces petits réseaux est suffisant pour inférer que p est bornée dans le réseau total. Soit maintenant p une place qu'on pense non bornée. Nous décomposons le grand réseau en petits réseaux communiquant par places communes. Prouver que la place p est non bornée dans l'un de ces petits réseaux est suffisant pour inférer que p est non bornée dans le réseau total. Par une décomposition similaire, on peut étudier la quasi-vivacité des transitions.

La composition/décomposition de réseaux, telle que nous la présentons, sert non seulement à l'analyse des réseaux places/transitions, mais aussi à l'analyse de réseaux de haut niveau comme les schémas de réseaux algébriques ([2], [5], [12]). En effet, pour étudier ces derniers, on se ramène à des modèles plus simples, et en particulier aux réseaux de Petri. Les relations entre les propriétés des modèles simples et celles des réseaux de haut niveau sont de même type que celles qui existent entre des réseaux de Petri et leur composé. Nous montrons donc comment la composition/décomposition peut être étendue aux réseaux de haut niveau et quelles propriétés peuvent être vérifiées.

1. DÉFINITIONS DE BASE

Rappelons que T^* désigne l'ensemble des suites finies sur T; on appellera *séquence* une telle suite de transitions. La *longueur* $1(s)$ d'une séquence $s = t_1 \ldots t_n$ est égale à n.

Nous rappelons brièvement la définition d'un réseau de Petri ([3], [4] et [9]).

DÉFINITION 1.1 : Un *réseau de Petri* PN est un quintuplet $PN = (P, T, \text{Pre}, \text{Post}, M_0)$ où P est l'ensemble fini des places, T est l'ensemble fini des transitions, Pre et Post sont deux fonctions partielles de $P \times T$ dans $\mathbb{N}$ et $M_0 \in \mathbb{N}^P$ est le marquage initial.

Une transition t est *franchissable* à partir d'un marquage M si pour toute place p, $M(p) \geqq \text{Pre}(p, t)$. Le marquage M', atteint en franchissant la transition t, est calculé pour tout place p, par

$$M'(p) = M(p) - \text{Pre}(p, t) + \text{Post}(p, t).$$

On notera $M[t > M'$ le fait que t est franchissable à partir de M et que M' est le marquage obtenu.

Une séquence $s \in T^*$ est *franchissable* à partir de M lorsque

$$M[t_1 > M_1, M_1[t_2 > M_2, \ldots, M_i[t_{i+1} > M_{i+1}, \ldots, M_{n-1}[t_n > M_n$$

avec $s = t_1 \ldots t_n$.

DÉFINITION 1.2 : Un marquage M est *mort* quand aucune transition est franchissable à partir de M.

L'*ensemble des états accessibles* d'un réseau de Petri est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial M_0.

Une place p est *bornée* s'il existe un entier $k \geqq 0$ tel que tout marquage M de l'ensemble des états accessibles vérifie $M(p) \leqq k$.

Une transition t est *quasi-vivante* s'il existe un marquage M dans l'ensemble des états accessibles tel que t est franchissable à partir de M.

Exemple 1.3: Soit $PN0 = (P, T, \text{Pre}, \text{Post}, M_0)$ où $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6\}$, Pre et Post sont les fonctions partielles de $P \times T$

dans $\mathbb{N}$ définies par:

$$\text{Pre}(p_1, t_1) = \text{Pre}(p_1, t_2) = \text{Pre}(p_3, t_4) = 1$$

$$\text{et} \quad \text{Pre}(p_2, t_3) = \text{Pre}(p_4, t_5) = \text{Pre}(p_5, t_6) = 1,$$

$$\text{Post}(p_2, t_1) = \text{Post}(p_2, t_4) = \text{Post}(p_4, t_2) = \text{Post}(p_4, t_6) = 1$$

$$\text{et} \quad \text{Post}(p_5, t_5) = \text{Post}(p_3, t_3) = 2.$$

$M_0 = (1, 0, 0, 0, 0)$ est le marquage initial.

L'ensemble des états accessibles du réseau PN0 est infini. Toutes les transitions de PN0 sont quasi-vivantes car t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 et t_6 sont franchissables à partir d'un marquage accessible.

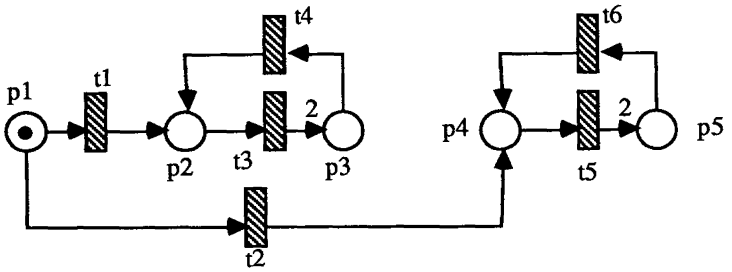


Figure 1. – Le réseau PNO

DÉFINITION 1.4 : *L'arbre d'accessibilité* d'un réseau de Petri $PN = (P, T, \text{Pre}, \text{Post}, M_0)$ est défini de la manière suivante:

– la racine de l'arbre est étiquetée par le marquage initial M_0;

– pour toute transition t franchissable à partir d'un nœud nd étiqueté par M, on crée un nœud nd', étiqueté par M', où M' est le marquage obtenu en franchissant t à partir de M. Un arc étiqueté par t relie nd et nd'.

Le *graphe d'accessibilité* de PN est obtenu à partir de l'arbre d'accessibilité de PN en identifiant les nœuds ayant la même étiquette.

DÉFINITION 1.5 : Un réseau *termine* lorsque son graphe d'accessibilité est fini et sans circuit.

2. COMPOSITION/DÉCOMPOSITION

La démarche d'un modélisateur consiste généralement en la conception de modules représentés par de petits réseaux, puis en l'intégration de ces derniers au sein d'un plus gros réseau représentant le système entier. Dans le cas

général, la composition de modules se fait par fusion d'un ensemble commun soit de places soit de transitions. Nous nous proposons d'examiner la conservation des propriétés par ce type de composition/décomposition.

De telles études ont déjà fait l'objet de nombreux travaux ([1], [7], [10], [11]). Nous montrerons quelles sont les propriétés d'un module qui peuvent être transmises au réseau complet, et réciproquement, nous proposerons une nouvelle façon de prouver des propriétés par extraction d'un sous-réseau. Les algorithmes de décomposition permettent la vérification d'une propriété sur le réseau complet en étudiant un module. Ces démarches évitent la construction du graphe de couverture d'un réseau important, car il suffira de vérifier les propriétés sur des réseaux plus petits.

On peut analyser les schémas de réseaux algébriques à l'aide du réseau places/transitions sous-jacent appelé squelette. Ainsi cette étude sera applicable non seulement à l'analyse des réseaux de Petri, mais aussi à celle des réseaux algébriques correspondants.

2.1. Vérification de propriétés par composition/décomposition

Nous nous intéressons à deux sortes de composition/décomposition de réseaux places/transitions : la fusion sur un ensemble commun de transitions et la fusion sur un ensemble commun de places. Nous commençons donc par exposer ces deux techniques.

DÉFINITION 2.1.1 : Soit un réseau $R_0 = (P_0, T_0, \text{Pre}_0, \text{Post}_0, M_0)$. La *projection* d'une séquence x de R_0 sur un sous-ensemble de transitions T de T_0 est la plus grande séquence extraite de x contenant uniquement des transitions de T. Cette projection sera notée $\text{proj}_T(x)$.

Plus formellement, $\forall t \in T_0$, $\forall x \in T_0^*$, $\text{proj}_T(xt) = \text{proj}_T(x)\ \text{proj}_T(t)$, avec $\text{proj}_T(t) = t$ si $t \in T$, et $\text{proj}_T(t) = \lambda$ sinon.

2.1.1. Fusion de transitions

Nous commençons par définir la structure que doivent avoir deux réseaux à composer par fusion de transitions, ainsi que le résultat de cette opération.

DÉFINITION 2.1.1.1 (fusion de transitions) : Soient $R_i = (P_i, T_i \cup T_c, \text{Pre}_i, \text{Post}_i, M_{0_i})$, $i = 1, 2$, deux réseaux places/transitions. L'ensemble T_1 (resp. T_2) contient les transitions propres à R_1 (resp. R_2). L'ensemble T_c contient les transitions communes aux deux réseaux. $(P_1 \cup T_1) \cap (P_2 \cup T_2) = \varnothing$.

Le réseau obtenu en composant R_1 et R_2 par fusion de leurs transitions communes est $R_0 = (P_1 \cup P_2, T_1 \cup T_2 \cup T_c, \text{Pre}_0, \text{Post}_0, M_0)$ tel que :

(i) $\forall t_c \in T_c$, $\forall p_1 \in P_1$, $\text{Pre}_0(p_1, t_c) = \text{Pre}_1(p_1, t_c)$, $\text{Post}_0(p_1, t_c) = \text{Post}_1(p_1, t_c)$
(dans R_0, t_c est reliée aux places de P_1 de la même manière que dans R_1) ;

(ii) $\forall t_c \in T_c$, $\forall p_2 \in P_2$, $\text{Pre}_0(p_2, t_c) = \text{Pre}_2(p_2, t_c)$, $\text{Post}_0(p_2, t_c) = \text{Post}_2(p_2, t_c)$
(dans R_0, t_c est reliée aux places de P_2 de la même manière que dans R_2) ;

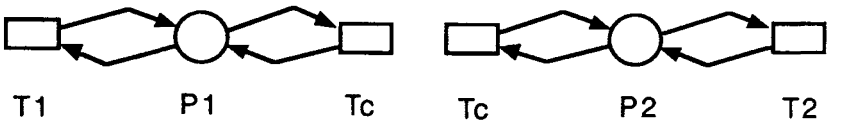
(iii) $\forall t_1 \in T_1$, $\forall p_1 \in P_1$, $\forall p_2 \in P_2$, $\text{Pre}_0(p_1, t_1) = \text{Pre}_1(p_1, t_1)$ et $\text{Pre}_0(p_2, t_1) = 0$,
$\text{Post}_0(p_1, t_1) = \text{Post}_1(p_1, t_1)$ et $\text{Post}_0(p_2, t_1) = 0$
(les transitions de T_1 ne sont reliées qu'aux places de P_1, de la même manière que dans R_1) ;

(iv) $\forall t_2 \in T_2$, $\forall p_1 \in P_1$, $\forall p_2 \in P_2$, $\text{Pre}_0(p_2, t_2) = \text{Pre}_2(p_2, t_2)$ et $\text{Pre}_0(p_1, t_2) = 0$,
$\text{Post}_0(p_2, t_2) = \text{Post}_2(p_2, t_2)$ et $\text{Post}_0(p_1, t_2) = 0$
(les transitions de T_2 ne sont reliées qu'aux places de P_2, de la même manière que dans R_2) ;

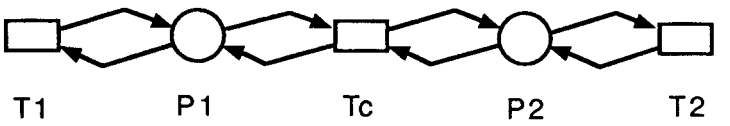
(v) $\forall p_1 \in P_1$, $M_0(p_1) = M_{0_1}(p_1)$
(le marquage initial des places de P_1 est inchangé) ;

(vi) $\forall p_2 \in P_2$, $M_0(p_2) = M_{0_2}(p_2)$
(le marquage initial des places de P_2 est inchangé).

Nous considérons donc des réseaux R_1 et R_2 tels que :

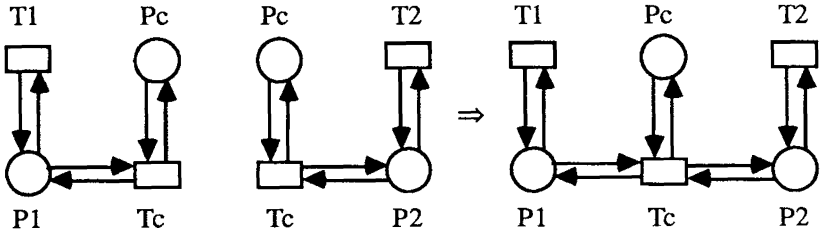


Nous obtenons, par fusion des transitions communes à R_1 et R_2, le réseau R_0 suivant :

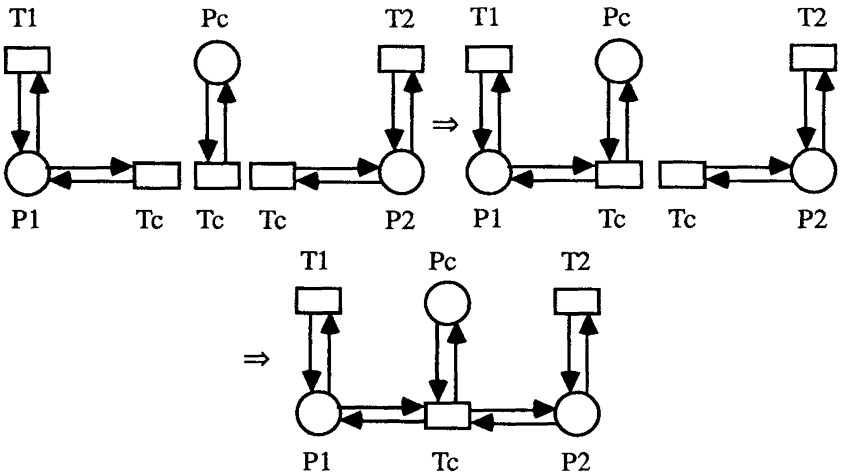


Cette approche correspond à celle de [11].

Notons que la composition de réseaux via un medium de communication ([10]) est entièrement prise en compte dans nos travaux. L'étude de Souissi concerne la composition de deux réseaux R_1 et R_2 ayant chacun des ensembles de places propres (P_1 et P_2), de transitions propres (T_1 et T_2), et contenant un sous réseau formé d'un ensemble de transitions communes T_c et d'un ensemble de place communes P_c ne pouvant communiquer qu'avec les transitions de T_c, selon le schéma suivant :



Dans notre cas, les places communes n'appartiennent qu'à un seul des sous-réseaux. Nous pouvons toujours nous ramener à notre schéma de composition, pour étudier la composition via un medium de communication :



Certaines propriétés du réseau composé R_0 peuvent être déduites directement des propriétés des réseaux R_1 et R_2, sans construction du graphe de couverture du réseau complet.

Notation : Tout marquage M de R_0 peut être décomposé en $M=(M_1, M_2)$ où M_1 est le marquage des places de P_1, et M_2 celui des places de P_2.

La proposition suivante est signalée dans [1], mais nous présentons ici une preuve détaillée.

PROPOSITION 2.1.1.2 : *Soit x une séquence de franchissements de R_0. La projection de x sur $T_1 \cup T_c$ est une séquence de franchissements de R_1. La projection de x sur $T_2 \cup T_c$ est une séquence de franchissements de R_2.*

Preuve: Soit x une séquence de franchissements de R_0. On décompose x en $x = x_1 x'_1 t_1 \ldots x_n x'_n t_n$ où les x_i sont des séquences de franchissements de T_1, les x'_i des séquences de franchissements de T_2 et les t_i des transitions de T_c. Les réseaux R_1 et R_2 jouant des rôles symétriques, nous prouvons la proposition pour le réseau R_1 uniquement. Nous effectuons une preuve par induction sur la longueur des séquences de franchissement. Soit dans $R_0 : (M_1, M'_1)[x_1 x'_1 t_1 > (M_2, M'_2)$. Dans R_1, x_1 est franchissable car le franchissement de x_1 dépend uniquement des places de P_1. Seul le marquage de ces places est modifié. On a donc $(M_1, M'_1)[x_1 > (m_1, M'_1)$. De même pour x'_1 qui ne fait appel qu'aux places de P_2. Donc $(m_1, M'_1)[x'_1 > (m_1, m'_1)$. Par conséquent, la projection de $x_1 x'_1$ sur $T_1 \cup T_c$ est x_1 et $M_1[\text{proj}_{T_1 \cup T_c}(x_1 x'_1) > m_1$. Dans R_0, le marquage (m_1, m'_1) permet le franchissement de t_1. Donc les places de P_1 en particulier ont un marquage suffisamment grand pour ce faire. C'est pourquoi t_c est franchissable à partir de m_1 dans $R_1 : (m_1, m'_1)[t_1 > (M_2, M'_2)$ dans R_0 et $m_1[t_1 > M_2$ dans R_1. ■

Nous pouvons déduire des propriétés du réseau composé à partir de celles des sous-réseaux :

PROPOSITION 2.1.1.3 : (i) *une transition t est non quasi-vivante dans R_1 ou dans $R_2 \Rightarrow t$ est non quasi-vivante dans R_0 ;*

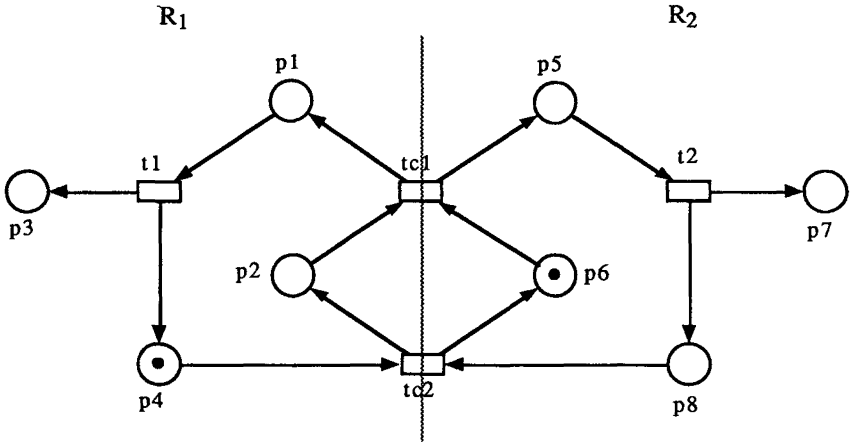
(ii) *une place p est k-bornée dans R_1 ou dans $R_2 \Rightarrow p$ est k-bornée dans R_0 ;*

(iii) *M_1 est un marquage mort dans R_1 et M_2 est un marquage mort dans $R_2 \Rightarrow (M_1, M_2)$ est un marquage mort dans R_0 ;*

(iv) *R_1 et R_2 terminent $\Rightarrow R_0$ termine.*

Preuve: Immédiat d'après la proposition 2.1.1.2. ■

Nous présentons un contre-exemple aux réciproques des propositions précédentes :



Le marquage initial de R_0 est mort alors que les réseaux R_1 et R_2 sont vivants (réciproques de (iii) et (iv)). Donc toutes les transitions sont non quasi-vivantes dans R_0, et elles sont toutes quasi-vivantes dans R_1 et R_2 (réciproque de (i)). Toutes les places sont bornées dans R_0, mais $p3$ n'est pas bornée dans R_1 et $p7$ n'est pas bornée dans R_2 (réciproque de (ii)).

PROPOSITION 2.1.1.4 : *On suppose que* $T_c = \{t_c\}$ (T_c *est un singleton*).

(i) R_0 *est vivant* $\Leftrightarrow R_1$ *et* R_2 *sont vivants ;*

(ii) (M_1, M_2) *est un marquage mort dans* $R_0 \Rightarrow M_1$ *est un marquage mort dans* R_1 *ou* M_2 *est un marquage mort dans* R_2 *;*

(iii) R_0 *termine* $\Rightarrow R_1$ *termine ou* R_2 *termine.*

Preuve: (ii) : soit (M_1, M_2) un marquage mort dans R_0. Soit t_1 une transition de T_1. Les entrées de t_1 étant uniquement des places de P_1, M_1 ne permet pas de franchir t_1 dans R_1. De même, soit t_2 une transition de T_2. Les entrées de t_2 étant uniquement des places de P_2, M_2 ne permet pas de franchir t_2 dans R_2. Reste à examiner le cas de la transition t_c. Supposons que t_c soit franchissable dans R_1 et dans R_2. Alors le marquage (M_1, M_2) permet de franchir t_c dans R_0. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse (M_1, M_2) marquage mort dans R_0. On en déduit que le marquage M_1 dans R_1 ou le marquage M_2 dans R_2 ne permet pas de franchir t_c. Dans tous les cas possibles, les transitions ne peuvent être franchies, donc M_1 est mort dans R_1 ou M_2 est mort dans R_2.

(iii) : supposons que R_1 et R_2 ne terminent pas. Nous nous intéressons à la transition t_c qui est la seule à pouvoir amener à un marquage mort dans R_0 mais pas dans R_1 ni dans R_2. Deux cas se présentent : soit il existe k tel

que t_c est k-bornée dans l'un des deux sous-réseaux, soit elle n'est bornée dans aucun des deux sous-réseaux.

Supposons, pour l'instant, que t_c est k-bornée dans un des sous-réseaux, par exemple R_1 (elle peut être franchie au maximum k fois), et que dans R_2 elle n'est pas $(k-1)$-bornée (on peut la franchir au moins k fois). Les réseaux R_1 et R_2 jouant des rôles symétriques, la restriction à ce cas suffit pour prouver la proposition sur toutes les possibilités de « t_c est bornée dans l'un des deux sous-réseaux ». R_1 ne terminant pas, il existe donc une séquence infinie de franchissements de R_1 qui s'écrit sous la forme $M_{0_1}[s>M_1[y^*>$ où s contient au plus k occurrences de t_c et y est une séquence répétitive de T_1. On peut écrire $s=x_1\,t_c\ldots t_c\,x_n\,t_c\,x_{n+1}$ où $n\leqq k$. Dans R_2, t_c n'étant pas k-bornée, il existe des x_i', séquences de franchissements de T_2 telles que: $M_{0_2}[x_1'\,t_c\ldots t_c\,x_n'\,t_c>M_2$. Ainsi, on obtient dans R_0 la séquence de franchissements: $(M_{0_1}, M_{0_2})[x_1\,x_1'\,t_c\ldots t_c\,x_n\,x_n'\,t_c>(M_1, M_2)$; de plus, on a $(M_1, M_2)[y^*>$. Donc $(M_{0_1}, M_{0_2})[s>$, d'où R_0 ne termine pas.

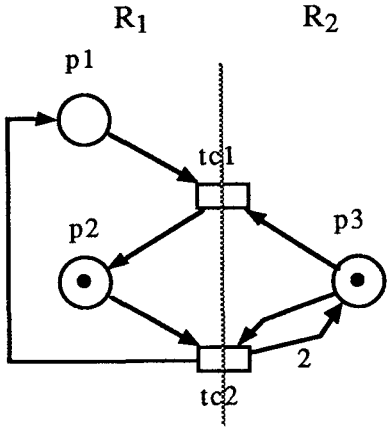
Supposons que t_c n'est bornée dans aucun des deux sous-réseaux. Autrement dit, il existe une séquence infinie contenant t_c dans R_1, $M_{0_1}[x_1\,t_c\,x_2\,t_c\ldots>$, et une séquence infinie dans R_2, $M_{0_2}[x_1'\,t_c\,x_2'\,t_c\ldots>$. La séquence $M_0[x_1\,x_1'\,t_c\,x_2\,x_2'\,t_c\ldots>$ est une séquence infinie de R_0. Nous avons donc montré que si R_1 et R_2 ne terminent pas, alors R_0 ne termine pas.

(i), $\Leftarrow$: la démonstration utilise le même principe que celle de (iii).

(i), $\Rightarrow$: supposons que R_0 soit vivant. Nous allons effectuer une preuve par induction sur les séquences de franchissement. Nous montrons que si x_1 est une séquence de franchissements dans R_1, alors il existe une séquence de franchissements x dans R_0 telle que $\mathrm{proj}_{T_1 \cup T_c}(x)=x_1$. Soit x_1 une séquence de franchissements de R_1 ne contenant pas t_c. La séquence x_1 est franchissable dans R_0. Soit x_1' une séquence de franchissements de R_1 contenant t_c. La transition t_c étant vivante dans R_0, il existe une séquence de franchissements x_2 de R_2 telle que $M_{0_2}[x_2\,t_c>$ et dans R_0, $M_0[x_1'\,x_2\,t_c>$. On en déduit que toute séquence de franchissements de R_1 est la projection d'une séquence de franchissements de R_0. De même, toute séquence de franchissements de R_2 est la projection d'une séquence de franchissements de R_0. Donc R_1 et R_2 sont vivants. ■

Le contre-exemple précédent permet de montrer que (ii), (iii) et la réciproque de (i) sont fausses, dans le cas où T_c n'est pas un singleton. On a $T_c=\{tc1, tc2\}$, le réseau R_0 est mort alors que les réseaux R_1 et R_2 sont vivants.

Nous présentons un second contre-exemple qui permet de montrer que si T_c n'est pas un singleton, l'implication de (i) est fausse.



Les réseaux R_0 et R_1 sont vivants, mais pas R_2.

Le graphe de couverture d'un réseau places/transitions permet de décider de ces propriétés, ou de leur négation. Puisque l'on ne peut pas toujours déduire les propriétés du réseau composé de celles des réseaux de départ, nous nous intéresserons plus loin à la construction du graphe de couverture de R_0 par composition des graphes de couverture de R_1 et R_2.

2.1.2. Fusion de places

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à la fusion de deux réseaux ayant en commun un ensemble de places. La définition de la composition par fusion de places communes est similaire à celle de la fusion de transitions.

DÉFINITION 2.1.2.1 (fusion de places) : Soient

$$R_i = (P_i \cup P_c,\ T_i,\ \mathrm{Pre}_i,\ \mathrm{Post}_i,\ M_{0_i}), \qquad i = 1, 2,$$

deux réseaux places/transitions tels que $\forall p_c \in P_c$, $M_{0_1}(p_c) = M_{0_2}(p_c)$ (les places de P_c ont le même marquage initial dans R_1 et dans R_2).

L'ensemble P_1 (resp. P_2) contient les places propres à R_1 (resp. R_2). L'ensemble P_c contient les places communes aux deux réseaux. $(P_1 \cup T_1) \cap (P_2 \cup T_2) = \varnothing$.

Le réseau obtenu en composant R_1 et R_2 par fusion de leurs places communes est $R_0 = (P_1 \cup P_2 \cup P_c,\ T_1 \cup T_2,\ \mathrm{Pre}_0,\ \mathrm{Post}_0,\ M_0)$ tel que :

(i) $\forall p_c \in P_c$, $\forall t_1 \in T_1$, $\mathrm{Pre}_0(p_c, t_1) = \mathrm{Pre}_1(p_c, t_1)$, $\mathrm{Post}_0(p_c, t_1) = \mathrm{Post}_1(p_c, t_1)$

(dans R_0, p_c est reliée aux transitions de T_1 de la même manière que dans R_1) ;

(ii) $\forall p_c \in P_c$, $\forall t_2 \in T_2$, $\mathrm{Pre}_0(p_c, t_2) = \mathrm{Pre}_2(p_c, t_2)$, $\mathrm{Post}_0(p_c, t_2) = \mathrm{Post}_2(p_c, t_2)$

(dans R_0, p_c est reliée aux transitions de T_2 de la même manière que dans R_2);

(iii) $\forall p_1 \in P_1$, $\forall t_1 \in T_1$, $\forall t_2 \in T_2$, $\mathrm{Pre}_0(p_1, t_1) = \mathrm{Pre}_1(p_1, t_1)$ et $\mathrm{Pre}_0(p_1, t_2) = 0$, $\mathrm{Post}_0(p_1, t_1) = \mathrm{Post}_1(p_1, t_1)$ et $\mathrm{Post}_0(p_1, t_2) = 0$

(les places de P_1 ne sont reliées qu'aux transitions de T_1, de la même manière que dans R_1);

(iv) $\forall p_2 \in P_2$, $\forall t_1 \in T_1$, $\forall t_2 \in T_2$, $\mathrm{Pre}_0(p_2, t_2) = \mathrm{Pre}_2(p_2, t_2)$ et $\mathrm{Pre}_0(p_2, t_1) = 0$, $\mathrm{Post}_0(p_2, t_2) = \mathrm{Post}_2(p_2, t_2)$ et $\mathrm{Post}_0(p_2, t_1) = 0$

(les places de P_2 ne sont reliées qu'aux transitions de T_2, de la même manière que dans R_2);

(v) $\forall p_c \in P_c$, $M_0(p_c) = M_{0_1}(p_c) = M_{0_2}(p_c)$

(le marquage initial des places de P_c est inchangé);

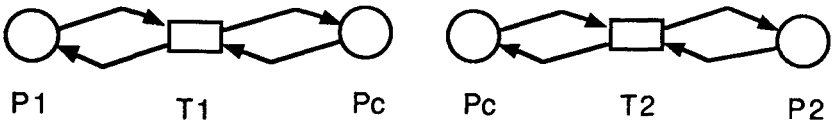
(vi) $\forall p_1 \in P_1$, $M_0(p_1) = M_{0_1}(p_1)$

(le marquage initial des places de P_1 est inchangé);

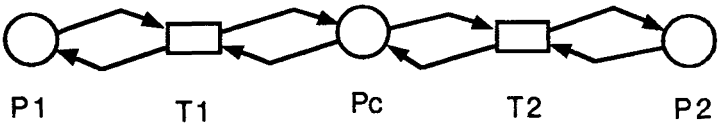
(vii) $\forall p_2 \in P_2$, $M_0(p_2) = M_{0_2}(p_2)$

(le marquage initial des places de P_2 est inchangé).

Nous considérons donc des réseaux à composer R_1 et R_2 tels que:



Nous obtenons, par fusion des places communes de R_1 et R_2, le réseau R_0 suivant:



Notation: Tout marquage M de R_0 peut être décomposé en $M = (M_1, M_c, M_2)$ où M_1 est le marquage des places de P_1, et M_2 celui des places de P_2 et M_c celui des places de P_c.

PROPOSITION 2.1.2.2 : *Toute séquence de franchissements de R_1 est une séquence de franchissements de R_0. Toute séquence de franchissements de R_2 est une séquence de franchissements de R_0.*

Preuve: R_1 et R_2 jouant des rôles symétriques, nous prouvons la proposition seulement pour R_1. Soit x_1 une séquence de franchissements de R_1 telle

que $(M_{0_1}, M_{0_c})[x_1 > (M_1, M_c)$. Dans R_0, on a le marquage initial $(M_{0_1}, M_{0_c}, M_{0_2})$ où M_{0_1} est le marquage des places de P_1, M_{0_2} celui des places de P_2 et M_{0_c} le marquage des places de P_c. Les transitions de T_1 n'étant pas reliées aux places de P_2, elles peuvent être franchies quel que soit le marquage M_{0_2}. D'où, dans R_0 : $(M_{0_1}, M_{0_c}, M_{0_2})[x_1 > (M_1, M_c, M_{0_2})$. ■

Les propriétés que l'on peut déduire directement, sans construction du graphe de couverture du réseau composé sont les suivantes :

PROPOSITION 2.1.2.3 : (i) *une place p est non bornée dans* R_1 *ou dans* $R_2 \Rightarrow p$ *est non bornée dans* R_0 ;

(ii) *une transition t est quasi-vivante dans* R_1 *ou dans* $R_2 \Rightarrow t$ *est quasi-vivante dans* R_0 ;

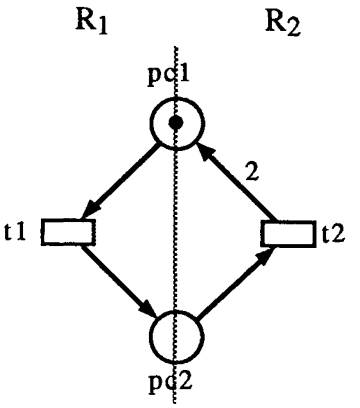
(iii) (M_1, M_c) *est un marquage non mort dans* R_1 *ou* (M_2, M_c) *est un marquage non mort dans* $R_2 \Leftrightarrow (M_1, M_c, M_2)$ *est un marquage non mort dans* R_0 ;

(iv) R_1 *ou* R_2 *ne termine pas* $\Rightarrow R_0$ *ne termine pas.*

Preuve : (i), (ii), (iv) et (iii) $\Rightarrow$: immédiat d'aprés la proposition 2.1.2.2.

(iii) $\Leftarrow$: soit (M_1, M_c, M_2) un marquage non mort de R_0. Alors, il existe une transition $t_1 \in T_1$ ou $t_2 \in T_2$ franchissable dans R_0 à partir de (M_1, M_c, M_2). La transition t_1 a uniquement pour entrées des places de P_1 et de P_c ; la transition t_2 a uniquement pour entrées des places de P_2 et de P_c. Donc (M_1, M_c) est un marquage non mort dans R_1 ou (M_2, M_c) est un marquage non mort dans R_2. ■

Les réciproques des propositions (i), (ii) et (iv) sont fausses, comme on peut le constater en étudiant le contre-exemple suivant :



Les places *pc*1 et *pc*2 sont non bornées dans R_0, mais elles sont bornées dans R_1 et R_2 (réciproque de (i)). *t*2 est quasi-vivante dans R_0, mais pas

dans R_2 (réciproque de (ii)). Le réseau R_0 ne termine pas, mais R_1 et R_2 terminent (réciproque de (iv)).

De même que pour la fusion sur un ensemble commun de transitions, puisque l'on ne peut pas toujours déduire les propriétés du réseau composé de celles des réseaux de départ, nous nous intéresserons plus loin à la construction du graphe de couverture de R_0 par composition des graphes de couverture de R_1 et R_2.

2.1.3. Algorithmes de vérification de propriétés par décomposition

Les deux paragraphes précédents établissaient que la composition de réseaux conserve un certain nombre de propriétés. Dans ce paragraphe, nous nous intéressons à une démarche inverse qui consiste à extraire d'un réseau un sous-réseau conservant les propriétés du réseau initial. L'intérêt de cette démarche est évident : plus un réseau est gros, plus son analyse est complexe. Il est donc judicieux d'analyser un réseau réduit.

L'extraction d'un sous-réseau conduit à une perte d'informations. Le sous-réseau extrait ne peut donc pas être représentatif de toutes les propriétés du réseau initial. Le sous-réseau qui nous intéresse devra donc dépendre de la propriété à vérifier. Dans notre étude, nous nous sommes intéressés à trois propriétés d'un réseau : les places bornées, les places non bornées et les transitions quasi-vivantes. Pour chacune de ces trois propriétés, nous avons conçu un algorithme qui extrait d'un réseau donné un sous-réseau vérifant cette propriété. La construction effectuée par les algorithmes de vérification du caractère borné ou non borné des places ne dépend pas du marquage initial. Il est alors nécessaire, lorsque le sous-réseau est construit, de l'analyser à l'aide d'une méthode classique, pour pouvoir valider la propriété.

2.1.3.1. *Vérification du caractère borné d'une place*

Nous avons vu, dans la proposition 2.1.1.4, que la composition par fusion de transitions conserve le caractère borné des places. On part d'un réseau R_0 dans lequel on désire montrer qu'une place p_0 est bornée. Nous allons extraire un réseau R_1 contenant p_0 et tel que p_0 soit bornée dans R_1. Le complémentaire de R_1 dans R_0 est R_2 tel que la composition des réseaux R_1 et R_2 par fusion de transitions soit R_0. Si la construction échoue, c'est que l'on est pas arrivé à déterminer un sous-réseau R dans lequel la place p_0 est bornée. L'algorithme que nous présentons permet de déterminer un tel sous-réseau.

Le sous-réseau R_1 cherché est entièrement caractérisé par son ensemble de places : il ne communique avec le reste qu'au travers de transitions, donc

toutes les transitions connectées aux places dans le réseau complet sont des transitions de R_1.

Soit

$$R_0 = (P_0, T_0, \mathrm{Pre}_0, \mathrm{Post}_0, M_0).$$

Le réseau $R_1 = (P_1, T_1, \mathrm{Pre}_1, \mathrm{Post}_1, M_{0_1})$ est défini par son ensemble de places P_1 et par $T_1 = \{ t \in T_0 \mid \exists p \in P_1 \; tq \; \mathrm{Pre}_0(p, t) \neq 0$ ou $\mathrm{Post}_0(p, t) \neq 0 \}$, $\forall p \in P_1$, $\forall t \in T_1$: $M_{0_1}(p) = M_0(p)$, $\mathrm{Pre}_1(p, t) = \mathrm{Pre}_0(p, t)$ et $\mathrm{Post}_1(p, t) = \mathrm{Post}_0(p, t)$. Le sous-réseau complémentaire R_2 est alors entièrement défini :

$$R_2 = (P_2, T_2, \mathrm{Pre}_2, \mathrm{Post}_2, M_{0_2}) \quad \text{où} \quad P_2 = P_0 \setminus P_1,$$

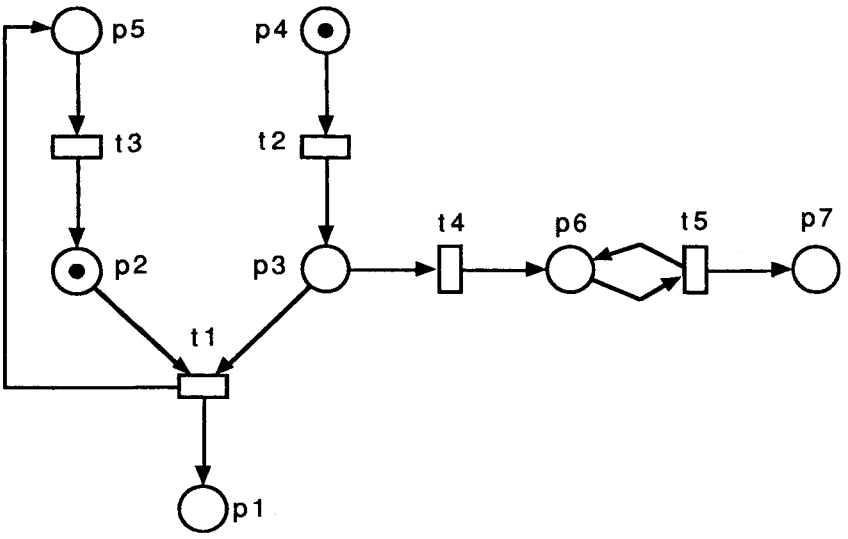
$T_2 = \{ t \in T_0 \mid \exists p \in P_2 \; tq \; \mathrm{Pre}_0(p, t) \neq 0$ ou $\mathrm{Post}_0(p, t) \neq 0 \}$, $\forall p \in P_2$, $\forall t \in T_2$: $M_{0_2}(p) = M_0(p)$, $\mathrm{Pre}_2(p, t) = \mathrm{Pre}_0(p, t)$ et $\mathrm{Post}_2(p, t) = \mathrm{Post}_0(p, t)$.

On cherche s'il existe des transitions susceptibles de mettre un nombre arbitrairement grand de jetons dans la place dont on souhaite prouver le caractère borné. Une telle transition appartient à une séquence répétitive croissante. L'algorithme consiste à vérifier que les sous-réseaux situés en amont de la place étudiée sont bornés. Pour chaque transition en entrée de la place, on cherche à vérifier si la transition a elle-même une place bornée en entrée. On note, dans l'algorithme, P_R l'ensemble des places et T_R l'ensemble des transitions en cours d'examen. P_I dénote l'ensemble des places déjà examinées et pouvant faire partie d'un sous-réseau borné (résultat intermédiaire). Pour chaque sous-réseau ainsi isolé, on examine le caractère borné de la place à étudier en utilisant des méthodes classiques. La construction d'un sous-réseau s'arrête lorsque l'on a un cycle ou lorsqu'il n'y a plus de transition en amont. Il est ainsi aisé de vérifier le caractère borné d'une place.

```
fonction place_bornée(P_R, T_R, pb, p, var : P_I) : booléen ;
/*à l'appel initial, les paramètres sont : ∅, ∅, p_0, p_0, ∅*/
début
  entrées : = { t ∉ T_R telle que Post(p, t) > Pre(p, t) } ;   /*transitions ajoutant des jetons à p*/
  P_R : = P_R + { p } ;          /*ensemble des places utilisées dans les appels non dépilés*/
  T_R : = T_R + { t telle que Pre(p, t) ≠ 0 et Pre(p, t) ≧ Post(p, t) } ;
  /*on ajoute à T_R les transitions ayant p comme entrée et ne créant pas de jeton dans p*/
  si entrées = ∅
    alors /*on a défini un sous-réseau (P_R + P_I, T_R)*/
          si pb est bornée dans le sous-réseau (P_R + P_I, T_R)/*la place à laquelle l'on s'intéresse*/
            alors /* on a un ensemble de places potentiellement bornées*/
                  P_I : = P_R + P_I ;
                  retour (vrai) ;
```

```
            sinon (retour(faux);          /*les places choisies ne conviennent pas*/
          fsi
    sinon P'_I := ∅;
          pour toute transition t∈entrées faire      /*toutes les transitions ajoutant des jetons
          à p*/              résultat := faux;
            pour toute place p' telle que Pre(p', t)≠0 faire /*on choisit une place en entrée de
            t*/
              résultat := place_bornée(P_R, T_R+{t}, pb,p', P'_I);      /*la vérification est
              récusirve*/
              si résultat
                alors sortie pour;      /*on sort de la boucle, car on a trouvé une place qui
                convient*/
              fsi
            fpour
            si non résultat
              alors retour(faux);       /*toutes les places en entrée de la transition sont non
              bornées*/
            fsi
          fpour
          P_I := P'_I;
          retour(vrai);                 /*on a pu bloquer toutes les transitions en entrée de p*/
  fsi
fin
```

Exemple 2.1.3.1 : Nous présentons un exemple afin de détailler le fonctionnement de l'algorithme. Nous désirons vérifier que la place $p1$ est bornée. Pour cela, nous appelons la fonction place_bornée, avec comme paramètres $P_R = \varnothing$, $T_R = \varnothing$, $pb = p1$, $p = p1$, $P_I = \varnothing$.



Nous explicitons les appels de procédures et la modification des variables :

appel de place bornée($\emptyset$, $\emptyset$, $p1$, $p1$, $\emptyset$)
  entrées = $\{t1\}$
  $P_R = \{p1\}$
  $T_R = \emptyset$
  $P'_I = \emptyset$
  choix de t dans entrées $t = t1$
    résultat = faux
    choix de p' $p' = p2$
      appel de place bornée($[p1\}$, $\{t1\}$, $p1$, $p2$, $\emptyset$)
        entrées = $\{t3\}$
        $P_R = \{p1, p2\}$
        $T_R = \{t1\}$
        $P'_I = \emptyset$
        choix de t dans entrées $t = t3$
          résultat = faux
          choix de p' $p' = p5$
            appel de place bornée($\{p1, p2\}$, $\{t1, t3\}$, $p1$, $p5$, $\emptyset$)
              entrées = $\emptyset$
              $P_R = \{p1, p2, p5\}$
              $T_R = \{t1, t3\}$
              $p1$ n'est pas bornée dans $(P_R + P_I, T_R)$
            retour résultat = faux, $P'_I = \emptyset$
          finchoix
        finchoix
      retour résultat = faux, $P'_I = \emptyset$
    choix de p' $p' = p3$
      appel de place bornée($\{p1\}$, $\{t1\}$, $p1$, $p3$, $\emptyset$)
        entrées = $\{t2\}$
        $P_R = \{p1, p3\}$
        $T_R = \{t1, t4\}$
        $P'_I = \emptyset$
        choix de t dans entrées $t = t2$
          résultat = faux
          choix de p' $p' = p4$
            appel de place bornée($\{p1, p3\}$, $\{t1, t4, t2\}$,$p1$, $p4$, $\emptyset$)
              entrées = $\emptyset$
              $P_R = \{p1, p3, p4\}$
              $T_R = \{t1, t4, t2\}$
              $p1$ est bornée dans $(P_R + P_I, T_R)$
              $P_I = \{p1, p3, p4\}$

retour résultat = vrai, $P'_I = \{p1, p3, p4\}$

sortie pour

finchoix

$P_I = \{p1, p3, p4\}$

retour résultat = vrai, $P'_I = \{p1, p3, p4\}$

sortie pour

finchoix

$P_I = \{p1, p3, p4\}$

retour résultat = vrai, $P'_I = \{p1, p3, p4\}$

On a donc trouvé un sous-réseau convenable : il est composé des places $p1$, $p3$ et $p4$ et des transitions qui leur sont connectées, c'est-à-dire $t1$, $t2$ et $t4$.

2.1.3.2. *Vérification du caractère non borné d'une place*

La démarche est duale de la précédente (propriété 2.1.2.3). On part d'un réseau R_0 dans lequel on désire montrer qu'une place p_0 est non bornée. Nous allons extraire un réseau R_1 contenant p_0 et tel que p_0 soit non bornée dans R_1. Le complémentaire de R_1 dans R_0 est R_2 tel que la composition des réseaux R_1 et R_2 par fusion de places soit R_0. Si la construction échoue, c'est que l'on n'est pas arrivé à déterminer un sous-réseau R dans lequel la place p_0 est non bornée.

Le sous-réseau R_1 cherché est entièrement caractérisé par son ensemble de transitions : il ne communique avec le reste qu'au travers de places, donc toutes les places connectées aux transitions dans le réseau complet sont des places de R_1.

Soit

$$R_0 = (P_0, T_0, \mathrm{Pre}_0, \mathrm{Post}_0, M_0).$$

Le réseau $R_1 = (P_1, T_1, \mathrm{Pre}_1, \mathrm{Post}_1, M_{0_1})$ est défini par son ensemble de transitions T_1 et par $P_1 = \{p \in P_0 \mid \exists\, t \in T_1 \; tq \; \mathrm{Pre}_0(p, t) \neq 0 \text{ ou } \mathrm{Post}_0(p, t) \neq 0\}$, $\forall p \in P_1$, $\forall t \in T_1$:

$$M_{0_1}(p) = M_0(p), \mathrm{Pre}_1(p, t) = \mathrm{Pre}_0(p, t) \quad \text{et} \quad \mathrm{Post}_1(p, t) = \mathrm{Post}_0(p, t).$$

Le sous-réseau complémentaire R_2 est alors entièrement défini :

$$R_2 = (P_2, T_2, \mathrm{Pre}_2, \mathrm{Post}_2, M_{0_2}) \quad \text{où} \quad T_2 = T_0 \setminus T_1,$$

$P_2 = \{p \in P_0 \mid \exists\, t \in T_2 \; tq \; \mathrm{Pre}_0(p, t) \neq 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Post}_0(p, t) \neq 0\}$, $\forall p \in P_2$, $\forall t \in T_2 : M_{0_2}(p) = M_0(p)$, $\mathrm{Pre}_2(p, t) = \mathrm{Pre}_0(p, t)$ et $\mathrm{Post}_2(p, t) = \mathrm{Post}_0(p, t)$.

L'idée de l'algorithme est la suivante : le sous-réseau R doit contenir au moins la place p_0, dont on veut montrer le caractère non borné. On regarde s'il existe une transition indéfiniment franchissable en entrée de la place dont on veut prouver le caractère non borné, puis on réapplique récursivement l'algorithme sur toutes les places en entrée de la transition choisie. Si on trouve en entrée de la place considérée une transition qui ne consomme pas les jetons de ses entrées, cette transition sera toujours franchissable et alors la place sera non bornée. Le détail de l'algorithme est similaire à celui utilisé pour vérifier le caractère borné d'une place.

Ici, nous divisons l'algorithme en deux parties : nous cherchons les propriétés d'une place en effectuant de la fusion sur les places communes. La place à laquelle nous nous intéressons appartient forcément au sous-réseau. La *fonction appelante* est donc une étape de *place-non-bornée* dans laquelle seule cette place est traitée.

```
fonction appelante :
début
  résultat := faux ;
  transitions := { t telle que Post(p0, t) > Pre(p0, t) } ;/* ensemble des transitions ajoutant des
  jetons à p0 */
  tant que résultat = faux et que transitions ≠ ∅ faire
    sélectionner t dans transitions ;          /*on choisit une transition qui crée des jetons
    dans p0 */
    transitions := transitions − { t } ;
    T := ∅ ;
    résultat := place_non_bornée({ p0 }, ∅, p0, t, T } ;
  ftq
  retour (résultat) ;    /*s'il existe une transition telle que résultat = vrai, la place p0 est poten-
                         tiellement non bornée. Le sous-réseau cherché est formé des transitions
                         de T et de toutes les places qui y sont connectées*/
fin
fonction place_non_bornée(P_R, T_R, pb, t, var : T_I) : booléen ;
début
  entrées := { p ∉ P_R telle que Pre(p, t) ≠ 0 et Pre(p, t) ≧ Post(p, t) et Post(p, .) ≠ 0 } ;
  /*places en entrée de t, dont le contenu ne croît pas avec le franchissement de t, et qui sont
  sortie d'une transition*/
  P_R := P_R + { p telle que Post(p, t) > Pre(p, t) ou (Pre(p, t) ≠ 0 et Post(p, .) = 0) } ;
  /*places en sortie de t, dans lesquelles t crée des jetons
  ou places en entrée de t, dans lesquelles aucun jeton ne peut être créé*/
  T_R := T_R + { t } ;                    /*transitions utilisées dans des appels non dépilés*/
  si entrées = ∅
    alors /*on a défini un sous-réseau (P_R, T_R + T_I)*/
```

```
        si pb est non bornée dans (P_R, T_R + T_I)        /* la place à laquelle l'on s'intéresse*/
          alors /*on a un résultat intermédiaire*/
                T_I := T_R + T_I ;
                retour(vrai) ;
          sinon retour(faux) ;              /*les transitions choisies ne conviennent pas*/
        fsi
    sinon T'_I := ∅ ;
        pour toute place p ∈ entrées faire  /*toutes les places susceptibles de limiter le fran-
        chissement de t*/
          résultat := faux ;
          pour toute transition t' telle que Post(p, t') ≠ 0 faire/*choix d'une transition en
          entrée de p*/
            résultat := place_non_bornée(P_R + {p}, T_R, pb, t', T'_I) ;
            si résultat
              alors sortie pour ;       /*sortie de la boucle, car on a trouvé une transition qui
              convient*/
            fsi
          fpour
          si non résultat
            alors retour(faux) ;        /*la place ne peut pas devenir non bornée*/
          fsi
        fpour
        T_I := T'_I ;
        retour(vrai) ;        /*il est possible de rendre infini le marquage de toutes les places en
        entrée de t*/
  fsi
fin
```

Exemple 2.1.3.2 : Nous reprenons le réseau de l'exemple 2.1.3.1. Nous désirons vérifier que la place $p7$ n'est pas bornée.

```
fonction appelante
  résultat = faux
  transitions = {t5}
  choix de t dans transitions t = t5
    transitions = ∅
    T = ∅
    appel de place non bornée({p7}, ∅, p7, t5, ∅)
      entrées = {p6}
      P_R = {p7}
      T_R = {t5}
      T'_I = ∅
```

choix de p dans entrées $p = p6$
  résultat = faux
  choix de t' $t' = t5$
    appel de place non bornée($\{p7, p6\}$, $\{t5\}$, $p7$, $t5$, $\varnothing$)
      entrées = $\varnothing$
      $P_R = \{p7, p6\}$
      $T_R = \{t5\}$
      $p7$ est bornée dans $(P_R, T_R + T_I)$
    retour résultat = faux, $T'_I = \varnothing$
  choix de t' $t' = t4$
    appel de place non bornée($\{p7, p6\}$, $\{t5\}$, $p7$, $t4$, $\varnothing$)
      entrées = $\{p3\}$
      $P_R = \{p7, p6\}$
      $T_R = \{t5, t4\}$
      $T'_I = \varnothing$
      choix de p dans entrées $p = p3$
        résultat = faux
        choix de t' $t' = t2$
          appel de place non bornée($\{p7, p6, p3\}$, $\{t5, t4\}$, $p7$, $t2$, $\varnothing$)
            entrées = $\varnothing$
            $P_R = \{p7, p6, p3, p4\}$
            $T_R = \{t5, t4, t2\}$
            $p7$ n'est par bornée dans $(P_R, T_R + T_I)$
            $T_I = \{t5, t4, t2\}$
          retour résultat = vrai, $T'_I = \{t5, t4, t2\}$
        sortie pour
      finchoix
      $T_I = \{t5, t4, t2\}$
    retour résultat = vrai, $T'_I = \{t5, t4, t2\}$
  sortie pour
finchoix
$T_I = \{t5, t4, t2\}$
retour résultat = vrai, $T = \{t5, t4, t2\}$
finchoix
retour résultat = vrai, $T = \{t5, t4, t2\}$

On a donc trouvé un sous-réseau convenable : il est composé des transitions $t2$, $t4$ et $t5$ et des places qui leur sont connectées, c'est-à-dire $p3$, $p4$, $p6$ et $p7$.

2.1.3.3. *Vérification de la quasi-vivacité d'une transition*

Une transition non quasi-vivante peut représenter, dans les cas pratiques, une erreur de modélisation. Le problème de la quasi-vivacité d'une transition, comme celui des places non bornées, est lié à la fusion par places. Nous donnons l'algorithme suivant pour déterminer un sous-réseau dans lequel une transition donnée est quasi-vivante.

Au départ, le sous-réseau conteint la transition dont on veut montrer la quasi-vivacité, et les places qui y sont connectées. Les places qui ont le nombre de jetons suffisant pour franchir la transition ne posent pas de problème. On essaie donc de voir s'il est possible de créer des jetons dans les autres places en franchissant une de leurs transitions en entrée et les places qui y sont connectées. On continue récursivement.

```
fonction transition_quasi_vivante(P_R, T_R, tqv, t, var : T_I): booléen;
/*à l'appel les paramètres sont : ∅, ∅, t_0, t_0, ∅*/
début
  entrées := {p ∉ P_R telle que Pre(, t) > M_0(p)}; /*places en entrée de t, pouvant empêcher le
  franchissement*/
  P_R := P_R + {p telle que (Pre(p, t) ≠ 0 et Pre(p, t) ≦ M_0(p)) ou Post(p, t) ≠ 0};
  /*on ajoute à P_R les places connectées à t mais n'empêchant pas son franchissement*/
  T_R := T_R + {t};                    /*transitions utilisées dans les appels non dépilés*/
  si entrées = ∅
    alors /*on a défini un sous-réseau (P_R, T_R + T_I)*/
          si tqv est quasi-vivante dans (P_R, T_R + T_I)  /*la transition à laquelle l'on s'intéresse*/
            alors /*on a un résultat intermédiaire*/
                  T_I := T_R + T_I;
                  retour(vrai);
          sinon retour(faux);          /*les transitions choisies ne conviennent pas*/
          fsi
    sinon T'_I := ∅;
          pour toute place p ∈ entrées faire  /*on examine les places ne permettant pas le
          franchissement de t*/
            résultat := faux;
            pour toute transition t' telle que Post(p, t') ≠ 0 faire/*choix d'une transition en
            entrée de p*/
              résultat := transition_quasi_vivante (P_R + {p}, T_R, tqv, t', T'_I);
              si résultat
                alors sortie pour;     /*sortie de la boucle, car on a trouvé une transition qui
                convient*/
              fsi
```

```
            fpour
            si non résultat
              alors retour (faux);      /*la place ne permet pas de franchir t*/
            fsi
          fpour
          T_I := T'_I;
          retour (vrai);                    /*la transition t est quasi-vivante*/
  fsi
fin
```

L'algorithme est similaire à celui permettant de vérifier le caractère non borné d'une place. Les places pouvant poser problème sont celles dont le marquage initial ne permet pas de franchir la transition que l'on examine.

Remarque: Lorsque l'on veut vérifier une propriété donnée, on étudie un sous-réseau. Il peut aussi permettre de montrer des propriétés sur d'autres places ou transitions.

Exemple 2.1.3.3: Nous reprenons le réseau de l'exemple 2.1.3.1. Nous désirons vérifier que la transition $t1$ est quasi-vivante.

```
appel de transition quasi vivante (∅, ∅, t1, t1, ∅)
  entrées = {p3}
  P_R = {p1, p2, p5}
  T_R = {t1}
  T'_I = ∅
  choix de p dans entrées p = p3
    résultat = faux
    choix de t' t' = t2
      appel de transition quasi vivante ({p1, p2, p5, p3}, {t1}, t1, t2, ∅)
        entrées = ∅
        P_R = {p1, p2, p5, p3, p4}
        T_R = {t1, t2}
        t1 est quasi-vivante dans (P_R, T_R + T_I)
        T_I = {t1, t2}
      retour résultat = vrai, T'_I = {t1, t2}
    sortie pour
  finchoix
  T_I = {t1, t2}
retour résultat = vrai, T'_I = {t1, t2}
```

On a donc trouvé un sous-réseau convenable : il est composé des transitions $t1$ et $t2$ et des places qui leur sont connectées, c'est-à-dire $p1$, $p2$, $p3$, $p4$ et $p5$.

2.2. Extension des propriétés de la composition aux réseaux algébriques

Rappelons tout d'abord la définition d'un réseau algébrique.

DÉFINITION 2.2.1 [5] : Une *spécification de types abstraits algébriques* est un triplet SPEC = (SO, OP, EQ) où : SO est un ensemble de noms de domaines, OP est un ensemble de noms d'opérations, EQ est un ensemble d'équations sur (SO, OP).

DÉFINITION 2.2.2 [5] : Un *schéma de réseau algébrique* est un n-uplet $N = (\text{SPEC}, X, P, T, \text{Pre}, \text{Post}, \text{eqns}, \text{sort})$ où :

(i) SPEC = (SO, OP, EQ) est une spécification de types abstraits algébriques ;

(ii) X est une famille de variables typées dans SO ;

(iii) P et T sont les ensembles de places et de transitions ;

(iv) Pre et Post sont les fonctions de pré et post-conditions, qui à chaque couple (place, transition) associent un terme de la spécification, à variables dans X ;

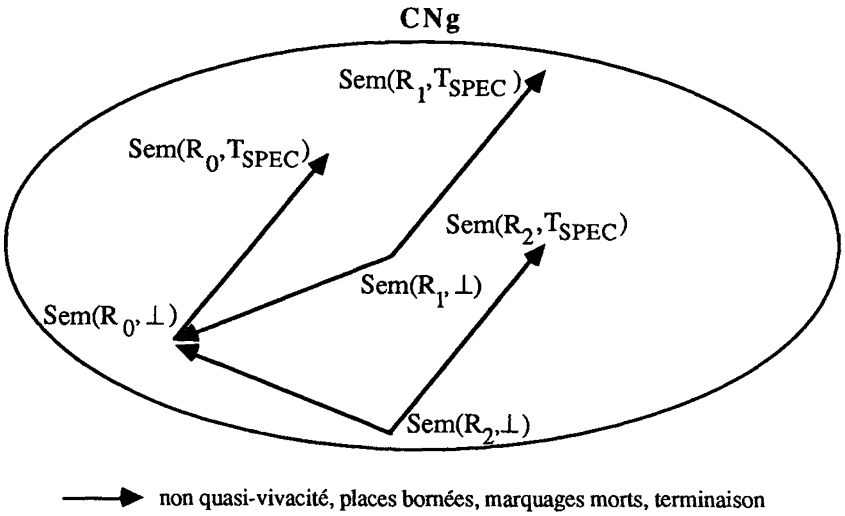
(v) eqns est une fonction qui associe à chaque transition t une équation dont les variables sont dans $\text{Pre}(., t)$;

(vi) sort : $P \to \text{SO}$ associe un type à chaque place.

DÉFINITION 2.2.3 [5] : Un *réseau algébrique* est un couple (N, A), où N est un schéma de réseau algébrique et A une SPEC-algèbre.

Un réseau algébrique est donc un réseau de Petri dans lequel les jetons transportent une valeur (terme d'une spécification de types abstraits algébriques). Le franchissement d'une transition est conditionné par des équations sur la spécification algébrique, et modifie les valeurs des jetons en fonction de la valuation des arcs.

On peut analyser un schéma de réseaux algébriques, noté $\text{Sem}(R, T_{\text{SPEC}})$, à partir d'un modèle plus simple, à savoir un réseau places/transitions appelé squelette, noté $\text{Sem}(R, \perp)$, ([5], [12]). Les propriétés de non quasi-vivacité d'une transition, place bornée, marquage mort et terminaison, si elles sont vraies pour le squelette, le sont aussi pour le réseau algébrique. On peut donc schématiser l'héritage des propriétés comme suit, avec R_0 composé de R_1 et de R_2 par fusion de transitions :



Lorsque l'on veut étudier une propriété d'un réseau algébrique R_0, on le décompose en sous-réseaux $R_1, \ldots, R_k$, qui n'ont en commun que des transitions. Si le squelette d'un de ces réseaux vérifie la propriété à laquelle on s'intéresse, alors le réseau algébrique R_0 la vérifie aussi. La décomposition doit être effectuée judicieusement par rapport à la propriété que l'on veut vérifier. Si l'on n'arrive pas à prouver la propriété sur les squelettes des réseaux $R_1, \ldots, R_k$, on compose leurs graphes de couverture grâce aux algorithmes que nous exposerons dans la section 4.1, de manière à obtenir le graphe de couverture du squelette de R_0, puis on essaie de valider la propriété à l'aide de ce graphe.

2.3. Un exemple : le canal général

Nous nous intéressons maintenant à l'exemple du canal général, qui représente un schéma relativement complexe de producteurs/consommateurs [8]. Le réseau algébrique (*fig.* 2) peut être analysé à partir de son squelette (*fig.* 3).

Nous allons montrer, par décomposition, que les places p1, p2, p3, p4, p5, p6, p7, p8, p9, nbfileval, nbDepos, nbPrise et Per sont bornées dans le squelette et par conséquent dans le réseau algébrique, tandis que les places repp, repc, int, Depos, Prise et Fileval sont non bornées dans le squelette (on ne peut donc pas conclure quant à leur caractère borné dans le réseau algébrique).

Les figures 4, 5, 6 et 7 montrent des décompositions avec transitions communes. Elles permettent donc de prouver que certaines places sont bornées. Les figures 8, 9, 10 et 11 montrent des décompositions avec places communes, permettant de déduire le caractère non borné d'autres places. Nous avons essayé d'obtenir les sous-réseaux les plus petits possibles permettant d'établir les propriétés désirées.

Nous présentons des décompositions avec transitions communes. La figure 4, qui représente quatre sous-réseaux, montre que les places p1, p2, p8, p9, nbfileval et nbDepos sont bornées. Dans la figure 5, la place nbPrise est bornée, de même que la place Per dans la figure 6, les places p3, p4, p5, p6 et p7 dans la figure 7.

Maintenant, nous examinons des sous-réseaux obtenus par décompositions avec des places communes. La figure 8 permet d'établir que les places repp, int et Depos ne sont pas bornées. La figure 9 nous montre en plus que la place Prise n'est pas bornée, de même que la place Fileval dans la figure 10 et la place repc dans la figure 11.

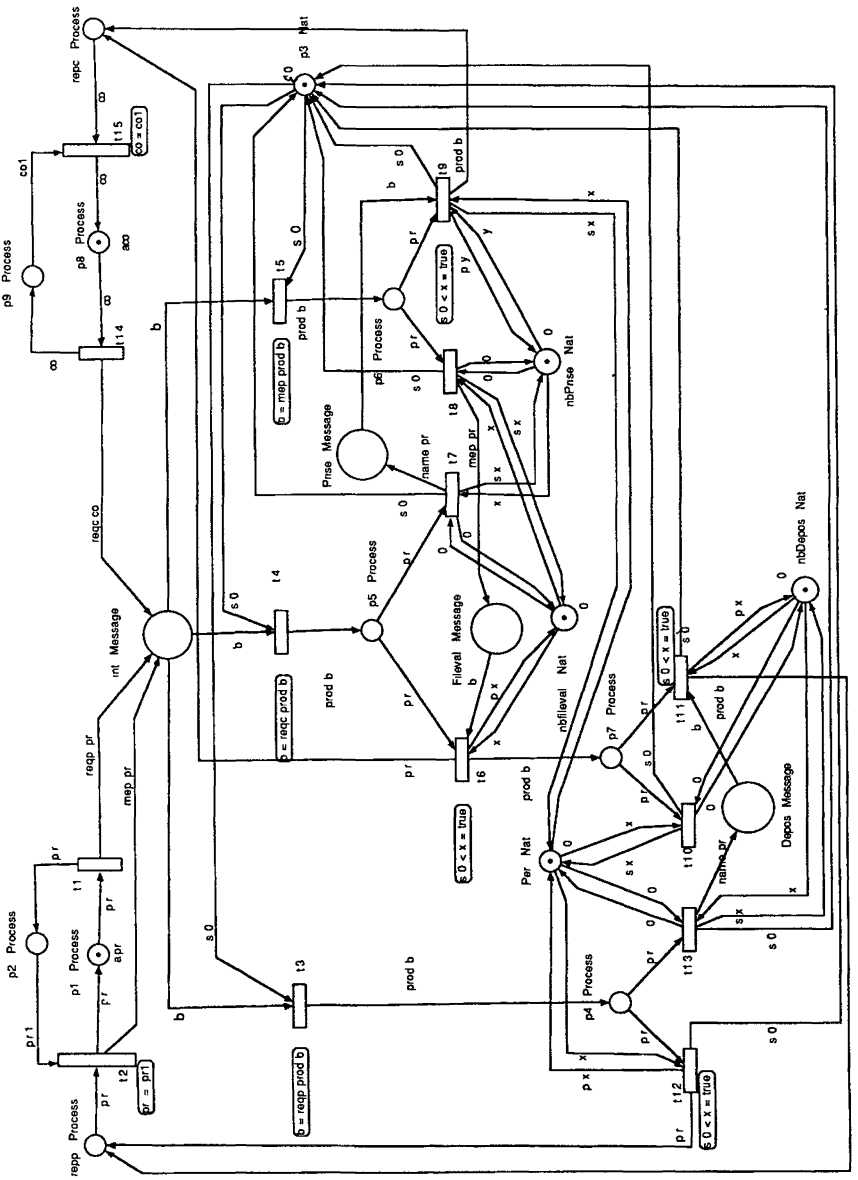

p2 Process
p1 Process
apr
t1
p r
p r1
t2
p r = p r1
reqp Process
reqp pr
mes pr
int Message
reqc co
p3 Nat
s 0
t15
co = co1
co1
p8 Process
acc
p9 Process
t14
t5
s 0
prod b
b = mep prod b
p6 Process
t18
nbPrse Nat
Prse Message
name pr
mep pr
t7
s x
t19
prod b
s 0 < x = true
t4
p5 Process
Fileval Message
b = reqc prod b
t16
nbfileval Nat
p7 Process
t11
nbDepos Nat
Depos Message
t10
Per Nat
t3
b = reqp prod b
p4 Process
t12
t13

Figure 2.

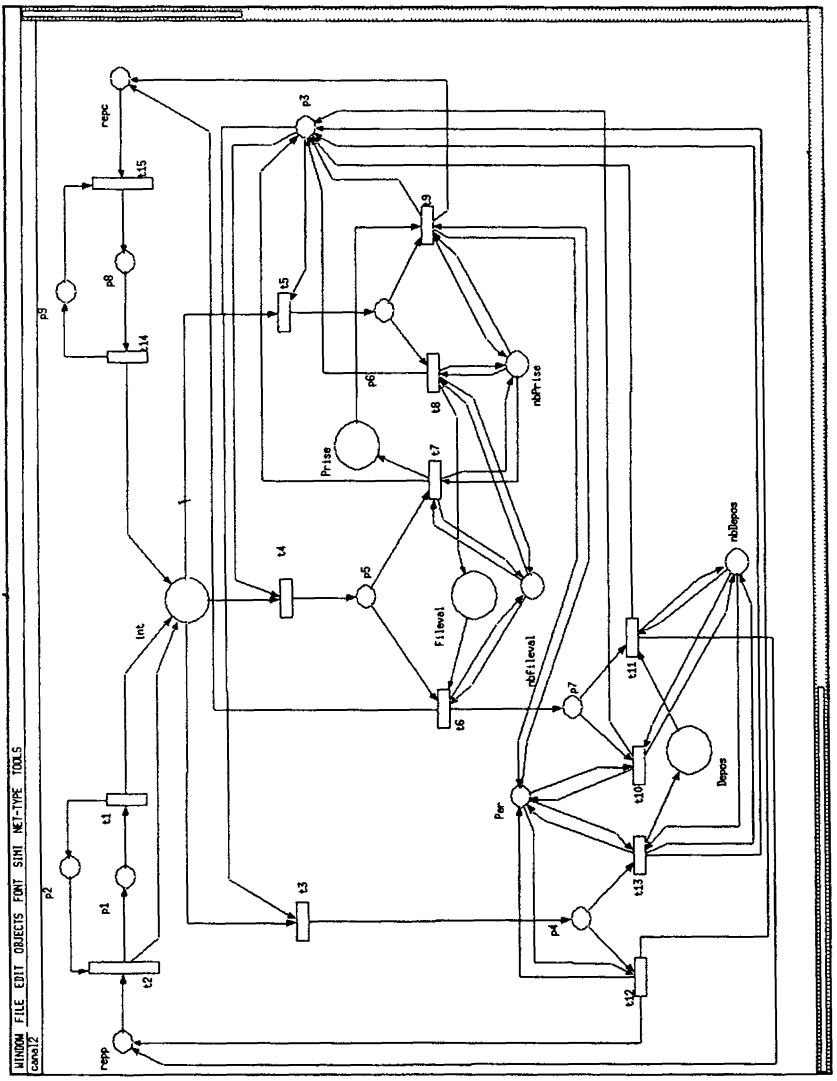

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIM NET-TYPE TOOLS
canal2
repc
p3
t15
p8
p9
t14
t5
t9
p6
t8
nbPrise
Prise
t7
t4
p5
Filevel
nbfilevel
t6
p7
t11
nbdepos
t10
Depos
Per
t13
p4
t12
t3
t1
p2
p1
t2
repp
int
1

Figure 3.

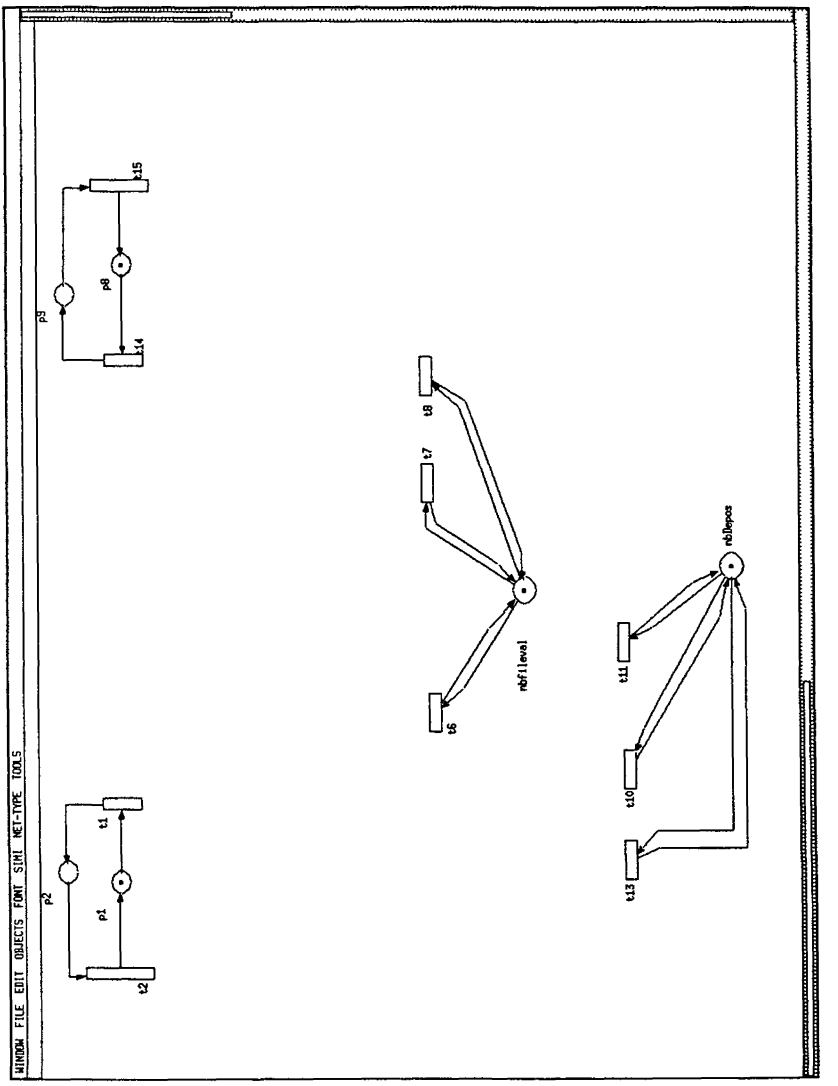

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI MET-TYPE TOOLS
t15
p8
t14
p3
t8
t7
t6
nbfillevel
nbdepos
t11
t10
t13
t1
p1
t2
p2

Figure 4.

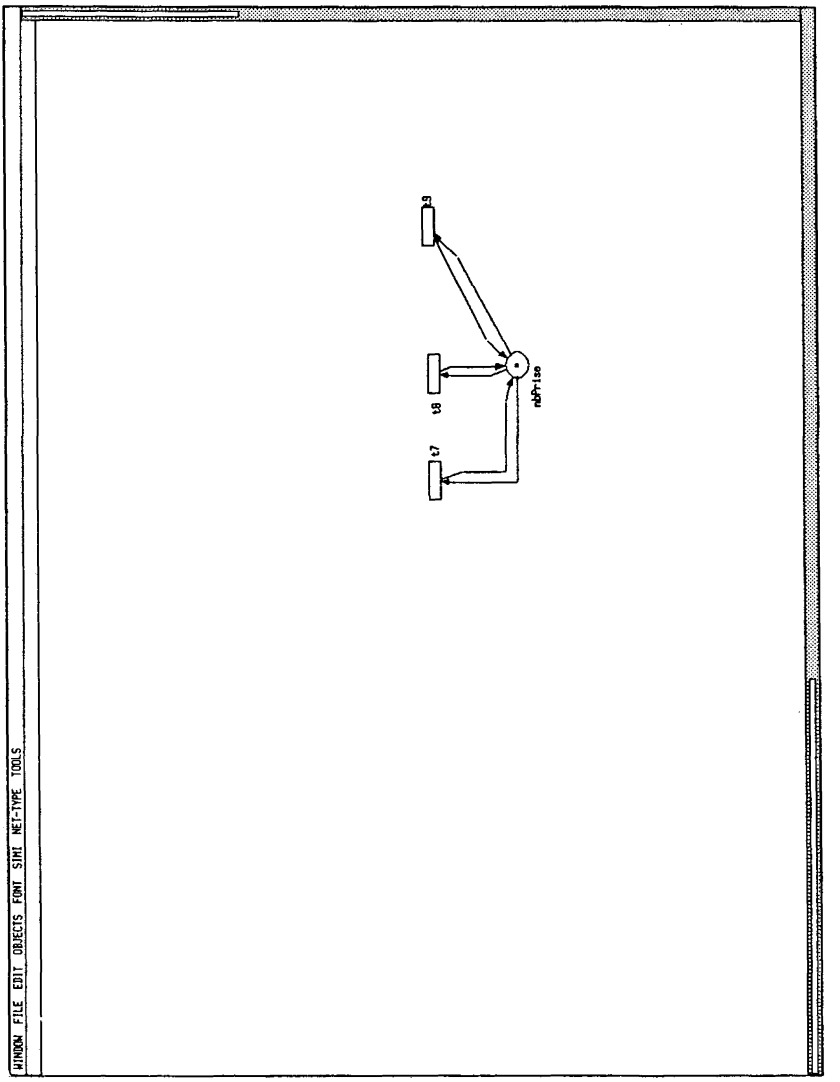

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI NET-TYPE TOOLS
t9
t8
t7
nbP-1s0

Figure 5.

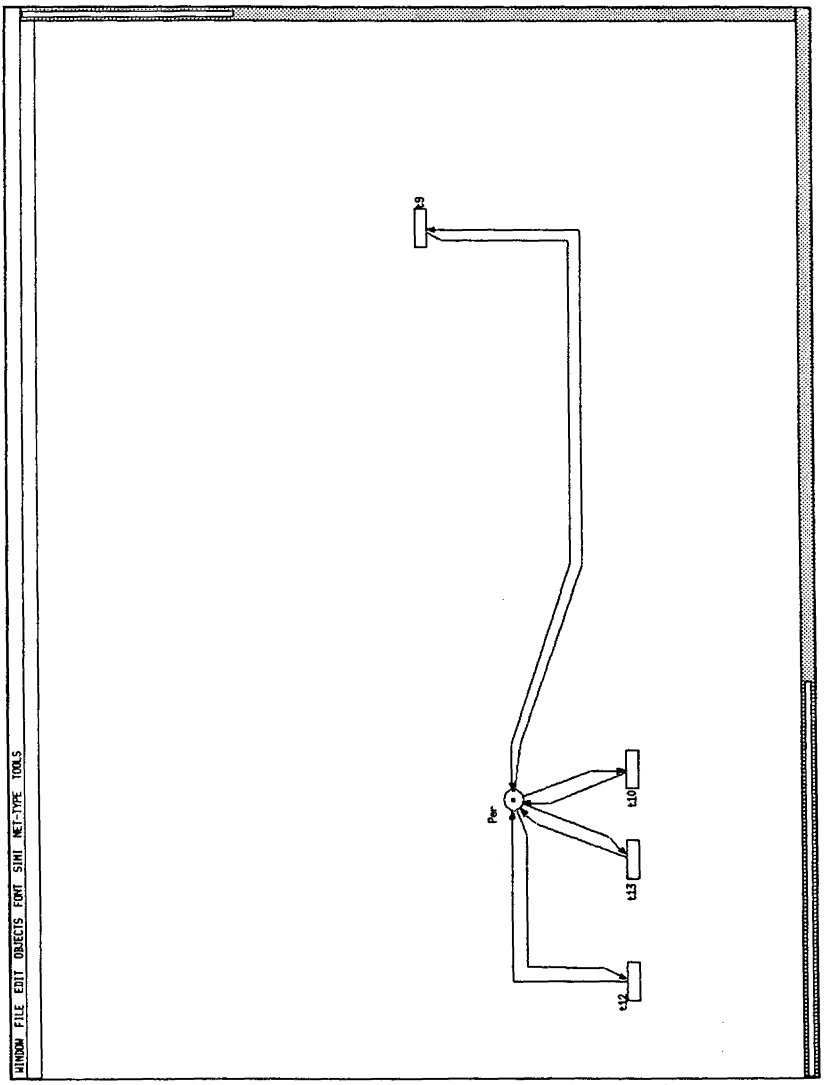

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI MET-TYPE TOOLS
t9
Per
t10
t13
t12

Figure 6.

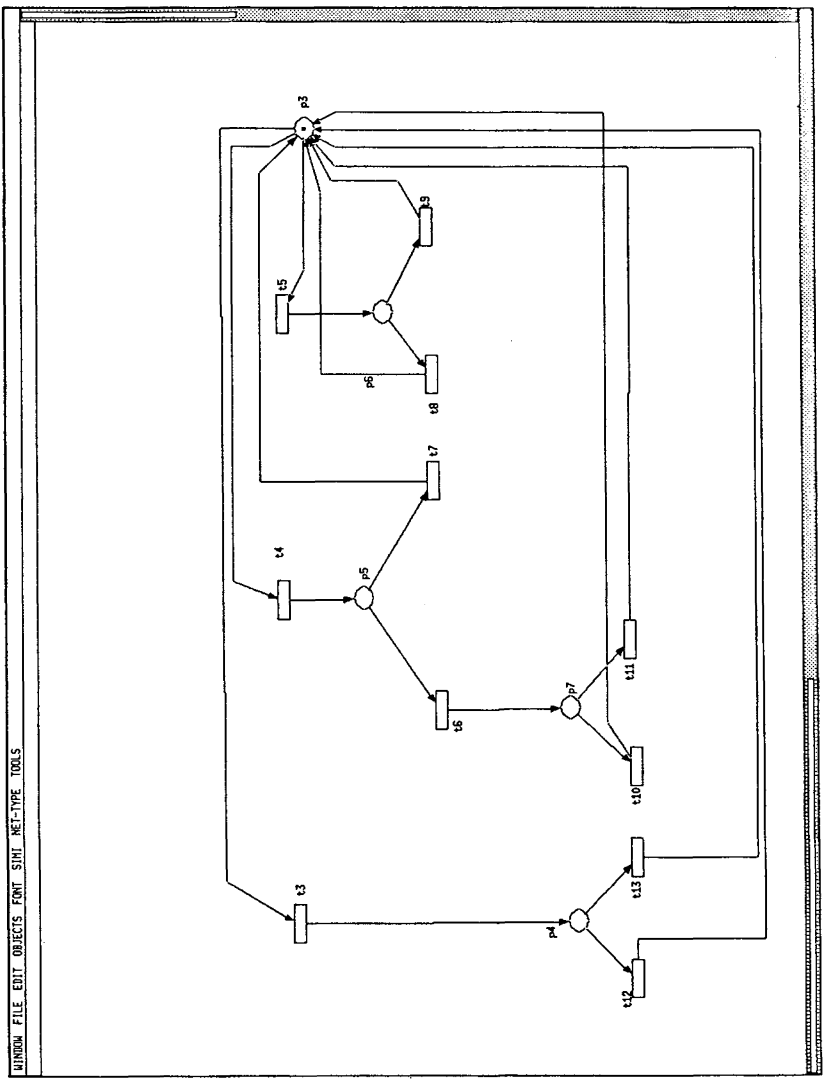

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI MET-TYPE TOOLS
p3
t9
t5
p6
t8
t7
t4
p5
t6
p7
t11
t10
t3
p4
t13
t12

Figure 7.

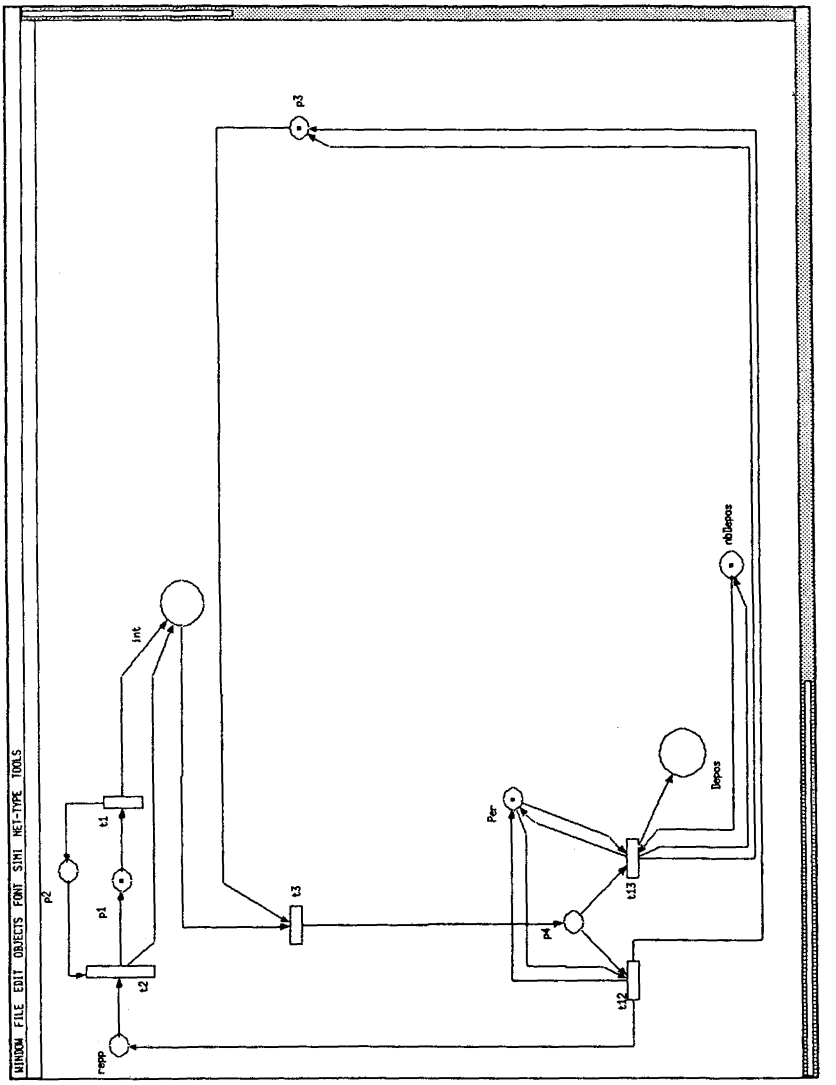

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI NET-TYPE TOOLS
p3
int
t1
p2
p1
t2
t3
Per
Depos
t13
P4
t12
rebepos
repp

Figure 8.

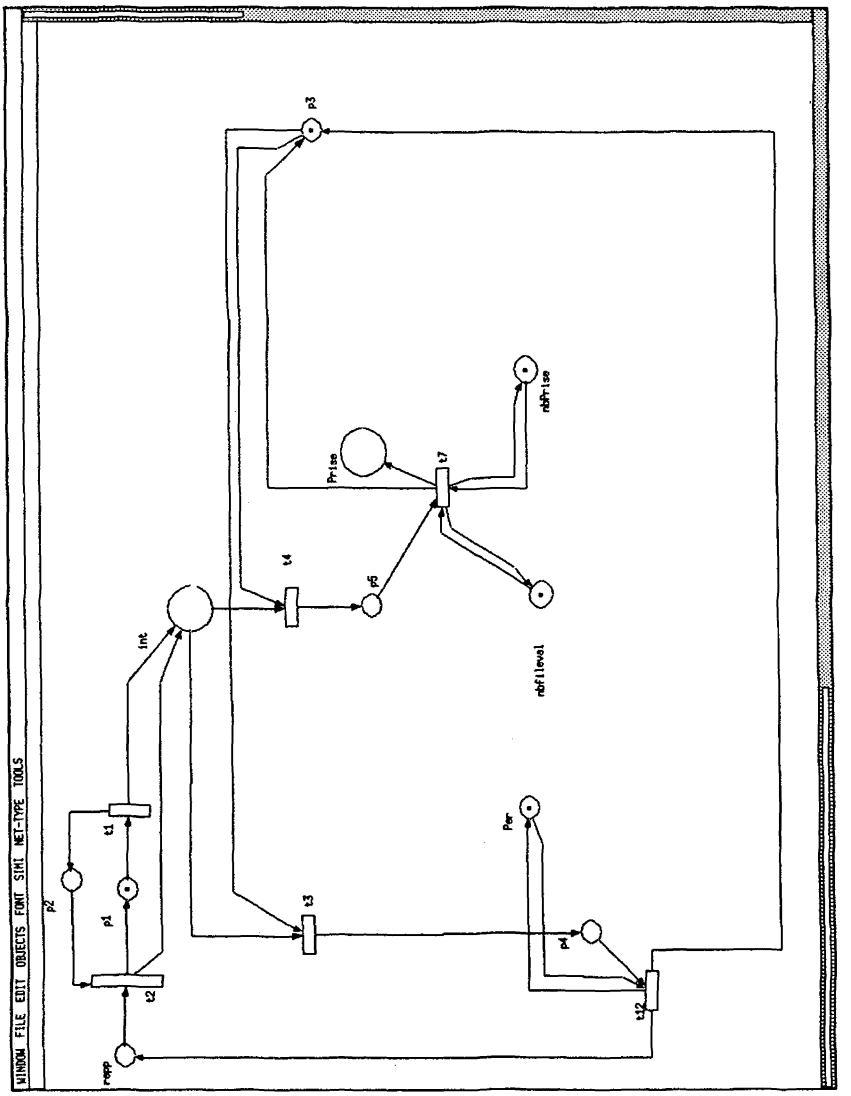

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI NET-TYPE TOOLS
p3
nbPrise
Prise
t7
t4
p5
int
nbfilevol
Per
t1
p2
p1
t3
p4
t2
t12
repp

Figure 9.

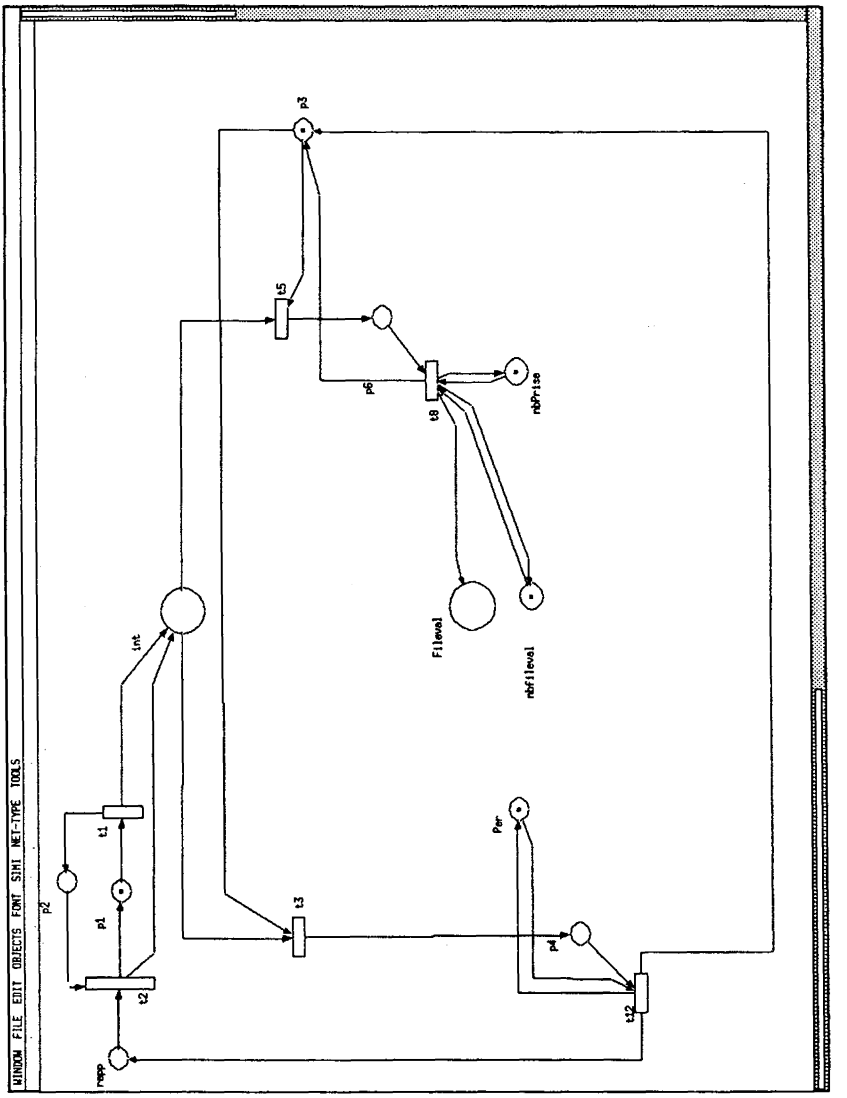

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMI NET-TYPE TOOLS
p3
t5
p6
t8
nbP-iso
Fileval
nbfileval
int
t1
p2
p1
t2
t3
Per
p4
t12
nopp

Figure 10.

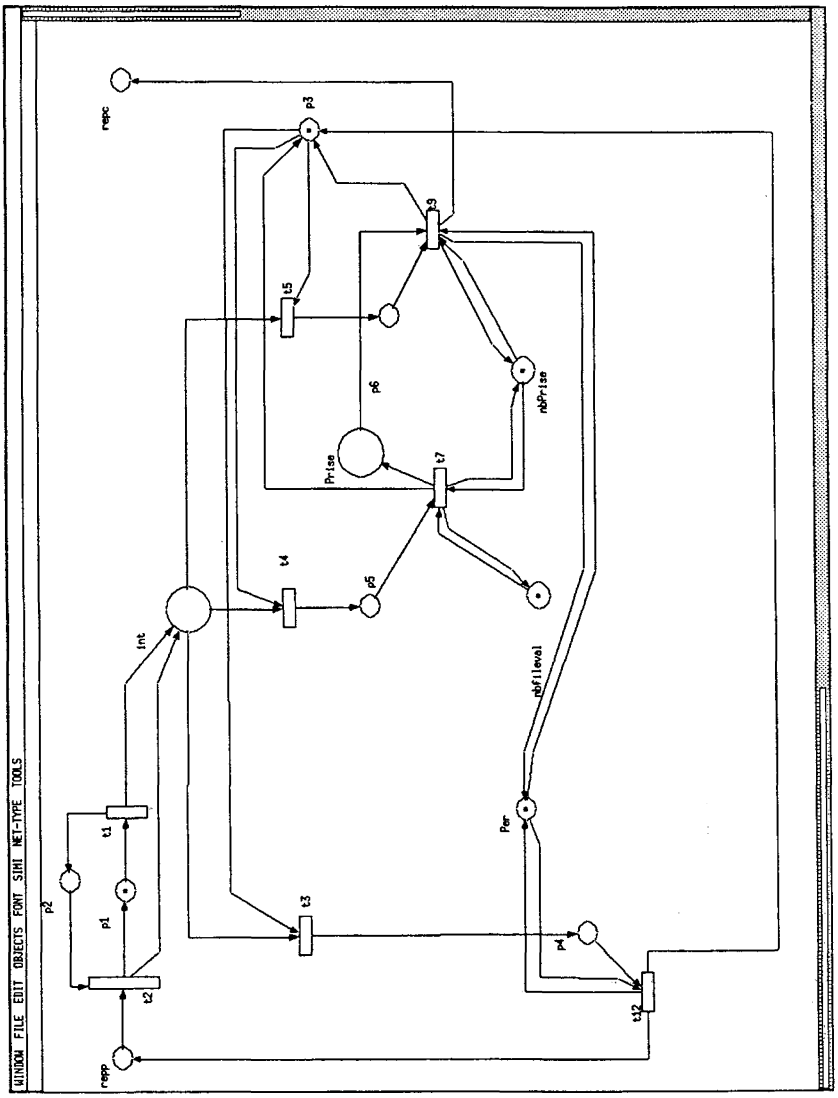

WINDOW FILE EDIT OBJECTS FONT SIMU NET-TYPE TOOLS
resc
p3
t9
t5
p6
nbPrise
Prise
t7
t4
p5
int
nbfilevol
Per
t1
p2
p1
t3
p4
t2
t12
resp

Figure 11.

3. LE GRAPHE DE COUVERTURE MINIMAL

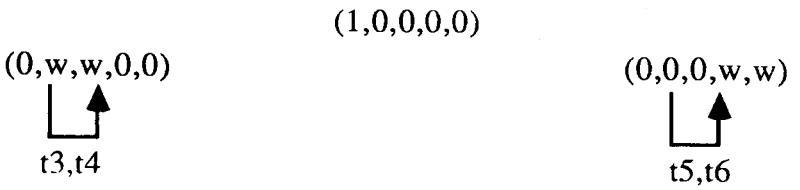
Il est possible de réduire la taille du graphe d'accessibilité (et aussi de le rendre fini) en construisant le graphe de couverture minimal, selon la procédure suivante :

```
nœuds_non_traités := { créer_nœud (r, M0) } ;          /*M0 est le marquage de la racine r*/
nœuds_traités := ∅ ;
tant que nœuds_non_traités ≠ ∅ ;
  sélectionner un nœud n ∈ nœuds_non_traités ;
  nœuds_non_traités := nœuds_non_traités-{ n } ;
  /*m est le marquage de n et m' celui de n'*/
  cas n : [1 . , 4] dans
    1 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m = m' :
      /*un nœud de même marquage existe déjà*/
      nœuds_traités := nœuds_traités + { n } ;
      sortie cas
    2 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m < m' :
      /*il existe un nœud de marquage plus grand*/
      supprimer_nœud(n) ;                    /*on supprime le nœud n*/
      sortie cas
    3 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m > m' :
      /*il existe un nœud n' de marquage plus petit*/
        m'' := m ;
      pour tout n' ancêtre de n tel que m > m' faire
        pour toutes les places p telles que m (p) > m' (p) faire
          m'' (p) := ω ;                     /*mise à ω des marquages plus petits*/
        fpour
      fpour
      nœuds_traités := nœuds_traités + { n } ;
      si n' est un ancêtre de n
        alors n' := premier nœud traité, sur le chemin de la racine à n tel que m > m' ;
              m' := m'' ;
              supprimer_arbre(n') ;
              /*le nœud n'ayant changé de marquage, il faut le traiter à nouveau*/
              nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + { n } ;
              nœuds_traités := nœuds_traités − { n' } ;
      fsi
      pour tout n' ∈ nœuds_traités tel que m'' > m' faire
        supprimer_arbre (n') ;
        supprimer_nœud(n') ;
        /*on supprime le nœud de marquage plus petit*/
      fpour
```

```
    4 : sinon :                    /*on calcule les fils du nœud n de marquage m*/
      pour toute transition t∈T telle que m[t>m' faire
        créer_nœud(n', m');
        nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'};
        créer_arc(n, n', t);                    /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
      fpour
      nœuds_traités := nœuds_traités + {n};
  fcas
ftq
identifier_nœuds_avec_même_étiquette;
pour tout arc(n, n', t), tel que n≠n' faire
  si non m[t>m'
    alors supprimer arc(n', n', t);
  fsi
fpour
```

L'algorithme fonctionne de la manière suivante : tant qu'il y a des nœuds non traités, un nœud n est sélectionné pour être traité. Le traitement d'un nœud n commence par un test sur n : s'il existe un nœud n' de n tel que $m' = m$ (cas 1) ou si m est un marquage mort, le nœud n est une feuille et l'on s'arrête. S'il existe un nœud n' tel que $m' > m$ (cas 2), alors, on enlève le nœud n et l'arc y aboutissant. S'il existe un nœud n' tel que $m' < m$ (cas 3), alors on enlève le sous-arbre de n', y compris la racine. On construit le marquage m'' tel que $m''=m(p)$ si $m(p)=m'(p)$ et $m''(p)=\omega$ si $m(p)>m'(p)$. Si, de plus, n' était un ancêtre de n, alors on garde n' que l'on étiquette avec m''. Sinon (cas 4), pour toutes les transitions t franchissables à partir de m, on construit le marquage m' obtenu à partir de m en franchissant t.

Exemple 3.1 : Le graphe de couverture minimal de *PNO* (exemple 1.3) est le suivant :



On remarque sur cet exemple que le graphe de couverture minimal n'est pas forcément connexe.

Nous utiliserons, dans la suite, les pré-graphes de couverture minimaux, qui sont construits de la même manière que les graphes de couverture

minimaux, mais dans lesquels la dernière étape consistant à supprimer des arcs inutiles n'est pas appliquée.

Les fonctions Pré et Post sont naturellement étendues de $P_x\ T^+$ vers $\mathbb{N}$ de la manière suivante: pour tout $x \in T^*$, $t \in T$, on pose

$$\text{Pré}(p, xt) = \text{Pré}(p, x) + \text{Pré}(p, t) \text{ et } \text{Post}(p, xt) = \text{Post}(p, x) + \text{Post}(p, t).$$

THÉORÈME 3.2 [6] : *Soit PN un réseau de Petri et GCM(PN) son graphe de couverture minimal.*

(i) *GCM(PN) est calculable, fini et unique ;*

(ii) *une place p est non bornée si et seulement s'il existe un marquage* $M \in GCM(PN)$ *tel que* $M(p) = \omega$;

(iii) *une transition t est quasi-vivante si et seulement s'il existe un marquage* $M \in GCM(PN)$ *tel que, pour toute place p,* $M(p) \geqq \text{Pre}(p, t)$;

(iv) *l'arbre d'accessibilité de PN est infini si et seulement s'il existe un circuit dans GCM(PN) ;*

(v) *l'ensemble des états accessibles de PN est infini si et seulement s'il existe au moins un symbole* ω *dans GCM(PN).*

Le point à remarquer est que l'ensemble des circuits élémentaires de *GCM(PN)* coïncide avec l'ensemble des circuits élémentaires du graphe de couverture de Karp et Miller.

COROLLAIRE 3.3 [6] : *Les quatre problèmes suivants sont tous décidables à l'aide du graphe de couverture minimal*:

(i) *la finitude de l'arbre d'accessibilité* ;

(ii) *la finitude de l'ensemble des marquages accessibles* ;

(iii) *le caractère borné des places* ;

(iv) *la quasi-vivacité des transitions.*

4. COMPOSITION DE GRAPHES DE COUVERTURE MINIMAUX

L'héritage direct de propriétés de sous-réseaux pour l'analyse d'un réseau composé ne permet pas toujours de décider des propriétés voulues. Par contre, nous savons que le graphe de couverture du réseau total permet de le faire. Nous nous intéresserons à l'étude des graphes de couverture minimaux [6], dans lequel les nœuds sont deux à deux incomparables. La composition des graphes de couverture minimaux des réseaux $R_1, \ldots, R_n$,

dont la composition est un réseau complet R, permet d'obtenir le graphe de couverture minimal du réseau R à moindre coût.

Dans cette section, nous définissons la composition de graphes de couverture minimaux. Les compositions que nous considérons étant des fusions sur un ensemble commun de places ou sur un ensemble commun de transitions, nous présentons deux algorithmes de composition des graphes de couverture minimaux.

4.1. Fusion de transitions

Nous construisons maintenant le graphe de couverture minimal d'un réseau composé R_0 à partir des réseaux R_1 et R_2 par fusion de transitions.

Rappelons qu'un marquage M de R_0 est composé de deux parties : un marquage M_1 correspondant aux places de P_1 et un marquage M_2 correspondant aux places de P_2.

La construction de $GCM0$, graphe de couverture minimal de R_0, à partir de $GCM1$ et $GCM2$, pré-graphes de couverture minimaux des réseaux R_1 et R_2, s'effectue à l'aide de l'algorithme suivant :

```
GCM1 := pré-graphe de couverture minimal de R1 ;
GCM2 := pré-graphe de couverture minimal de R2 ;
/*construction de GCM0 := graphe de couverture minimal de R0*/
nœuds_non_traités := { créer_nœud (r, M0) } ;
/*M0 = (M1, M2) est le marquage de la racine r*/
nœuds_traités := ∅ ;
tant que nœuds_non_traités ≠ ∅ ;
  sélectionner un nœud n ∈ nœuds_non_traités ;
  nœuds_non_traités := nœuds_non_traités − { n } ;
  /*m est le marquage de n et m' celui de n'*/
  cas n : [1 . . 4] dans
    1 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m = m' :
                        /* un nœud de même marquage existe déjà*/
        nœuds_traités := nœuds_traités + { n } ;
        sortie cas
    2 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m < m' :
                        /*il existe un nœud de marquage plus grand*/
        supprimer_nœud(n) ;                    /*on supprime le nœud n*/
        sortie cas
    3 : il existe un nœud n' ∈ nœuds_traités tel que m > m' :
          /*il existe un nœud n' de marquage plus petit*/
```

$m'' := m$;
pour tout n' ancêtre de n, $n' \in$ nœuds_traités tel que $m > m'$ faire
  pour toutes les places p telles que $m(p) > m'(p)$ faire
    $m''(p) := \omega$;
  fpour
fpour
nœuds_traités := nœuds_traités + $\{n\}$;
si n' est un ancêtre de n
  alors $n' :=$ premier nœud traité, sur le chemin de la racine à n tel que $m > m'$;
      $m' := m''$;
      supprimer_arbre(n');
    /*le nœud n' ayant changé de marquage, il faut le traiter à nouveau*/
    nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + $\{n'\}$;
    nœuds_traités := nœuds_traités − $\{n'\}$;
fsi
pour tout $n' \in$ nœuds_traités tel que $m'' > m'$ faire
  supprimer_arbre(n');
  supprimer_nœud(n');
    /*on supprime le nœud de marquage plus petit*/
fpour
4 : sinon : /*on calcule les fils du nœud n de marquage $m = (m_1, m_2)$*/
$nc_1 :=$ le nœud de $GCM1$ de marquage mc_1, comparable à m_1;
$nc_2 :=$ le nœud de $GCM2$ de marquage mc_2, comparable à m_2;
pour toute transition $t \in T_1$ telle qu'il existe un arc $mc_1\ [t > mc'_1$ dans $GCM1$ et m_1
  $[t > m'_1$ faire
  créer_nœud $(n', (m'_1, m_2))$;
  nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + $\{n'\}$;
  créer_arc(n, n', t); /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
fpour
pour toute transition $t \in T_2$ telle qu'il existe un arc $mc_2\ [t > mc'_2$ dans $GCM2$ et
  $m_2[t > m'_2$ faire
  créer_nœud(n', (m_1, m'_2));
  nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + $\{n'\}$;
  créer_arc(n, n', t); /*créer un arc de n à n' étiqucté par t*/
fpour
pour toute transition $t \in T_c$ telle qu'il existe un arc $mc_1[t > mc'_1$ dans $GCM1$
  et un arc $mc_2\ [t > mc'_2$ dans $GCM2$ et $m_1\ [t > m'_1$ et $m_2[t > m'_2$ faire
  créer_nœud(n', (m'_1, m'_2));
  nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + $\{n'\}$;
  créer_arc(n, n', t); /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
fpour
nœuds_traités := nœuds_traités + $\{n\}$;

fcas
ftq
identifier_nœuds_avec_même_étiquette ;

On part du marquage initial $M_0=(M_{0_1}, M_{0_2})$ de R_0. Soient $\mathrm{Acc}(N_1)$ l'ensemble d'accessibilité du réseau N_1 et $\mathrm{Acc}_1(N)$ l'ensemble d'accessibilité de N avec des marquages restreints aux places de N_1. Comme nous utilisons la composition par fusion de transitions, $\mathrm{Acc}(N_1) \supseteq \mathrm{Acc}_1(N)$. Donc M_{0_1} est dans $\mathrm{Acc}(N_1)$. Par définition du (pré)graphe de couverture minimal, il existe un et un seul marquage M_1 comparable à M_{0_1} dans $GCM1$. De même, il existe un unique marquage M_2 comparable à M_{0_2} dans $GCM2$. S'il existe un arc $M_1[t>...$ dans $GCM1$, avec $t \in T_1$, alors t peut être franchissable dans R_0 et si c'est le cas, un arc similaire est construit dans $GCM0$. S'il existe un arc $M_2[t>...$ dans $GCM2$, avec $t \in T_2$, alors t peut être franchissable dans R_0 et si c'est le cas, un arc similaire est construit dans $GCM0$. S'il existe un arc $M_1[t>...$ dans $GCM1$ et un arc $M_2[t>...$ dans $GCM2$, avec $t \in T_c$, alors t peut être franchissable dans R_0, et si c'est le cas l'arc est construit.

Tous les arcs nécessaires se trouvent dans les pré-graphes de couverture des sous-réseaux. Les seuls arcs n'apparaissant pas sont ceux qui conduisent directement à un marquage plus petit. S'ils étaient utilisés, ils mèneraient à la création d'un marquage plus petit immédiatement détruit.

Ce raisonnement est valable non seulement pour le marquage initial, mais aussi pour tout marquage accessible de R_0. Pour la construction de $GCM0$, on sait déjà quelles transitions sont franchissables, et on connaît une partie du marquage – celle correspondant à l'ensemble des places non concernées par le franchissement de la transition, c'est-à-dire les places de P_2 pour une transition de T_1 et les places de P_1 pour une transition de T_2.

L'algorithme que nous venons de présenter utilise donc une optimisation de la création des fils d'un nœud. Il permet d'éviter des tests de franchissabilité de transitions et des calculs de marquages, contrairement à un calcul direct. Trouver un nœud M' comparable à un nœud m' n'est pas une opération longue dans la mesure où les pères de M' et m' sont comparables et reliés à leur fils par un arc étiqueté par la même transition :

$$\begin{array}{ccc} m & \xrightarrow{\text{comparaison}} & M \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & {\scriptstyle t}\downarrow \\ m' & \longrightarrow & M' \end{array}$$

4.2. Un exemple : le protocole de communication par bits alternés

Nous allons maintenant étudier un réseau algébrique (*fig.* 12) modélisant le protocole de communication par bits alternés, à l'aide de son squelette (*fig.* 13). Un émetteur *E* désire transmettre des messages à un récepteur *R*. Il possède une file de messages à envoyer (place P5). Il envoie le premier message après l'avoir étiqueté avec un bit valant 0 (transition T1). Quand *R* reçoit le message (T3), il envoie un accusé de réception avec un bit identique (T4). Si au bout d'un certain temps, *E* n'a pas reçu d'accusé de réception, il renvoie son message (T5) (le message précédent a pu se perdre par T7),... jusqu'à ce qu'il ait reçu l'accusé de réception (T2). A ce moment là, il sait qu'il peut envoyer le message suivant avec un bit valant 1 (alternance par rapport au bit précédent). De même, si *R* ne reçoit pas de nouveau message, il peut supposer que son accusé de réception s'est perdu (par T8) et qu'il lui faut le renvoyer (T9). On continue jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de message à envoyer. Les transitions T6 et T10 servent à enlever de la file les messages envoyés en plusieurs exemplaires et déjà reçus par leur destinataire.

On décompose le squelette en quatre parties dont le squelette est le composé par fusion de transitions : le processus émetteur (places : P1, P2, P5, P9, transitions: T1, T2, T5, T6), le processus récepteur (places: P3, P4, P8, transitions : T3, T4, T9, T10), le canal pour l'envoi des messages (place P6, transitions: T1, T3, T5, T7, T10) et celui pour l'envoi des accusés de réception (place P7, transitions : T2, T4, T6, T8, T9).

Ce découpage permet d'établir que toutes les places sont bornées aussi bien dans le squelette que dans le réseau algébrique. La construction du graphe de couverture composé (*fig.* 14) montre que dans le squelette, toutes les transitions sont quasi-vivantes et qu'il n'y a pas de marquage mort. On n'obtient pas d'autre propriété sur le réseau algébrique que le caractère borné des places.

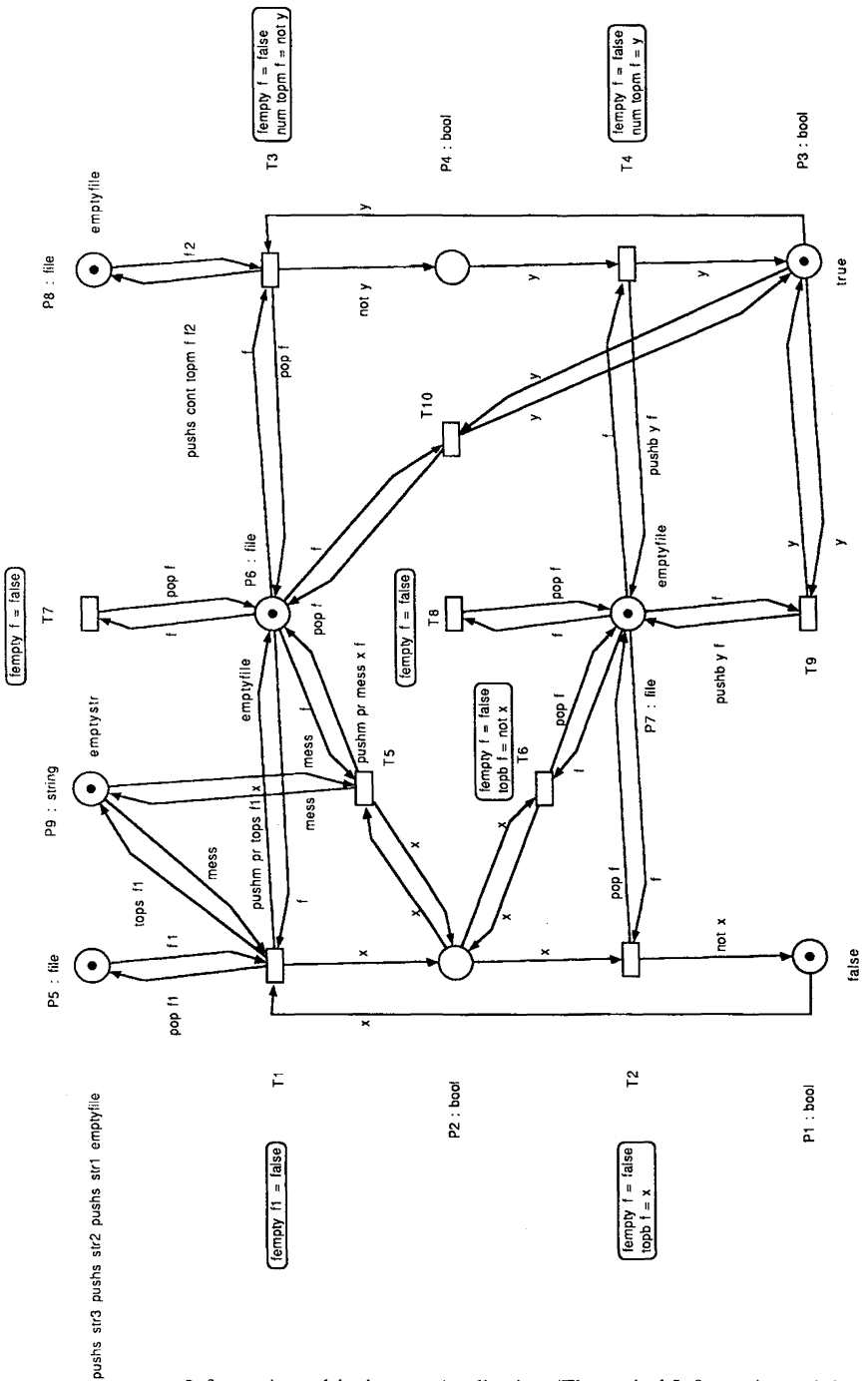

P8 : file
emptyfile
P4 : bool
P3 : bool
true
P6 : file
emptystr
P9 : string
P5 : file
P7 : file
P2 : bool
P1 : bool
false
T1
T2
T3
T4
T5
T6
T7
T8
T9
T10
!empty f = false
num topm f = not y
!empty f = false
num topm f = y
!empty f = false
!empty f = false
topb f = not x
!empty f1 = false
!empty f = false
topb f = x
pop f1
pop f
pushs cont topm f f2
not y
pushb y f
pushm pr tops f1 x
pushm pr mess x f
tops f1
mess
not x
pushs str3 pushs str2 pushs str1 emptyfile

Figure 12.

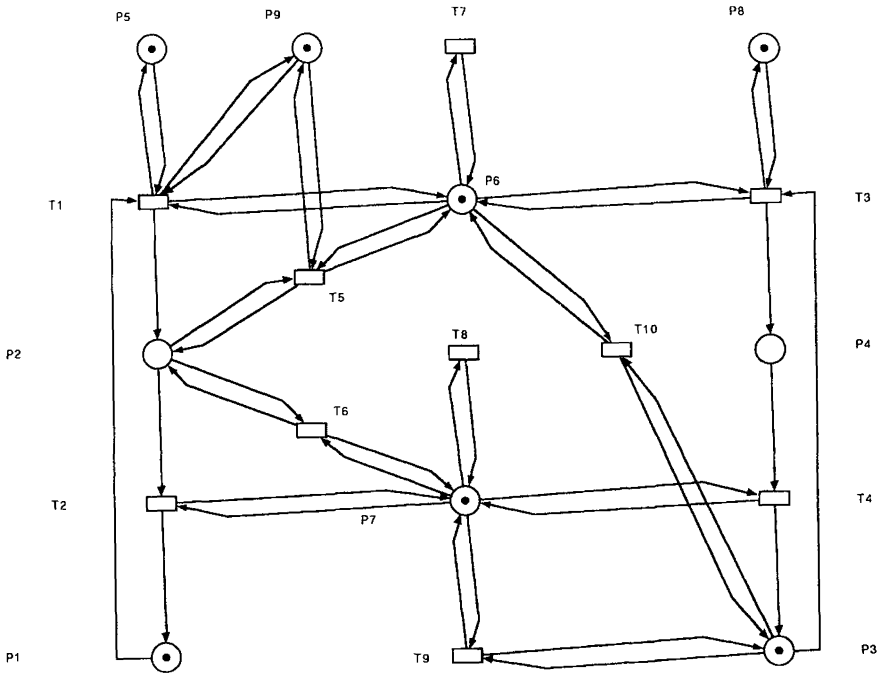
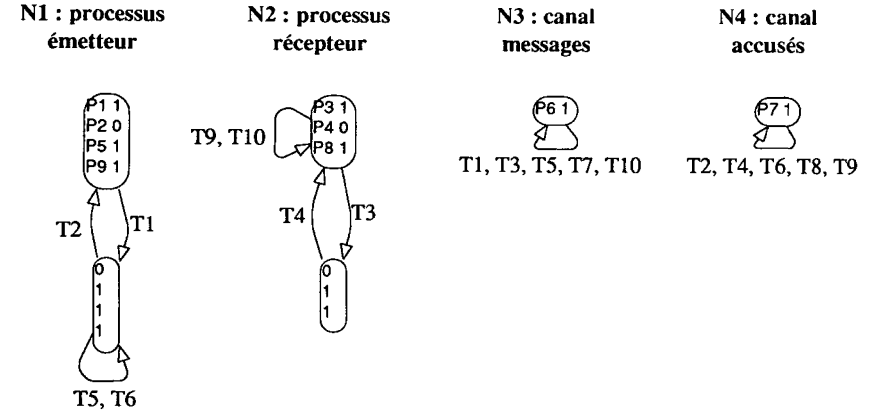


Figure 13.



Graphe de couverture du bit alterné

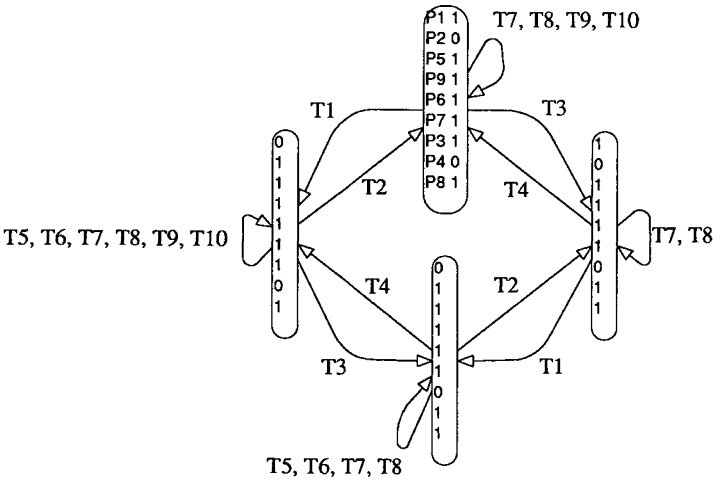


Figure 14.

4.3. Fusion de places

Comme pour la composition par fusion de transitions, nous étudions les possibilités de composition des graphes de couverture minimaux lorsqu'il s'agit de réseaux à fusionner par places.

Rappelons qu'un marquage M de R_0 est composé de trois parties : un marquage M_1 correspondant aux places de P_1, un marquage M_c correspondant aux places de P_c et un marquage M_2 correspondant aux places de P_2.

Nous proposons l'algorithme suivant, pour calculer le graphe de couverture minimal du réseau complet à partir de ceux des sous-réseaux :

fini : = faux ;
$\forall i$, $k_{c_i} := M_0(p_{c_i})$; /*nombre de jetons dans la place commune p_{c_i}*/
tant que non fini faire
  GCM1 = graphe de couverture de R_1, avec $M_{0_1}(p_{c_i}) = k_{c_i}$;
  GCM2 = graphe de couverture de R_2, avec $M_{0_2}(p_{c_i}) = k_{c_i}$;
  $\forall i$, $k_{c_{i_1}} := \max_{GCM1} M(p_{c_i})$; /*le plus grand nombre de jetons présents dans p_{ci} dans GCM1*/
  $\forall i$, $k_{c_{i_2}} := \max_{GCM2} M(p_{c_i})$; /*le plus grand nombre de jetons présents dans p_{ci} dans GCM2*/
  si $\forall i$, $k_{c_{i_1}} = k_{c_{i_2}}$
    alors fini : = vrai ; /*les bornes des places p_{c_i} sont les mêmes dans les deux réseaux*/
  fsi
  $\forall i$, $k_{c_i} := \max(k_{c_{i_1}}, k_{c_{i_2}})$;
  si il existe une séquence s et i, j, $i \neq j$, tels que $M[s > M', M(p_{c_i}) > M'(p_{c_i})$ et $M(p_{c_j}) < M'(p_{c_j})$ dans GCM1 ou GCM2
    alors fini : = vrai ; /*si P_c est un singleton, ceci n'est pas appliqué*/
  fsi
ftq
/*construction de GCM0 : = graphe de couverture minimal de R_0*/
nœuds_non_traités : = { créer_nœud(r, M_0) } ;
/*$M_0 = (M_1, M_2)$ est le marquage de la racine r*/
nœuds_traités : = $\varnothing$;
tant que nœuds_non_traités $\neq \varnothing$;
  sélectionner un nœud $n \in$ nœuds_non_traités ;
  nœuds_non_traités : = nœuds_non_traités $-$ { n } ;
  /*m est le marquage de n et m' celui de n'*/
  cas n : [1 . . 4] dans
    1 : il existe un nœud $n' \in$ nœuds_traités tel que $m = m'$:
        /*un nœud de même marquage existe déjà*/
      nœuds_traités : = nœuds_traités + { n } ;
      sortie cas
    2 : il existe un nœud $n' \in$ nœuds_traités tel que $m < m'$:
        /*il existe un nœud de marquage plus grand*/
      supprimer_nœud(n) ; /*on supprime le nœud n*/
      sortie cas
    3 : il existe un nœud $n' \in$ nœuds_traités tel que $m > m'$:
      /*il existe un nœud n' de marquage plus petit*/
      $m'' := m$;
      pour tout n' ancêtre de n, $n' \in$ nœuds_traités tel que $m > m'$ faire
        pour toutes les places p telles que $m(p) > m'(p)$ faire

```
        m''(p) := ω ;
      fpour
    fpour
    nœuds_traités := nœuds_traités + {n} ;
    si n' est un ancêtre de n
      alors n' := premier nœud traité, sur le chemin de la racine à n tel que m > m' ;
            m' := m'' ;
            supprimer_arbre(n') ;
            /*le nœud n' ayant changé de marquage, il faut le traiter à nouveau*/
            nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'} ;
            nœuds_traités: = nœuds_traités − {n'} ;
    fsi
    pour tout n' ∈ nœuds_traités tel que m'' > m' faire
      supprimer_arbre(n') ;
      supprimer_nœud (n') ;                    /*on supprime le nœud de marquage plus petit*/
    fpour
4 : sinon :                    /*on calcule les fils du nœud n de marquage m = (m1, mc, m2)*/
    nc1 := le nœud de l'un des GCM1 calculés, de marquage comparable à (m1, m2) ;
    /*renvoie 0 si non trouvé*/
    nc2 := le nœud de l'un des GCM2 calculés, de marquage comparable à (m2, mc) ;
    /*renvoie 0 si non trouvé*/
    si nc1 = 0
      alors pour toute t ∈ T1 telle que (m1, mc) [t > (m'1, m'c) faire
              créer_nœud(n', (m'1, m'c, m2)) ;
              nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'} ;
              créer_arc(n, n', t) ;                /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
            fpour
      sinon pour toute t ∈ T1 telle qu'il existe un arc (mc1, mc) [t > (mc'1, mc'c) dans l'un des
      GCM1 calculés
              et (m1, mc) [t > (m'1, m'c) faire
              créer_nœud (n', (m'1, m'c, m2)) ;
              nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'} ;
              créer_arc(n, n', t) ;                /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
          fpour
    fsi
    si nc2 = 0    /*les deux « si » sont similaires, mais ils sont dupliqués pour plus de clarté*/
      alors pour toute t ∈ T2 telle que (m2, mc) [t > (m'2, m'c) faire
              créer_nœud(n', (m1, m'c, m'2)) ;
              nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'} ;
              créer_arc (n, n', t) ;               /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
            fpour
```

```
        sinon pour toute t∈T2 telle qu'il existe un arc (mc2, mcc) [t>(mc'2, mc'c) dans l'un des
                GCM2 calculés et (m2, mc) [t>(m'2, m'c) faire
                créer_nœud(n', (m1, m'c, m'2));
                nœuds_non_traités := nœuds_non_traités + {n'};
                créer_arc(n, n', t);                    /*créer un arc de n à n' étiqueté par t*/
            fpour
        fsi
        nœuds_traités := nœuds_traités + {n};
    fcas
ftq
identifier_nœuds_avec_même_étiquette;
```

L'union des graphes de couverture est définie comme suit. On part de l'état initial M_0 du réseau R_0. Il se décompose en trois parties: $M_0 = (M_1, M_c, M_2)$, où M_1 (resp. M_2) est le marquage des places de P_1 (resp. P_2) et M_c le marquage des places de P_c, communes aux deux réseaux. Supposons que dans l'un des $GCM1$ (resp. $GCM2$) calculés, il existe un marquage (M'_1, M'_c) (resp. (M'_2, M'_c)) comparable à (M_1, M_c) (resp. à (M_2, M_c)). Soit t une transition de T_1 telle que $(M'_1, M'_c)[t>$ dans $GCM1$ (pour $GCM2$, l'opération est similaire). Si t est franchissable dans le réseau total, alors, on obtiendra, dans $GCM0$ un arc $(M_1, M_c, M_2)[t>(M''_1, M''_c, M_2)$. On réitère l'opération pour les marquages ainsi obtenus.

Si l'on a trouvé un marquage M' comparable au marquage M auquel on s'intéresse, dans l'un des graphes $GCM1$, alors les seules transitions de T_1 franchissables à partir de M font partie de celles franchissables à partir de M'. Sinon, il faut toutes les examiner. De même pour les $GCM2$.

Preuve de terminaison de l'algorithme.

Nous allons montrer que l'algorithme présenté termine. Pour cela, il suffit de montrer que sa première partie termine.

Soit s le terme générique utilisé pour désigner une séquence de franchissements telle que $M[s>M'$. Deux cas peuvent se présenter:

- $(\forall s \in T_i^*)((\forall p \in P_c\, M'(p) \leqq M(p))$ ou $(\forall p \in P_c\, M(p)' \geqq M(p)))$.

Considérons le premier sous-cas : $\forall p \in P_c\ M'(p) \leqq M(p)$. La borne des places est conservée d'où l'arrêt de l'algorithme.

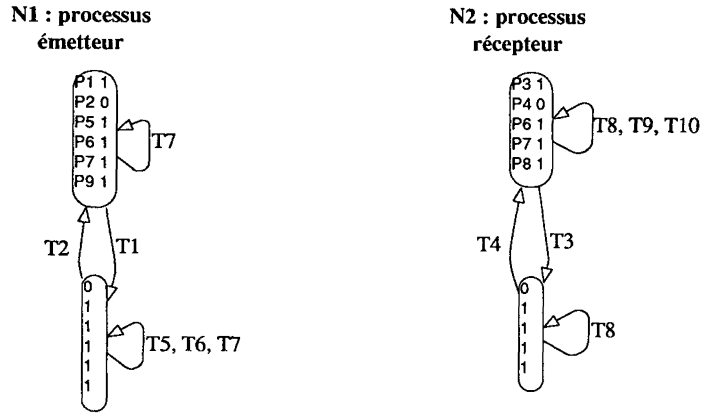
Considérons maintenant le second sous-cas : $\forall p \in P_c\, M'(p) \geqq M(p)$. Par définition du graphe de couverture minimal, les nœuds sont deux à deux incomparables. Donc, il existe une place p' n'appartenant pas à P_c telle que

$M(p') > M'(p')$, c'est-à-dire que le marquage de p' décroît par franchissement de s. D'où l'arrêt de l'algorithme.

• $\exists s \in T_i^*\ tq((\exists p \in P_c\ tq\ M'(p) > M(p))$ et $(\exists p' \in P_c\ tq\ M'(p') < M(p')))$: dans ce cas, on force l'arrêt de l'algorithme en mettant la variable fini à vrai ■.

4.4. Suite de l'exemple du protocole de communication par bits alternés

On reprend l'exemple du protocole de communication par bits alternés, dont on décompose le squelette en deux parties. Le squelette est alors



Graphe de couverture du bit alterné

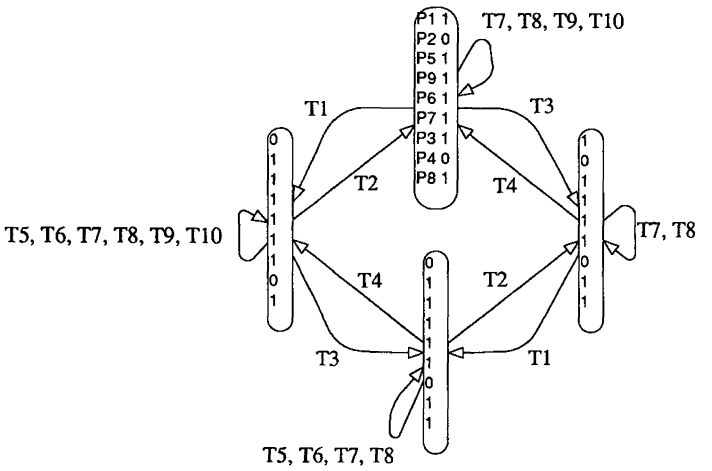


Figure 15.

le composé par fusion de places du processus émetteur (places: P1, P2, P5, P6, P7, P9, transitions: T1, T2, T5, T6, T7) et du processus récepteur (places: P3, P4, P6, P7, P8, transitions: T3, T4, T8, T8, T10). Chacun des deux processus prend en compte les canaux d'envoi de messages et d'accusés de réception. On peut déduire directement de cette décomposition que toutes les transitions sont quasi-vivantes. La figure 15 montre la composition des graphes de couverture.

5. CONCLUSION

Nous avons montré, dans cet article, comment exploiter la décomposition en modules d'un réseau. La composition de plusieurs sous-réseaux soit par fusion de places, soit par fusion de transitions, préserve certaines propriétés qui ne sont donc pas à prouver dans le réseau complet une fois qu'elles sont validées sur ses sous-réseaux, voire sur seulement l'un d'eux.

Nous avons exposé des algorithmes permettant la construction de sous-réseaux d'un réseau donné pour la vérification d'une propriété, à savoir le caractère borné ou non borné des places et la quasi-vivacité d'une transition. Ces algorithmes cherchent un sous-réseau convenable qui vérifie la propriété. On pourrait les optimiser en cherchant le plus petit sous-réseau.

Dans la mesure où l'on ne peut pas toujours décider de propriétés par simple analyse de sous-réseaux, il peut s'avérer utile de construire le graphe de couverture minimal du réseau complet. Pour cela, nous avons présenté des algorithmes — l'un pour la fusion de transitions et l'autre pour la fusion de places — permettant d'utiliser les graphes de couverture minimaux des sous-réseaux pour construire à moindre coût le graphe de couverture minimal du réseau complet et ensuite l'analyser.

Les méthodes proposées peuvent être utilisées en calculant les graphes de couverture de chaque module en parallèle. Une implémentation de ces algorithmes est en cours.

Revenons à l'algorithme de composition de graphes de couverture minimaux dans le cas de la fusion sur un ensemble de places communes. On peut constater que l'on force l'algorithme à s'arrêter dans le cas où le graphe de couverture de l'un des sous-réseaux contient une séquence de franchissements s telle que le marquage d'une place commune augmente par franchissement de s, et celui d'une autre place commune décroît. Cette condition d'arrêt n'est pas totalement satisfaisante car certains marquages ne seront pas calculés localement. Il faudra donc les calculer, de même que leurs fils,

lors de la construction du graphe de couverture du réseau complet ce qui prendra plus de temps et d'espace. Nous conjecturons que l'algorithme de calcul du graphe de couverture minimal du réseau complet à partir des deux graphes de couverture minimaux de ses sous-réseaux peut être optimisé en supprimant la condition d'arrêt et en itérant n fois la boucle principale où n est le nombre de places communes.

La deuxième technique importante pour l'analyse des réseaux de Petri est le calcul d'invariant. L'étude des relations entre la composition/décomposition de réseaux et les invariants serait une suite logique à ce travail.

Remerciements. – Les auteurs expriment leurs remerciements aux referees qui ont fourni des commentaires précis et suggéré des améliorations.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Bourguet, *Étude de la concordance de comportement de deux réseaux de Petri. Application à la validation des protocoles : détection automatique des erreurs de conception.* Thèse de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, septembre 1990.
2. G. Berthelot, L. Petrucci, *Putting Algebraic Nets Into Practice*, Rapport interne CEDRIC-IIE, janvier 1989.
3. GW. Brams, *Réseaux de Petri : théorie et pratique*, Masson, 1983.
4. W. Brauer, W. Reisig, G. Rosenberg, *Petri Nets: Central Models and Their Properties*, Advances in Petri Nets 1986, Part 1, Proceedings of an Advanced Course at Bad Honnef, in LNCS No. 254, Springer Verlag, 1986.
5. C. Dimitrovici, U. Hummert, L. Petrucci, *The Properties of Algebraic Nets Schemes in Some Semantics*, Proceedings of the 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Paris, juin 1990.
6. A. Finkel, *The Minimal Coverability Graph for Petri Nets.* Advances in Petri Nets 1993, LNCS 674, pp. 210-243, Springer Verlag, 1993.
7. M. Hack, *Decidability Questions for Petri Nets*, Ph. D. Thesis, Technical Report 161, MIT, Laboratory for Computer Science, juin 1976.
8. G. Memmi, J. Vautherin, *Analysing Nets by the Invariant Method*, Advances in Petri Nets 1986, LNCS 255, pp. 300-337, Springer Verlag, 1987.
9. W. Reisig, *Petri Nets*, Springer Verlag, 1985.
10. Y. Souissi, *Une étude de la préservation de propriétés par composition de réseaux de Petri*, Thèse de l'Université Pierre-et-Marie-Curie, février 1990.
11. A. Valmari, *Compositional State Space Generation*, Proceedings of the 11th International Conference on Application and Theory of Petri Nets, Paris, juin 1990.
12. J. Vautherin, *Un modèle algébrique, basé sur les réseaux de Petri, pour l'étude des systèmes parallèles*, Thèse de doctorat d'ingénieur, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, juin 1985.