RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

M. KABIL
M. POUZET

Une extension d'un théorème de P. Jullien sur les âges de mots

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 26, nº 5 (1992), p. 449-482
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1992__26_5_449_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 26, n° 5, 1992, p. 449 à 482)

UNE EXTENSION D'UN THÉORÈME DE P. JULLIEN SUR LES ÂGES DE MOTS (*)

par M. KABIL [1] et M. POUZET [1]

Communiqué par J.-E. PIN

à Roland Fraïssé
à l'occasion de son soixante-dixième anniversaire

Résumé. – *Soit E un ensemble ordonné et soit E* l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet E, muni de l'ordre de Higman. Nous appelons* âge de mots *tout idéal non vide de E**, âge élémentaire *tout idéal non vide de E union le mot vide et* âge étoilé *tout ensemble de la forme I* avec I section initiale de E. Nous disons qu'un âge* $\mathscr{A}$ *est* indécomposable *s'il n'est pas produit de deux âges distincts de* $\mathscr{A}$. *Nous montrons que les âges indécomposables sont exactement les âges élémentaires et les âges étoilés. En utilisant la notion d'indécomposabilité nous prouvons que tout âge de mots est produit fini d'âges élémentaires et étoilés si et seulement si l'alphabet est belordonné. Lorsque l'alphabet est une antichaîne, ceci redonne un théorème de P. Jullien* (1969).

Abstract. – *Let E be an ordered set and E* the set of finite words over E equipped with the Higman ordering. According to P. Jullien, a non empty ideal* $\mathscr{I}$ *of E** (*that is a non empty subset which is up-directed and closed downward*), *is called an* age. *It is an* elementary age *if it is of the form* $I \cup \{1\}$ (*where* 1 *is the empty word*) *for some non empty ideal I of E, and it is a* star-age *if it is of the form J* for some initial segment J of E. We say that an age* $\mathscr{A}$ *is* indecomposable *if it is not the product of two ages distinct from* $\mathscr{A}$. *We show that the indecomposable ages are exactly the elementary – and star-ages. Using the notion of indecomposability, we prove that* every age is a finite product of elementary and star-ages if and only if the alphabet is well-quasi-ordered. *If the alphabet is a finite antichain, this result is equivalent to Jullien's theorem* (1969) *referred in our title.*

INTRODUCTION

Par analogie avec les âges de relations introduits par R. Fraïssé en 1948, *cf.* [5], P. Jullien définit en 1969 [10] un *âge de mots* comme un ensemble non vide $\mathscr{A}$ de mots sur un alphabet fini qui satisfait les conditions suivantes :

(*) Reçu en mars 1991, révisé en septembre 1991.

Les auteurs remercient le P.R.C. Mathématiques-Informatique du C.N.R.S. pour son soutien. Une version préliminaire de ce travail a été présentée au Symposium Fraïssé (Luminy, 16-20 juillet 1990) par le premier auteur.

[1] Groupe L.M.D.I., Institut de Mathématiques et d'Informatique, Université Claude-Bernard (Lyon-I), 69622 Villeurbanne Cedex, France.

(*a*) Si $u \in \mathscr{A}$ et v est un sous-mot de u, alors $v \in \mathscr{A}$;

(*b*) Si $u \in \mathscr{A}$ et $v \in \mathscr{A}$, alors il existe $w \in \mathscr{A}$ dont u et v sont des sous-mots.

P. Jullien a démontré dans sa thèse [10], voir aussi [9], que tout âge de mots sur un alphabet fini E est un concaténat fini d'âges, chacun étant soit de la forme $\{1, a\}$ où 1 désigne le mot vide et $a \in E$, soit de la forme F^* avec $F \subseteq \mathrm{E}$ et F^* étant l'ensemble des mots formés exclusivement avec des lettres de F.

Nous donnons une version plus générale de ce résultat en considérant un alphabet E, qui est ordonné et pas nécessairement fini. Nous munissons l'ensemble E^* des mots de l'ordre d'abritement de Higman [6] et appelons *âges de mots* les idéaux non vides de E^*, c'est-à-dire les parties non vides de E^* qui sont closes pour l'abritement et filtrantes supérieurement. Nous appelons *âge élémentaire* un idéal non vide de E union le mot vide et *âge étoilé* tout ensemble de mots de la forme I^* avec I section initiale de E. Notre résultat principal est le suivant :

THÉORÈME 1 : *Soit E un alphabet ordonné; tout âge de mots est un concaténat fini d'âges, chacun étant soit élémentaire, soit étoilé — si et seulement si E est belordonné.*

La partie de notre preuve contenant le résultat de P. Jullien est différente de la sienne et, à notre avis, plus simple. Elle est basée sur les notions d'indécomposabilité suivantes : un âge $\mathscr{A}$ est *indécomposable* lorsqu'il n'est pas un concaténat de deux âges distincts de $\mathscr{A}$, il est *fortement indécomposable* lorsqu'il n'est pas un concaténat de deux sections initiales distinctes de $\mathscr{A}$. Nous montrons ceci :

THÉORÈME 2 : *Soient E un alphabet ordonné et $\mathscr{J}$ un âge de E^*; il y a équivalence entre* :

(i) *$\mathscr{J}$ est indécomposable*;

(i′) *$\mathscr{J} \subseteq \mathscr{A} * \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{J} \subseteq \mathscr{A}$ ou $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{B}$ pour tous âges $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ de E^**;

(ii) *$\mathscr{J}$ est fortement indécomposable*;

(ii′) *$\mathscr{J} \subseteq \mathscr{A} * \mathscr{B} \Rightarrow \mathscr{J} \subseteq \mathscr{A}$ ou $\mathscr{J} \subseteq \mathscr{B}$ pour toutes sections initiales $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ de E^**;

(iii) *$\mathscr{J}$ est élémentaire ou étoilé.*

Nous obtenons les implications $(i') \Rightarrow$ (i) et (ii′) $\Rightarrow$ (ii) comme conséquence de l'équivalence entre (i), (ii) et (iii). Nous n'avons pas de preuve directe. L'équivalence entre (i) et (ii) s'appuie sur des propriétés de la résiduation (Lemmes 2.6 et 2.7). L'équivalence entre (ii) et (iii) s'appuie sur une généralisation de la concaténation, celle-ci étant étendue à des familles totalement ordonnées de parties de E^*, et sur un argument de compacité présenté en termes d'ultraproduit (proposition 3.3) conduisant à l'énoncé suivant:

THÉORÈME 3 : *Soient E un alphabet ordonné; si E est dénombrable ou si l'ensemble des âges élémentaires est compact alors tout âge $\mathscr{J}$ de E^* est le concaténat d'une famille totalement ordonnée (éventuellement infinie) d'âges élémentaires.*

Lorsque l'alphabet est belordonné, la bonne fondation de l'ensemble des âges assure que tout âge est un concaténat fini d'âges indécomposables, ceci prouvant l'essentiel du résultat principal. Nous montrons également comment, dans le cas d'un alphabet belordonné, on peut éviter le recours à la proposition 3.3 pour caractériser les indécomposables.

Nous discutons enfin des extensions possibles des résultats ci-dessus à des structures algébriques plus générales (monoïdes ordonnés, algèbres ordonnées) et leur incidence en théorie des relations

Cette recherche est motivée par des questions concernant les graphes et les automates. Disons en quelques mots, le détail apparaîtra ultérieurement. Considérons un graphe réflexif $G=(V, \mathscr{E})$ dans lequel $\mathscr{E}$ est une relation binaire réflexive. Celui-ci peut être muni d'une sorte de distance, la *distance zig-zag*, introduite par A. Quilliot [17] comme suit. Étant donné un alphabet à deux lettres $E=\{a, b\}$, la distance entre deux sommets x et y de G, notée $d_G(x, y)$, est l'ensemble des mots $u=u_0 u_1 \ldots u_{n-1}$ de E^* tels qu'il existe une suite finie $x_0, x_1, \ldots, x_n$ d'éléments de V satisfaisant les conditions suivantes:

(i) $x_0=x$ et $x_n=y$

(ii) $(x_i, x_{i+1}) \in \mathscr{E}$ si $u_i=a$ et $(x_{i+1}, x_i) \in \mathscr{E}$ si $u_i=b$.

Cet ensemble $d_G(x, y)$ est une section finale de E^* ordonné par abritement; réciproquement, il est facile de voir que pour tout segment final F de E^* on peut trouver G, x et y tels que $F=d_G(x, y)$ (pour plus de détail sur la distance zig-zag, *cf.* [7]). Pour des raisons que nous ne discuterons pas ici, la question se pose de trouver, pour un F, donné le graphe G le plus «simple» possible ayant deux sommets x, y entre lesquels la distance est F. On peut observer que si G est le produit direct d'une famille G_i de graphes, et si $x=(x_i)_i$, $y=(y_i)_\iota$ sont deux éléments de ce produit alors $d_G(x, y)=\bigcap\{d_{G_i}(x_i, y_i)\}$, donc, la question se pose en premier lieu (et en fait s'y ramène) pour les F qui sont irréductibles pour l'intersection. Ces irréductibles coïncidant justement avec les sections finales dont le complément est un idéal de E^*, on est amené à étudier les décompositions des idéaux en produit d'idéaux, puis à considérer les graphes associés à ceux qui sont irréductibles vis-à-vis du produit – et que nous appelons indécomposables. Cette étude conduit à considérer également l'alphabet à trois lettres $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ avec les relations $\{a,b\}\leqq\{a\}$, $\{b\}$. Par ailleurs, il se trouve que cette distance zig-zag peut être définie en termes d'automates. En effet, si au graphe G on associe le système de transition $M_G=(V,T)$ sur l'alphabet E où $T=\{(p,a,q),(q,b,p)$ tel que $(p,q)\in\mathscr{E}\}$, alors la distance $d_G(x,y)$ est exactement le langage accepté par l'automate $\mathscr{A}_G=(M_G,\{x\},\{y\})$. On peut donc étendre cette problématique aux automates. Ceci et des applications concrètes (e. g. graphes valués et espaces métriques) conduisent à considérer un alphabet ordonné, éventuellement infini ([1]).

Cet article est divisé en huit sections. Les notions et résultats de base sont introduits dans les sections 1 et 2. La caractérisation des âges fortement indécomposables figure dans la section 3, celle des indécomposables sur un alphabet dénombrable dans la section 4. La preuve du théorème 1 occupe la section 5. Les sections 6, 7, 8 présentent quelques généralisations.

Nous utilisons la terminologie ensembliste courante. La notation $X:=Y$ indique que X est le nom donné à Y. Pour les questions de théorie des relations nous renvoyons à R. Fraïssé [5] et pour celles de théorie des ensembles, particulièrement les ordinaux, nous renvoyons à T. Jech [8].

1. PRÉLIMINAIRES

Soit P un ensemble ordonné. Une partie I de P est une *section initiale* si pour x, y dans P, on a $x\in I$ dès que $x\leqq y$ et $y\in I$. Elle est *filtrante supérieurement* si pour tout $x,y\in I$, il existe $z\in I$ tel que x, $y\leqq z$. C'est un *idéal* si c'est une section initiale filtrante supérieurement. Soit X une partie de P. Nous disons que l'ensemble des x de P majorés par au moins un y de X est la section initiale *engendrée* par X et le notons $\downarrow X$. Nous disons que X est *cofinale* dans P si $P=\downarrow X$, et nous définissons la *cofinalité* de P, que nous notons $Cf(P)$, comme étant le plus petit nombre (cardinal) κ tel que P contient une partie cofinale A dont la cardinalité $|A|$ est κ. Nous appelons *partie coinitiale* et *section finale* les notions duales de celles ci-dessus, c'est-à-dire définies pour l'ordre opposé (*cf.* [13] pour plus de détail particulièrement sur les ordres de cofinalité non dénombrable). Nous notons $I(P)$ l'ensemble des sections initiales de P ordonné par inclusion, $J(P)$ le sous ensemble de

([1]) Pour une présentation de ce point de vue on peut maintenant consulter la thèse de F. Saïdane [18] et pour une application du principal résultat, la thèse du premier auteur, n° 149-92 « Enveloppe injective de graphes et de systèmes de transitions et idéaux de mots », soutenue à Lyon le 26 juin 1992. Un article conjoint intitulé « Injective envelope of graphs and transition systems » est en cours.

$I(P)$ formé des idéaux de P et $F(P)$ l'ensemble des sections finales de P ordonné par inclusion.

Nous rappelons que la réunion d'une chaîne ou, plus généralement, d'un ensemble filtrant supérieurement d'idéaux est un idéal. Nous rappelons également que les idéaux non vides sont les éléments sup-irréductibles du treillis des sections initiales :

LEMME 1.1 : *Étant donnés un ensemble ordonné P et une section initiale I de P, il y a équivalence entre* :

(i) *I est un idéal.*

(ii) *Pour toutes sections initiales I_1, I_2, si $I = I_1 \cup I_2$, alors $I = I_1$ ou $I = I_2$.*

(iii) *Pour toutes sections initiales I_1, I_2, si $I \subseteq I_1 \cup I_2$, alors $I \subseteq$* I_1 ou $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{I}_2$.

Nous utilisons les concepts ci-dessus dans le cas où P est l'ensemble des mots sur un alphabet ordonné.

Soit donc E un ensemble ordonné, que nous appelons *alphabet* et dont les éléments sont appelés *lettres*. Nous appelons *mot* chaque suite finie de lettres. Chaque mot constitué d'une seule lettre est identifié à celle-ci. Le mot ne comportant aucune lettre, appelé *mot vide*, est noté 1. Dans ce texte, les lettres sont souvent notées $a, b, c..., a_1, b_1, c_1...$, les mots $u, v, w, ..., x, y...$ et les ensembles de mots $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$,... L'ensemble de tous les mots est noté E^*. Noter que $\varnothing^* = \{1\}$. Étant donnés deux mots u et v, on appelle *concaténat* (ou produit) de u et v et on note $u * v$ le mot formé des lettres de u suivies des lettres de v. L'opération dite *concaténation* ainsi définie est associative, ce qui permet de parler du concaténat d'une suite finie de mots. On munit E^* d'un ordre appelé, *ordre d'abritement* ou ordre de Higman [6], défini comme suit : si u et v sont deux mots de E^* tels que $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ et $v = b_1 b_2 \ldots b_m$, on dit que *u s'abrite* dans v ou *v abrite u* et on note $u \leqq v$ s'il existe une application h injective et croissante de $\{1, 2, \ldots n\}$ dans $\{1, 2, \ldots m\}$ telle que pour tout i, $1 \leqq i \leqq n$, on a $a_i \leqq b_{h(i)}$. On convient que le mot vide est inférieur à tout autre mot. Lorsque E est une antichaîne, on retrouve l'ordre des sous-mots : u est un sous-mot de v si l'effacement de lettres de v donne u.

Étant donné un alphabet ordonné, pour décider si oui ou non $u \leqq v$, on peut comparer la première lettre a_1 de u à la première lettre b_1 de v, si a_1 n'est pas inférieure ou égale à b_1 on la compare à la lettre b_2, etc. Si on ne trouve pas de lettre dans v supérieure à a_1, alors v n'abrite pas u. Sinon, soit i_1 le plus petit indice tel que $a_1 \leqq b_{i_1}$, on compare alors la deuxième lettre de u aux lettres qui suivent bi_1. Cet algorithme conduit à l'énoncé suivant qui est, pour l'essentiel, dû à P. Jullien [9]:

LEMME 1.2 : *Soit* $u=a_1 a_2 \ldots a_n$ *un mot de* E^* *de longueur* n, $n \geqq 1$. *Tout mot* x *de* E^* *abritant* u *s'écrit de manière unique :* $x=x_1 b_1 x_2 b_2 \ldots x_n b_n x_{n+1}$ *avec pour tout* i, $x_i \in E^*$, $b_i \in E$, $a_i \leqq b_i$ *et* a_i *ne s'abritant dans aucune lettre de* x_i.

Nous définissons un *âge de mots* comme un idéal non vide de E^*. Cette terminologie, empruntée à P. Jullien dans le cas où l'alphabet est une anti-chaîne finie, vient de la théorie des relations, *cf.* Fraïssé [5]. Rappelons, en effet, que étant donnés un ensemble V et un entier m, une *relation m-aire* de base V et d'*arité m* est toute application R de l'ensemble V^m des m-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ extraits de V dans l'ensemble $\{+, -\}$. Pour $V' \subseteq V$, la *restriction* de R à V', notée R/V', est la restriction de l'application R à V'^m. Un *isomorphisme* d'une relation m-aire R de base V sur une relation m-aire R' de base V' est toute bijection f de V sur V' telle que

$$R'(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m)) = R(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

pour tout $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in V^m$. Étant donnée une famille $\mu=(n_i)_{i \in I}$ d'entiers n_i, une *structure relationnelle* de base V et d'*arité* μ est un couple $M=(V, (R_i)_{i \in I})$ dans lequel chaque R_i est une relation n_i-aire de base V. Lorsque I est fini, la structure relationnelle est, suivant R. Fraïssé, appelée *multirelation*. Les notions de restriction et d'isomorphisme s'étendent aux structures relationnelles; par exemple, si $M=(V, (R_i)_{i \in I})$ et $M'=(V', (R'_i)_{i \in I})$ sont deux structures relationnelles de même arité $\mu=(n_i)_{i \in I}$, un isomorphisme de M sur M' est toute application f qui, pour chaque $i \in I$, est un isomorphisme de R_i sur R'_i.

Suivant R. Fraïssé, on peut comparer par abritement les relations et plus généralement les structures relationnelles: une structure relationnelle M *s'abrite* dans la structure relationnelle M' si M est isomorphe à une restriction de M'. A chaque multirelation M, il associe l'ensemble $\mathscr{L}(M)$ des multirelations finies qu'elle abrite, celles-ci étant considérées à l'isomorphie près, ensemble qu'il appelle l'*âge* de M, et démontre le lemme suivant :

LEMME 1.3 [5], cf. 10.2, p. 279 : *Soit* Ω_μ *l'ensemble, ordonné par abritement, formé des multirelations finies (considérées à l'isomorphie près) d'une même arité (finie)* μ. *Étant donné un sous ensemble non vide* $\mathscr{C}$ *de* Ω_μ, *il y a équivalence entre :*

(i) $\mathscr{C}$ *est l'âge d'une multirelation* M

(ii) $\mathscr{C}$ *est un idéal de* Ω_μ.

Fixons un entier r, et prenons pour arité μ le $r+1$-uple $(2, 1, 1, \ldots, 1)$. Considérons les multirelations formées d'un ordre total et de r relations unaires. Si $M=(V, \leqq, U_1, U_2, \ldots, U_r)$ est une telle multirelation et si $|V|=n$, alors en identifiant $(V, \leqq)$ à la chaîne $1, 2, \ldots, n$ (pour l'ordre naturel), nous pouvons lui associer le mot $a_1 a_2 \ldots a_n$ sur l'alphabet à 2^r lettres $E=\{+, -\}^r$ pour lequel $a_i=(U_1(i), \ldots, U_r(i))$. Réciproquement tout mot sur cet alphabet peut être obtenu ainsi. Cette correspondance préserve l'abritement et par conséquent les âges de multirelations au sens de (ii) coïncident avec les âges de mots construits sur un alphabet qui est une antichaîne finie (à 2^r éléments). Cette correspondance suggère d'utiliser le lemme 1.3 pour étudier les ensembles de mots finis. Lorsque l'alphabet est une antichaîne, il suffit d'étendre la notion de mot fini en considérant comme mot, éventuellement infini, toute fonction à valeurs dans l'alphabet et dont le domaine est totalement ordonné. Lorsque l'alphabet n'est plus une antichaîne, il faut étendre la notion de mot en considérant des suites dont le domaine est encore une chaîne, mais les valeurs sont des ensembles de lettres. C'est ce qui conduit à la notion de produit généralisé (*cf.* section 2).

2. ÂGES INDÉCOMPOSABLES. ÂGES ÉLÉMENTAIRES. ÂGES ÉTOILES

Étant donnés deux parties $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ de E*, on appelle *concaténat* de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ et on note $\mathscr{A} * \mathscr{B}$, l'ensemble des mots x tels qu'existent u appartenant à $\mathscr{A}$ et v appartenant à $\mathscr{B}$ avec $x=u*v$. L'opération de concaténation entre parties de E^* préserve les sections initiales et les idéaux, *i.e.* un concaténat fini de sections initiales (resp. d'idéaux) de E^* est une section initiale (resp. idéal) de E^*. Soit $(\mathscr{A}_i)_{i \in K}$ une famille de parties de E^* indexée par un ensemble totalement ordonné K. Comme dans [12], on définit le *produit* des $\mathscr{A}_i$, qu'on note $\prod(\mathscr{A}_\iota : i \in K)$, comme étant la réunion des ensembles $\mathscr{A}_{i_1} * \ldots * \mathscr{A}_{i_k}$ avec $i_1 < \ldots < i_k$ et $k < \omega$, en convenant que pour $k=0$ on obtient l'ensemble $\{1\}$. On peut observer que si tous les $\mathscr{A}_i$ sont égaux à un même ensemble $\mathscr{A}$ et K est la chaîne ω, alors ce produit est l'*étoile* de $\mathscr{A}$ (défini par $\mathscr{A}^* = \bigcup\{\mathscr{A}^n : n < \omega\}$ en posant $\mathscr{A}^0 = \{1\}$, $\mathscr{A}^1 = \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}^{n+1} = \mathscr{A}^n * \mathscr{A}$). On peut observer également que si chaque $\mathscr{A}_i$ est un segment initial de E^*, alors $\prod(\mathscr{A}_i : i \in K)$ est aussi un segment initial de E^*; si K est la chaîne $1 < 2 < \ldots < n$ et si chaque $\mathscr{A}_i$ est un segment initial non vide de E^*, alors $\prod(\mathscr{A}_i : i \in K) = \mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 * \ldots * \mathscr{A}_n$, enfin si chaque $\mathscr{A}_i$ est un âge de E^*, alors $\prod(\mathscr{A}_i : i \in K)$ est aussi un âge de E^*.

Nous disons qu'un âge $\mathscr{A}$ est *indécomposable* lorsqu'il n'est pas concaténat de deux âges distincts de lui-même. En d'autres termes si $\mathscr{A} = \mathscr{B} * \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sont des âges, alors $\mathscr{A} = \mathscr{B}$ ou $\mathscr{A} = \mathscr{C}$. Il est *fortement indécomposable* lorsqu'il n'est pas concaténat de deux sections initiales distinctes de $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire si

$\mathscr{A}=\mathscr{B}*\mathscr{C}$ et $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sont des sections initiales de E^*, alors $\mathscr{A}=\mathscr{B}$ ou $\mathscr{A}=\mathscr{C}$). Ainsi avec cette définition l'âge réduit au mot vide est fortement indécomposable. Puisque la concaténation des sections initiales est croissante et extensive (*i.e.* $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{B}'$ et $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{C}'$ impliquent $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}\subseteq\mathscr{B}*\mathscr{C}\subseteq\mathscr{B}'*\mathscr{C}'$), l'âge $\mathscr{A}$ est indécomposable (resp. fortement indécomposable) s'il n'est pas le concaténat de deux sous âges propres (resp. deux sections initiales propres) de E^*.

Nous disons qu'un âge $\mathscr{A}$ est *complètement fortement indécomposable* (resp. *complètement indécomposable*) lorsqu'il n'est pas produit d'une famille $(\mathscr{A}_i)_{i\in K}$ de sections initiales (resp. d'âges) de E^* distinctes de $\mathscr{A}$ (c'est-à-dire $\mathscr{A}=\prod(\mathscr{A}_i: i\in K)$ avec $\mathscr{A}_i$ section initiale (resp. âge) de E^* pour tout $i\in K$ implique $\mathscr{A}=\mathscr{A}_i$ pour au moins un i). L'âge réduit au mot vide n'est donc pas complètement fortement indécomposable.

Les implications évidentes entre ces diverses notions sont illustéres par le diagramme suivant:

complètement fortement indécomposable	$\Rightarrow$	complètement indécomposable
$\Downarrow$		$\Downarrow$
fortement indécomposable	$\Rightarrow$	indécomposable

Nous verrons que les âges complètement fortement indécomposables sont exactement les âges complètement indécomposables (prop. 3.5) et que les âges fortement indécomposables sont exactement les âges indécomposables (prop. 2.8).

Nous appelons *âge élémentaire* un idéal non vide de E union le mot vide. C'est un âge de E^*. Tout âge de E^* formé simplement de lettres est nécessairement de cette forme.

Nous appelons *âge étoilé* tout ensemble de mots de la forme I^* avec I section initiale de E (*âge simple* dans la terminologie de P. Jullien [10]). C'est un âge de E^*; en fait, on a le résultat plus précis:

LEMME 2.1 : *Soit $\mathscr{A}$ une partie de E^*. Il y a équivalence entre*:

(i) *$\mathscr{A}$ est un âge étoilé.*

(ii) *$\mathscr{A}$ est un âge et pour tout $x\in\mathscr{A}$, $x*x\in\mathscr{A}$.*

(iii) *$\mathscr{A}$ est une section initiale et $\mathscr{A}^*=\mathscr{A}$.*

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $\mathscr{A}$ est de la forme I^* avec I section initiale de E. Il est clos par abritement, en effet, si $y=y_1y_2\ldots y_m$ appartient à I^* et $x=x_1x_2\ldots x_n$ s'abrite dans y, alors il existe une application injective croissante h de $\{1,2,\ldots,n\}$ dans $\{1,2,\ldots m\}$ telle que pour tout i, $1\leq i\leq n$, on a $x_i \leqq y_{h(i)}$. Les $y_{h(i)}$ sont des éléments de I et I est une section initiale de E donc tous les x_i appartiennent à I et par suite x est un élément de I^*. L'ensemble $\mathscr{A}$ est filtrant, car si x et y appartiennent à I^*, alors le mot $x * y$ appartient à I^* et abrite à la fois x et y. C'est donc un âge et en outre $x * x \in \mathscr{A}$ pour tout $x \in \mathscr{A}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soient x et y deux éléments de $\mathscr{A}$. Puisque $\mathscr{A}$ est filtrant, il existe $z \in \mathscr{A}$ qui abrite x et y. Le mot $z * z$ appartient à $\mathscr{A}$ et abrite $x * y$. Comme $\mathscr{A}$ est une section initiale, il s'ensuit $x * y \in \mathscr{A}$. Puisque $\mathscr{A}$ contient le mot vide et est stable par produit, on a $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Puisque $\mathscr{A}$ est une section initiale, il s'ensuit que $I := \mathscr{A} \cap E$ en est une. Puisque $I \subseteq \mathscr{A}$, on a $I^* \subseteq \mathscr{A}^*$. Puisque $\mathscr{A}$ est une section initiale, I est l'ensemble des lettres qui appartiennent à au moins un mot de $\mathscr{A}$ et donc $\mathscr{A} \subseteq I^*$. Finalement $\mathscr{A} = I^*$. $\square$

Pour un mot u de E^*, on note $\underline{u}$ l'ensemble des mots de E^* n'abritant pas le mot u. Par exemple si a est une lettre, alors $\underline{a} = (E \setminus \uparrow a)^*$. C'est un âge étoilé.

Proposition 2.2 : *Soit E un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour tout $a \in E$, l'ensemble $\uparrow a$ est filtrant supérieurement dans E.*

(ii) *Pour tout $u \in E^* \setminus \{1\}$, l'ensemble $\underline{u}$ est un âge de E^*.*

(iii) *Pour toute section initiale non vide I de E^*, si I est finiment engendrée alors l'ensemble I^{+-} formé des minorants de tous les majorants de I égale I.*

Lorsque E satisfait l'une de ces propriétés, chaque âge de la forme $\underline{u}$ est un concaténat fini d'âges qui sont — soit élémentaires, — soit étoilés.

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Pour tout $u \in E^*$, $\underline{u}$ est une section initiale dans E^* car si x abrite y et n'abrite pas u alors y n'abrite pas u. Pour voir que $\underline{u}$ est filtrant, posons $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ et considérons deux mots x et y n'abritant pas u. Via le lemme 1.2, on peut écrire : $x = x_1 b_1 x_2 b_2 \ldots b_p x_{p+1}$ avec $p < n$ de sorte que x_i n'abrite pas a_i et $a_i \leqq b_i$, et ceci pour tout i, $1 \leqq i \leqq p$. De même on peut écrire $y = y_1 b'_1 y_2 b'_2 \ldots b'_q y_{q+1}$ avec $q < n$ de sorte que y_i n'abrite pas a_i et $a_i \leqq b'_i$, et ceci pour tout i, $1 \leqq i \leqq q$. Supposons que $p \leqq q$. Appliquons (i). Pour chaque j, $j \leqq p$, soit c_j un élément de $\uparrow a_j$ qui est supérieur à b_j et à b'_j. Le mot $z = x_1 y_1 c_1 x_2 y_2 c_2 \ldots c_p x_{p+1} y_{p+1} b'_{p+1} y_{p+2} \ldots b'_q y_{q+1}$ abrite à la fois x et y mais n'abrite pas u.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soient y et z deux lettres appartenant à $\uparrow x$ et soit le mot $u = xx$. On a $y \in \underline{u}$ et $z \in \underline{u}$. Puisque $\underline{u}$ est filtrant, il existe un mot $v \in \underline{u}$ abritant à la fois y et z. Il existe deux lettres t_1 et t_2 de v telles que $y \leqq t_1$ et $z \leqq t_2$. Or t_1 ne peut être différente de t_2 sinon, v abrite u. Donc $t_1 = t_2$ et $\uparrow x$ est filtrant.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $I = \downarrow K$ avec K partie finie de E^*. Si $u \in E^* \setminus I$, alors puisque $\underline{u}$ est filtrant, non vide, et contient K il contient un majorant de K; un tel majorant n'est pas minoré par u, donc $u \in E^* \setminus I^{+-}$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Soient x, $y \in \underline{u}$. Considérons la section initiale engendrée par x et y, soit $I = \downarrow \{x, y\}$. Puisque $I^{+-} = I$, le mot u n'appartient pas à I^{+-}; il existe donc un majorant de x et y qui ne majore pas u, un tel majorant est donc dans $\underline{u}$. $\square$

Le fait que, sous l'hypothèse (i), l'ensemble $\underline{u}$ soit un concaténat fini d'âges est une conséquence des deux lemmes suivants :

LEMME 2.3 : *Soit $u = a_1 a_2 \ldots a_n$ un mot de longueur n $(n \geqq 3)$ sur un alphabet quelconque. Pour tout i, $1 < i < n$, $\underline{u} = (\underline{a_1 \ldots a_i}) * (\underline{a_i \ldots a_n})$.*

Preuve : Observons que si u, v, x, y sont quatre mots de E^* et z une lettre et si $uzv \leqq xy$, alors soit $uz \leqq x$, soit $zv \leqq y$. Ceci revient à dire que $\underline{uz} * \underline{zv} \subseteq \underline{uzv}$. Dans le cas qui nous occupe, ceci donne

$$(\underline{a_1 \ldots a_i}) * (\underline{a_i \ldots a_n}) \subseteq \underline{u}.$$

Inversement soit $x \in \underline{a_1 a_2 \ldots a_n}$; Si $x \in \underline{a_1 \ldots a_k}$ pour un certain k, $1 \leqq k \leqq i$, alors comme $k < i$, on a $\underline{a_1 \ldots a_k} \subseteq \underline{a_1 \ldots a_i} * \underline{a_i \ldots a_n}$ et donc $x \in \underline{a_1 \ldots a_i} * \underline{a_i \ldots a_n}$. Si x abrite $a_1 \ldots a_k$ sans abriter $a_1 \ldots a_{k+1}$ pour un certain k, $i \leqq k < n$, alors, d'après le lemme 1.2, x s'écrit d'une manière unique : $x = x_1 b_1 x_2 b_2 \ldots b_k x_{k+1}$ de sorte que x_i n'abrite pas a_i, et $a_i \leqq b_i$ pour tout i, $1 \leqq i \leqq k$. Le mot $x_1 b_1 x_2 b_2 \ldots b_{i-1} x_i$ n'abrite pas $a_1 \ldots a_i$ et appartient donc à $\underline{a_1 \ldots a_i}$, tandis que $b_i x_{i+1} b_{i+1} \ldots b_k x_{k+1}$ appartient à $a_i \ldots a_n$. Donc x appartient à $\underline{a_1 \ldots a_i} * \underline{a_i \ldots a_n}$. Ce qui prouve que $\underline{u} \subseteq \underline{a_1 \ldots a_i} * \underline{a_i \ldots a_n}$. $\square$

LEMME 2.4 : *Soient a et b deux lettres de E, $C = \{c \in E : a, b \leqq c\}$ et $C^\wedge = \downarrow C \cup \{1\}$. On a $\underline{ab} = \underline{a} * C^\wedge * \underline{b}$. Ainsi, si dans E l'un des ensembles $\uparrow a$ ou $\uparrow b$ est filtrant supérieurement, alors $\underline{ab}$ est un concaténat fini d'âges qui sont soit élémentaires, soit étoilés.*

Preuve : Soit $u = a_1\ a_2 \ldots a_n \in \underline{ab}$; soit u' le plus long préfixe de u tel que $u' \in \underline{a}$ et u'' le plus long suffixe de u tel que $u'' \in \underline{b}$. Si u' et u'' recouvrent u, alors $u \in \underline{a} * \underline{b}$, donc $u \in \underline{a} * C^\wedge * \underline{b}$. Sinon $u = u' * v * u''$ et par la maximalité de u', u'', la première lettre de v abrite a, tandis que la dernière abrite b. Comme $u \in \underline{ab}$, il s'ensuit que v est une lettre appartenant à $C^\wedge$ et donc

$u \in \underline{a} * C^\wedge * \underline{b}$. Ainsi $\overline{\underline{ab}} \subseteq \underline{a} * C^\wedge * \underline{b}$. L'inclusion inverse est évidente. Si $\uparrow a$ ou $\uparrow b$ est filtrant dans E, alors C également, donc $C^\wedge$ est un âge élémentaire. □

Remarques : (1) L'énoncé (ii) et l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) lorsque E est une antichaîne finie ont été obtenus par P. Jullien [9]. L'équivalence entre (i) et (iii) a été obtenue d'une manière directe par H. J. Bandelt et M. Pouzet [1]. L'équivalence (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) est encore valide si au lieu de E^* on considère un ordre arbitraire. Le lemme 2.3 est dû à P. Jullien (lorsque E est une antichaîne finie) [10].

(2) Sous l'hypothèse que E est une antichaîne, P. Jullien prouve également que les âges qui sont des intersections finies de concaténats finis d'âges étoilés ou élémentaires sont encore de tels concaténats. Sous cette hypothèse, il découle d'un théorème dû à Higman (*cf.* théorème 5.1) que tout âge est une intersection finie d'âges de la forme $\underline{u}$. Ces deux faits, ajoutés à la proposition 2.2, prouvent son théorème.

PROPOSITION 2.5 : *Les âges élémentaires et étoilés sont fortement indécomposables.*

Preuve : C'est évident pour les âges élémentaires. Soit $\mathscr{A}$ un âge étoilé. Supposons qu'il n'est pas fortement indécomposable; il existe alors $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, sections initiales propres de $\mathscr{A}$, tels que $\mathscr{A} = \mathscr{B} * \mathscr{C}$. Soient x et y deux éléments qui appartiennent respectivement à $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$ et à $\mathscr{A} \setminus \mathscr{C}$. Puisque $\mathscr{A}$ est étoilé, le mot $x * y$ appartient à $\mathscr{A}$. Il existe donc $u \in \mathscr{B}$ et $v \in \mathscr{C}$ tels que $x * y = u * v$. Mais ceci donne soit $x \leqq u$ et donc $x \in \mathscr{B}$ ce qui est impossible, soit $y \leqq v$; ce qui est tout aussi impossible. □

LEMME 2.6 : *Soit E un alphabet ordonné; si un âge de mots $\mathscr{A}$ est concaténat de deux sections initiales, alors l'une d'elles est un âge.*

Preuve : Soient $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}$ deux sections initiales de E^* telles que $\mathscr{A} = \mathscr{J} * \mathscr{K}$. Si $\mathscr{J}$ n'est pas un âge, choisissons $x, x' \in \mathscr{J}$ qui en témoignent et voyons que $\mathscr{K}$ est filtrant donc est un âge. Soient $y, y' \in \mathscr{K}$. Puisque $\mathscr{A}$ est un âge et $\mathscr{A} = \mathscr{J} * \mathscr{K}$ on peut trouver $w := uv$, avec $u \in \mathscr{J}$, $v \in \mathscr{K}$, qui majore à la fois xy, xy', $x'y$ et $x'y'$. Or u ne peut majorer à la fois x et x'; sans perte de généralité on peut supposer qu'il ne majore pas x. De $uv \geqq xy$ et non $u \geqq x$ on tire $v \geqq y$, de même on tire $v \geqq y'$ et donc $\mathscr{K}$ est filtrant. □

N.B.: Une décomposition comme ci-dessus peut être propre. Par exemple, soit A un idéal de E et soit X une section initiale non filtrante de E, de sorte que A et X soient incomparables pour l'inclusion; posons $\mathscr{J} = \downarrow A * X$ et

$\mathscr{K}=X^*$ alors $\mathscr{A}:=\mathscr{J}*\mathscr{K}$ est un âge, $\mathscr{J}$ est une section initiale non filtrante de E^*, $\mathscr{K}$ est distinct de $\mathscr{A}$.

Étant données deux parties $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$ de E^*, nous notons – comme il est d'usage – $\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}:=\{x\in E^*:\mathscr{J}x\subseteq\mathscr{I}\}$ et

$$\mathscr{I}*\mathscr{J}^{-1}:=\{x\in E^*:x\mathscr{J}\subseteq\mathscr{I}\}.$$

Nous rappelons, sans preuve, le fait élémentaire suivant :

FAIT : Étant données $\mathscr{I}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{K}\subseteq E^*$, il y a équivalence entre :

(i) $\mathscr{J}*\mathscr{K}\subseteq\mathscr{I}$.

(ii) $\mathscr{K}\subseteq\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$.

(iii) $\mathscr{J}\subseteq\mathscr{I}*\mathscr{K}^{-1}$.

LEMME 2.7 : *Soit E un alphabet ordonné; si $\mathscr{J}\subseteq E^*$ et $\mathscr{I}$ est un âge de E^* contenant $\mathscr{J}$, alors $\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}*\mathscr{J}^{-1}$ sont également des âges.*

Preuve : Contentons nous de voir que $\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ est un âge; le fait que $\mathscr{I}*\mathscr{J}^{-1}$ en soit également un s'en déduit par retournement des mots (*i.e.* par image miroir) ou peut se prouver d'une même façon. C'est une section initiale, en effet soit x, y tels que $x\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ et $y\leqq x$; on a $\mathscr{J}x\subseteq\mathscr{I}$ implique $\mathscr{J}y\subseteq\mathscr{I}$, c'est-à-dire $\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$. Voyons maintenant que $\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ est filtrant. Étant donnés deux entiers n et m, soit $\mathscr{P}(n,m)$ la propriété suivante :

« pour tout $\mathscr{J}\subseteq E^*$, pour tout $u,v\in E^*$ de longueurs respectivement $|u|=n$ et $|v|=m$: si u, $v\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$, alors il existe $w\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ tel que u, $v\leqq w$. »

Les couples d'entiers étant ordonnés par l'ordre produit : $(n,m)\leqq(n',m')\Leftrightarrow n\leqq n'$ et $m\leqq m'$, on prouve $\mathscr{P}(n,m)$ par induction sur (n,m). Les propriétés $\mathscr{P}(n,0)$ et $\mathscr{P}(0,m)$ soit trivialement satisfaites. Soit (n,m), $n\geqq 1$, $m\geqq 1$ tel que $\mathscr{P}(n',m')$ est vraie pour tout $(n',m')<(n,m)$; en particulier $\mathscr{P}(n-1,m)$ et $\mathscr{P}(n,m-1)$ sont vraies. Soit donc $\mathscr{J}$, u, v avec u, $v\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ et $(|u|,|v|)=(n,m)$. Posons $u=\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$ et $v=\beta_1\beta_2\ldots\beta_m$ et notons $u^-=\alpha_2\ldots\alpha_n$ et $v^-=\beta_2\ldots\beta_m$.

CAS 1 : $\alpha_1 v$ ou $\beta_1 u\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$. Supposons par exemple $\alpha_1 v\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$, soit $\mathscr{J}\alpha_1 v\subseteq\mathscr{I}$. Posons $\mathscr{K}=\mathscr{J}\alpha_1$. On a $v\in\mathscr{K}^{-1}*\mathscr{I}$, et puisque $u\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$, on a $u^-\in\mathscr{K}^{-1}*\mathscr{I}$. Or $(|u^-|,|v|)=(n-1,m)$ et $\mathscr{P}(n-1,m)$ vraie impliquent qu'il existe $w'\in\mathscr{K}^{-1}*\mathscr{I}$ tel que $u^-,v\leqq w'$. Le mot $w=\alpha_1 w'$ satisfait les conditions énoncées. Le cas $\beta_1 u\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ se prouve de la même façon.

CAS 2 : $\alpha_1 v$ et $\beta_1 u\notin\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$. Soit donc $u_0,v_0\in\mathscr{J}$ qui en témoignent, c'est-à-dire $u_0\alpha_1 v\notin\mathscr{I}$, $v_0\beta_1 u\notin\mathscr{I}$. Puisque $u,v\in\mathscr{J}^{-1}*\mathscr{I}$ et $u_0,v_0\in\mathscr{J}$, on a $u_0 u$ et $v_0 v\in\mathscr{I}$. Puisque $\mathscr{I}$ est filtrant, il existe $w\in\mathscr{I}$ avec $u_0 u$, $v_0 v\leqq w$. Nous disons que pour tout mot $w' \in \mathscr{I}$, si $u_0 u$, $v_0 v \leqq w'$, les éléments α_1 et β_1 sont envoyés sur une même lettre θ. Plus formellement :

Si $w' = w_0 \theta w_1$ avec $w_0 \geqq u_0$, $\theta \geqq \alpha_1$, $w_1 \geqq u^-$ (1) et si $w' = w'_0 \theta' w'_1$ avec $w'_0 \geqq v_0$, $\theta' \geqq \beta_1$, $w'_1 \geqq v^-$ (2), alors $w_1 = w'_1$ ce qui entraîne $\theta = \theta'$ et $w_0 = w'_0$. En effet si $|w'_1| < |w_1|$, alors $v \leqq w_1$. Donc $u_0 \alpha_1 v \leqq u_0 \theta v \leqq w'$, et par suite $u_0 \alpha_1 v \in \mathscr{I}$. Contradiction. De même la supposition $|w_1| < |w'_1|$ contredirait le fait que $v_0 \beta_1 u \notin \mathscr{I}$. On a donc $|w_1| = |w'_1|$ et par suite $w = w'_1$, $\theta = \theta'$ et $w_0 = w'_0$. Choisissons un $w \in \mathscr{I}$ avec $w \geqq u_0 u, v_0 v$ et soit θ donné par le fait ci-dessus et $\mathscr{K} = \mathscr{J} \theta$. Alors $u^-, v^- \in \mathscr{K}^{-1} * \mathscr{I}$. En effet si $u^- \notin \mathscr{K}^{-1} * \mathscr{I}$, alors il existe $u'_0 \in \mathscr{J}$ tel que $u'_0 \theta u^- \notin \mathscr{I}$. Mais par ailleurs $u'_0 u \in \mathscr{I}$ et $w \in \mathscr{I}$, soit $w'' \in \mathscr{I}$, avec $w'' \geqq u'_0 u, w$. On a $w'' = w'_0 \theta w'_1$ avec $w'_0 \geqq u'_0$, $\theta \geqq \alpha_1$, $w'_1 \geqq u^-$ et $w'' = w''_0 \delta w''_1$ avec $w''_0 \geqq u'_0$, $\delta \geqq \alpha_1$, $w''_1 \geqq u^-$. Si $|w''_1| < |w'_1|$, alors $w''_0 \geqq u_0$ et donc la décomposition $w''_0 \delta w''_1$ satisfait encore (1), or on a unicité. Si $|w'_1| < |w''_1|$, alors $u'_0 \leqq w'_1$ et donc $u'_0 \theta u^- \leqq w''$ ce qui entraîne $u'_0 \theta u^- \in \mathscr{I}$. Contradiction. Donc $|w'_1| = |w''_1|$ et $\theta = \delta$ et on a encore $u'_0 \theta u^- \in \mathscr{I}$. Contradiction. De même on montre que $v^- \in \mathscr{K}^{-1} * \mathscr{I}$. Maintenant $\mathscr{P}(|u^-|, |v^-|) = \mathscr{P}(n-1, m-1)$ est vraie, donc il existe $w' \in \mathscr{K}^{-1} * \mathscr{I}$ avec $u^-, v^- \leqq w'$. Le mot $w = \theta w'$ appartient à $\mathscr{J}^{-1} * \mathscr{I}$ et vérifie $w \geqq u, v$. □

Proposition 2.8 : *Soit E un alphabet ordonné; un âge $\mathscr{I}$ est fortement indécomposable si et seulement si il est indécomposable.*

Preuve : Soit $\mathscr{I}$ indécomposable. Si $\mathscr{I}$ est étoilé, alors d'après la proposition 2.5, il est fortement indécomposable. Supposons maintenant que $\mathscr{I}$ n'est pas étoilé et soient $\mathscr{J}$ et $\mathscr{K}$ deux sections initiales de E^* telles que $\mathscr{I} = \mathscr{J} * \mathscr{K}$. Montrons que $\mathscr{I} = \mathscr{J}$ ou que $\mathscr{I} = \mathscr{K}$. D'après le lemme 2.6, l'une de ces sections initiales est un âge; sans perdre de généralité nous pouvons supposer que c'est $\mathscr{J}$ que nous supposons être également distinct de $\mathscr{I}$. D'après le lemme 2.7, $\mathscr{J}^{-1} * \mathscr{I}$ est un âge; or d'après le fait ci-dessus nous avons $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{J}^{-1} * \mathscr{I}$ et par suite $\mathscr{I} = \mathscr{J} * (\mathscr{J}^{-1} * \mathscr{I})$. Comme $\mathscr{I}$ est indécomposable, il s'ensuit que $\mathscr{I} = \mathscr{J}^{-1} * \mathscr{I}$; ceci donne $\mathscr{I} = \mathscr{J} * \mathscr{I}$ et donc $\mathscr{I} = \mathscr{J}^* * \mathscr{I}$. Soit $A := \mathscr{J}^* \cap E$ et soit $\mathscr{K}'$ l'ensemble des $x \in \mathscr{K}$ tels que la première lettre de x ne soit pas dans A. Nous avons $\mathscr{I} = \mathscr{J}^* * \mathscr{K}'$. En effet soit $w \in \mathscr{I}$; choisissons le plus long préfixe de w, soit u', qui appartient à $\mathscr{J}^*$ alors $w = u' v'$ avec v' dans $\mathscr{K}'$ (en effet, on a $w = uv$ avec $u \in \mathscr{J}$, $v \in \mathscr{K}$ et donc u est préfixe de u'); En outre $\mathscr{K}'$ est filtrant; en effet, soient $y, y' \in \mathscr{K}'$; ces deux éléments sont dans $\mathscr{I}$ donc sont majorés par un élément uv avec $u \in \mathscr{J}^*$ et $v \in \mathscr{K}'$; on a $y, y' \leqq v$ (si y ne s'abrite pas dans v, alors la première lettre de y serait dans A). Puisque $\mathscr{I}$ est indécomposable non étoilé, il s'ensuit que $\mathscr{I} = \downarrow \mathscr{K}'$ et donc $\mathscr{I} = \mathscr{K}$. □

3. CARACTÉRISATION DES ÂGES INDÉCOMPOSABLES

Nous utilisons un argument de compacité, présenté en termes d'ultraproduit, pour montrer que tout âge de mots est un produit de sections initiales, chacune formée de lettres. Pour plus de détails sur ces questions, voir, par exemple, [2, 3, 4, 16].

Soit $\mathscr{J}$ un âge de mots de E^*. Considérons le sous ensemble $\mathscr{B}=\{\uparrow u, u\in\mathscr{J}\}$ de l'ensemble $P(\mathscr{J})$ des parties de $\mathscr{J}$. Du fait que $\mathscr{J}$ est filtrant, l'intersection de deux éléments de $\mathscr{B}$ contient un élément de $\mathscr{B}$. Soit alors U un ultrafiltre contenant $\mathscr{B}$. Pour chaque mot $u=u_1 u_2 \ldots u_n$ appartenant à $\mathscr{J}$, soit $S_u=(V_u, C_u, (R_{u,\alpha})_{\alpha\in E})$ la structure relationnelle de base $V_u=\{1, 2, \ldots, n\}$ dans laquelle C_u est l'ordre total $1\leqq 2 \ldots \leqq n$ et chaque $R_{u,\alpha}$ est une relation unaire de base V_u définie comme suit: $R_{u,\alpha}(i)$ prend la valeur $+$ si $\alpha\leqq u_i$ et la valeur $-$ sinon. Considérons *l'ultraproduit* des S_u par *l'ultrafiltre* U, ultraproduit que nous notons $S=\Pi S_u/\mathrm{U}$ et que nous définissons pour l'agrément du lecteur. Définissons d'abord la base V de S; nous considérons la relation suivante: nous dirons que le $\mathscr{J}$-uple $x=(\ldots, x_u, \ldots)$ et le $\mathscr{J}$-uple $y=(\ldots, y_u, \ldots)$ sont égaux modulo U si $\{u/x_u=y_u\}\in\mathrm{U}$. Cette égalité modulo U est une relation d'équivalence, et nous prenons pour V son espace quotient, c'est-à-dire l'ensemble de ses classes que nous notons $\prod V_u/\mathrm{U}$. Soient a et b deux éléments de $V=\prod V_u/\mathrm{U}$ et soit $x=(\ldots, x_u, \ldots)$ et $y=(\ldots, y_u, \ldots)$ des représentants respectivement de a et b. Nous disons que $a\leqq_S b$ si $\{u/x_u\leqq y_u\}\in\mathrm{U}$. D'après les propriétés de l'ultrafiltre, cette relation $\leqq_S$, que nous notons également C, est un ordre total sur V. Pour chaque $\alpha\in E$, considérons la relation unaire R^S_α de base V définie comme suit: soit $a\in V$ et soit $x=(\ldots, x_u, \ldots)$ un représentant de a suivant U, alors $R^S_\alpha(a)=+$ si $\{u/R_{u,\alpha}(x_u)=+\}\in\mathrm{U}$. On a alors $S=(V, C, (R^S_\alpha)_{\alpha\in E})$.

Pour tout $a\in V$, notons $X_a=\{\alpha\in E/R^S_\alpha(a)=+\}$. C'est une section initiale (éventuellement vide) de E car si $\beta\leqq\alpha$ et $R^S_\alpha(a)=+$, alors $\{u/R_{u,\alpha}(x_u)=+\}\in\mathrm{U}$ et cet ensemble est contenu dans $\{u/R_{u,\beta}(x_u)=+\}$, donc $\{u/R_{u,\beta}(x_u)=+\}\in\mathrm{U}$, ce qui implique que $R^S_\beta(a)=+$, et donc $\beta\in X_a$. On a un peu mieux. Munissons $P(E)\simeq\{0, 1\}^E$ de la topologie produit — c'est un espace compact —, et considérons l'ensemble $J(E)$ des idéaux de E comme sous ensemble de cet espace; on a alors:

LEMME 3.1 : *Pour tout $a\in V$, l'ensemble X_a est une limite d'idéaux de E. L'âge $\mathscr{J}$ est le produit de la famille $(X^0_a)_{a\in C}$ dans laquelle $X^0_a=X_a\cup\{1\}$ pour $a\in C$.*

Preuve. — (1) Soit $a\in V$, prouvons que X_a est adhérent à $J(E)$. Pour cela, soit $\mathscr{V}$ un voisinage de X_a dans 2^E. Par définition de la topologie, il existe deux parties finies F et G de E telles que $\mathscr{V}_{F,G} := \{X \subseteq E : F \subseteq X_a$ et $G \cap X_a = \varnothing\} \subseteq \mathscr{V}$. Soit $(\ldots, x_u, \ldots)$ un représentant de a,

$$F = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\} \text{ et } G = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p\};$$

on a alors $R^S_{\alpha_1}(a) = +$, $R^S_{\alpha_2}(a) = +, \ldots, R^S_{\alpha_k}(a) = +$, $R^S_{\beta_1}(a) = -$, $R^S_{\beta_2}(a) = -, \ldots$, $R^S_{\beta_p}(a) = -$, ce qui implique que $\{u/R_{u,\alpha_1}(x_u) = +\} \in \mathrm{U}$, $\ldots, \{u/R_{u,\alpha_k}(x_u) = +\} \in \mathrm{U}$, $\{u/R_{u,\beta_1}(x_u) = -\} \in \mathrm{U}, \ldots$, $\{u/R_{u,\beta_p}(x_u) = -\} \in \mathrm{U}$. Soit H l'intersection de toutes ces parties; $H \in \mathrm{U}$ implique qu'il existe $w \in \mathscr{J}$ tel que $\uparrow w \subseteq H$; soit $w = w_1 w_2 \ldots w_n$ et $C_w = 1 \leqq 2 \leqq \ldots \leqq n$; la composante x_W de a est un certain j, $1 \leqq j \leqq n$. Puisque pour tout i, $1 \leqq i \leqq k$, on a $R_{w,\alpha_i}(j) = +$ ceci implique $\alpha_i \leqq w_j$; de même, $R_{w,\beta_i}(j) = -$ implique que w_j n'est supérieur à aucun des β_i; donc $F \subseteq \downarrow w_j$ et $G \cap \downarrow w_j = \varnothing$. Par conséquent l'idéal $\downarrow w_j$ est dans $\mathscr{V}$. Ce qui prouve que X_a est adhérent à $J(E)$.

(2) Montrons que $\prod(X^0_a : a \in C)$ est inclus dans $\mathscr{J}$. Soit $v = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p$ un élément de $\prod(X^0_a : a \in C)$; il existe

$$a_1 = (\ldots, x_{1,u}, \ldots), \ldots, a_p = (\ldots, x_{p,u}, \ldots)$$

tel que $\alpha_1 \in X_{a_1}, \ldots \alpha_p \in X_{a_p}$ et $a_1 <_s a_2 <_s \ldots <_s a_p$. D'où l'ensemble

$$H = \{u/x_{1,u} < x_{2,u} < \ldots < x_{p,u}\}$$
$$\cap \{u/R_{u,\alpha_1}(x_{1,u}) = +\} \cap \ldots \cap \{u/R_{u,\alpha_p}(x_{p,u}) = +\} \in \mathrm{U};$$

il existe donc $w \in \mathscr{J}$ tel que $\uparrow w \subseteq H$; exprimons le fait que $w \in H$: on a $x_{1,w} < x_{2,w} < \ldots < x_{p,w}$, $R_{w,\alpha_1}(x_{1,w}) = +, \ldots, R_{w,\alpha_p}(x_{p,w}) = +$; posons $w = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ et $\{x_{1,w}, x_{2,w}, x_{p,w}\} \subseteq C_w$; il existe donc $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$ tels que $R_{w,\beta j_1}(x_{1,w}) = +, \ldots, R_{w,\beta j_p}(x_{p,w}) = +$; mais $R_{w,\alpha_1}(x_{1,w}) = +$ implique que $\alpha_1 \leqq \beta_{j_1}, \ldots, R_{w,\alpha_p}(x_{p,w}) = +$ implique que $\alpha_p \leqq \beta_{j_p}$; donc v s'abrite dans w et par suite $v \in \mathscr{J}$.

(3) Montrons l'inclusion inverse. Soit $u \in \mathscr{J}$; posons $u = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$, soit $C_u = 1 \leqq 2 \leqq \ldots \leqq k$. Il s'agit de trouver $a_1 <_s a_2 <_s \ldots <_s a_k$ dans V tels que $\alpha_1 \in X_{a_1}, \ldots \alpha_k \in X_{a_k}$; posons $a_1 = (\ldots, y_{1,w}, \ldots)$; les composantes de a_1 sont choisies comme suit: si u ne s'abrite pas dans w, on prend pour $y_{1,w}$ un élément quelconque de C_w qu'on fixe et qu'on note z_w, si u s'abrite dans w, posons $w = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n$ et pour $C_w = 1 \leqq 2 \leqq \ldots \leqq n$ soit j_1 le plus petit indice tel que $\alpha_1 \leqq \beta_{j_1}$, on pose alors $y_{1,w} = j_1$. Supposons défini $a_{k'-1}$, on définit $a_{k'}$ de la façon suivante: si u ne s'abrite pas dans w, on pose $y_{k',w} = z_w$; si u s'abrite dans w, soit $j_{k'}$ le plus petit indice supérieur à $j_{k'-1}$ tel que $\alpha_{k'} \leqq \beta_{j_{k'}}$, on pose $y_{k',w} = j_{k'}$. Soit $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $i < j$ implique $a_i <_s a_j$, car $\{v \in \mathscr{J}/x_{i,v} < x_{j,v}\}$ contient $\uparrow u$, donc appartient à U. De même

$\{v \in \mathscr{J} / R_{v, \alpha_r}(x_{r, v}) = +\}$ contient $\uparrow u$ donc appartient à U pour tout r, $1 \leqq r \leqq k$; ce qui montre que $\alpha_r \in X_{a_r}$ pour tout r, $1 \leqq r \leqq k$. □

LEMME 3.2 : *Soit E un alphabet tel que $J(E)$ est compact. Tout âge $\mathscr{J}$ de E^* est produit d'âges élémentaires.*

Preuve : Si $J(E)$ est compact, alors il est fermé et donc toute limite d'idéaux est un idéal. Les X_a^0 du lemme 3.1 sont donc des âges élémentaires. □

Un critère d'indécomposabilité est le résultat suivant:

PROPOSITION 3.3 : *Soit $\mathscr{J}$ un âge de la forme $\prod (A_i : i \in K)$ avec $A_i = A_i \cup \{1\}$ pour chaque $i \in K$, et A_i section initiale (resp. idéal) de E. Si $\mathscr{J}$ est fortement indécomposable (resp. indécomposable) alors il est soit étoilé, soit élémentaire.*

Pour la preuve de ce résultat nous utilisons le lemme suivant:

LEMME 3.4 : *Si K est une chaîne et (p) une propriété des sous-chaînes de K telle que:*

(1) *Toute sous-chaîne L' de K contenant une sous-chaîne L vérifiant (p) vérifie aussi (p).*

(2) *Pour toute partition de K en intervalles $I_1, I_2, \ldots, I_k$, au moins l'un des I_j vérifie (p).*

Alors au moins l'une des propriétés suivantes est vérifiée:

(i) *Il existe $x \in K$ tel que la chaîne $\{x\}$ vérifie (p).*

(ii) *Il existe un segment initial G de K et un segment final D de K vérifiant (p), dont l'intersection est vide.*

(iii) *Il existe un ordinal λ et une λ-suite croissante*

$$C = x_0 < x_1 < \ldots < x_\alpha < \ldots \alpha < \lambda$$

telle que la chaîne $G = \downarrow C$ vérifie (p) et aucun segment initial propre de G ne vérifie (p).

(iv) *Il existe un ordinal λ et une λ-suite décroissante*

$$C = x_0 > x_1 > \ldots > x_\alpha > \ldots \alpha < \lambda$$

telle que la chaîne $D = \uparrow C =$ vérifie (p) et aucun segment final propre de D ne vérifie (p).

Preuve : Étant donné $x \in K$, soit $(\leftarrow x] = \{y \in K / y \leqq x\}$ et

$$[x \rightarrow) = \{y \in K / y \geqq x\}.$$

Considérons les ensembles $G=\{x\in K$ tel que $(\leftarrow x]$ ne vérifie pas $(p)\}$ et $D=\{x\in K$ tel que $[x\rightarrow)$ ne vérifie pas $(p)\}$. Il est clair que G est un segment initial et D est un segment final de K. De plus $G\cap D=\varnothing$, en effet, s'il existe $x\in G\cap D$, alors K sera réunion disjointe des intervalles $(\leftarrow x[$, et $[x\rightarrow)$ sans que l'un d'eux vérifie (p). Ce qui contredirait l'hypothèse (2). Deux cas sont possibles :

1er *cas* : $G\cup D$ est inclus strictement dans K. Dans ce cas, il existe $x\in K$ tel que $x\notin G$ et $x\notin D$, c'est-à-dire $(\leftarrow x]$ et $[x\rightarrow)$ ne vérifient pas (p).

Si $(\leftarrow x[$ vérifie (p), alors en posant $G'=(\leftarrow x[$ et $D'=[x\rightarrow)$, on est en (ii). De même si $]x\rightarrow)$ vérifie (p).

Si ni $(\leftarrow x[$ ni $]x\rightarrow)$ ne vérifient (p), alors d'après (2), $\{x\}$ vérifie (p) et on est en (ii).

2^e *cas* : $K=G\cup D$. En appliquant l'hypothèse (2), G ou D vérifie (p).

1er *sous cas* : G vérifie (p).

Observons qu'aucun segment initial propre de G ne vérifie (p). En effet si I est un segment initial propre de G, alors en prenant $x\in G\setminus I$, on obtient $I\subseteq(\leftarrow x[\subseteq G$. Or $x\in G$; donc $(\leftarrow x]$ ne vérifie pas (p) et par conséquent I non plus. Prenons alors une chaîne cofinale $C=x_0<x_1<\ldots<x_\alpha<\ldots\alpha<\lambda$ avec $\lambda=cf(G)$; (Puisque G vérifie (p), on a $\lambda\geqq\omega$) et on est en (iii).

2^e *sous cas* : D vérifie (p).

Un raisonnement analogue montre qu'on est en (iv). □

Preuve de la proposition 3.3 : Pour $L\subseteq K$, posons $\Pi(L)=(\prod A_i : i\in L)$. Disons qu'une sous-chaîne L de K vérifie la propriété (p) lorsque $\mathscr{J}=\Pi(L)$. Du fait que $L\subseteq L'$ implique que $\Pi(L)\subseteq\Pi(L')$, il s'ensuit que si L vérifie (p), alors toute sous-chaîne L' de K contenant L vérifie aussi (p). Soit $K=I_1\cup I_2\cup\ldots\cup I_n$ une partition de K en intervalles. On peut supposer que tout élément de I_j est inférieur à tout élément de I_{j+1}. On a $\mathscr{J}=\prod(I_1)*\prod(I_2)*\ldots*\prod(I_n)$. Si $\mathscr{J}$ est fortement indécomposable (resp. indécomposable), alors $\mathscr{J}=\prod(I_j)$ pour un certain j, $1\leqq j\leqq n$. Donc si $\mathscr{J}$ est fortement indécomposable (resp. indécomposable), la chaîne K et la propriété (p) satisfont les conditions du lemme 3.4. Quatre cas sont possibles :

1er *cas* : (i) est vérifiée. Dans ce cas $\mathscr{J}$ est un âge élémentaire.

2^e *cas* : (ii) est vérifiée. Soit alors G un segment initial de K et D un segment final de K tels que G et D sont deux parties disjointes vérifiant toutes les deux la propriété (p). On a alors $\mathscr{J}=\prod(G)=\prod(D)$. Or $\mathscr{J}=\prod(G)*\prod(D)$. Donc $\mathscr{J}*\mathscr{J}=\mathscr{J}$. Le lemme 2.2 implique que $\mathscr{J}$ est un âge étoilé.

3^e *cas*: (iii) est vérifiée. Dans ce cas, il existe un ordinal λ et une λ-suite croissante $C = x_0 < x_1 < \ldots < x_\alpha < \ldots \alpha < \lambda$ telle que la chaîne $G = \downarrow C$ vérifie $\mathcal{J} = \prod(G)$ et pour tout segment initial propre L de G, $\mathcal{J} \neq \prod(L)$. Soit $u \in \mathcal{J}$. Il existe $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ dans G tel que $u \in \mathcal{A}_{i_1} * \mathcal{A}_{i_2} * \ldots * \mathcal{A}_{i_k}$. Pour un tel choix d'indices, il existe α tel que $i_k \leqq x_\alpha$. Pour un tel α, on a $\mathcal{J} = \prod(\{ i \in G : i \leqq x_\alpha \}) * \prod(\{ i \in G : i > x_\alpha \})$. Puisque $\mathcal{J}$ est fortement indécomposable (resp. indécomposable), on a $\mathcal{J} = (\{ i \in G : i > x_\alpha \})$. Comme $u \in \prod(\{ i \in G : i \leqq x_\alpha \})$, on a $u * u \in \mathcal{J}$. Le lemme 2.2 implique que $\mathcal{J}$ est un âge étoilé.

4^e *cas*: (iv) est vérifiée. On peut faire une preuve tout à fait semblable à celle du 3^e cas. En fait, si on renverse l'ordre de la chaîne K, et si on retourne chaque mot (le mot $a_1 a_2 \ldots a_n$ se retournant en $a_n \ldots a_2 a_1$), l'âge $\mathcal{J}$ se transforme en un âge $\mathcal{J}^d$, celui-ci étant le produit des $\mathcal{A}_i^d$ indexé par la chaîne K^d obtenue en renversant l'ordre de K. On se trouve alors dans le 3^e cas et donc $\mathcal{J}^d$ est étoilé. Par suite $\mathcal{J}$, lui-même, est étoilé. □

Preuve du théorème 2: D'après la proposition 2.8 on a l'équivalence entre (i) et (ii). D'après la proposition 2.5, on a (iii) $\Rightarrow$ (ii). Voyons l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). Soit $\mathcal{J}$ un âge; d'après le lemme 3.1, cet âge est un produit de sections initiales. D'après la proposition 3.3 s'il est fortement indécomposable, il est élémentaire ou étoilé. On a trivialement les implications (ii') $\Rightarrow$ (ii) et (ii') $\Rightarrow$ (i') $\Rightarrow$ (i). Pour achever la preuve du théorème, il suffit de prouver (iii) $\Rightarrow$ (ii'). Soit $\mathcal{J}$ un âge contenu dans $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ sans qu'il soit contenu ni dans $\mathcal{A}$ ni dans $\mathcal{B}$.

Cas 1 : $\mathcal{J}$ est élémentaire. Soit $a \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{A}$ et $b \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{B}$. Il existe une lettre $c \in \mathcal{J}$ avec $a, b \leqq c$. Mais $c \in \mathcal{J}$ implique $c \in \mathcal{A}$ ou $c \in \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des sections initiales, ceci implique $a \in \mathcal{A}$ ou $b \in \mathcal{B}$. Contradiction.

Cas 2: $\mathcal{J}$ est étoilé. Soit $u \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{A}$ et $v \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{B}$. Il existe un mot $w \in \mathcal{J}$ avec $u, v \leqq w$. Le mot $w * w$ appartient à $\mathcal{J}$ donc à $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ et par suite $w \in \mathcal{A}$ ou $w \in \mathcal{B}$. Ceci implique que $u \in \mathcal{A}$ ou $v \in \mathcal{B}$. Contradiction. □

PROPOSITION 3.5 : *Soient E un alphabet ordonné et $\mathcal{J}$ un âge de E^*; il y a équivalence entre*:

(i) *$\mathcal{J}$ est complètement fortement indécomposable*;

(ii) *$\mathcal{J}$ est complètement indécomposable*;

(iii) *$\mathcal{J}$ est élémentaire.*

Preuve: Les implications (i) $\Rightarrow$ (ii) et (iii) $\Rightarrow$ (i) sont évidentes.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Un âge complètement indécomposable est indécomposable. D'après le théorème 2, l'âge $\mathscr{J}$ est soit élémentaire, soit étoilé. Pour conclure, on applique le lemme suivant :

LEMME 3.6 : *Si I est une section initiale non vide de E, alors I^* est un produit d'âges élémentaires.*

Preuve: Soit $\mathscr{H}=\{I_\alpha : \alpha<\kappa\}$ une famille d'idéaux de E dont la réunion est I, et soit $C=\kappa.\omega$ la somme ordinale de ω copies de κ. Soit $\zeta\in C$, cet élément s'écrivant $\zeta=(\alpha, n)$, posons $K_\xi=I_\alpha\cup\{1\}$. On vérifie facilement que $I^*=\prod(K_\xi : \zeta\in C)$. $\square$

4. QUELQUES CAS PARTICULIERS

PROPOSITION 4.1 : *Tout âge $\mathscr{A}$ dont la longueur des mots est bornée est un concaténat fini d'âges élémentaires.*

Preuve: Soit n égal au maximum de la longueur des mots de $\mathscr{A}$. Si $n=0$, alors $\mathscr{A}=\{1\}$ et on peut considérer que $\mathscr{A}$ est le concaténat d'une famille vide d'âges élémentaires. Supposons que $n\geqq 1$. Soit F l'ensemble des mots de $\mathscr{A}$ de longueur n. Puisque $\mathscr{A}$ est filtrant, l'ensemble F est filtrant et cofinal dans $\mathscr{A}$. Soit F_i l'ensemble des lettres a_i telles que a_i est la ième lettre d'un certain mot appartenant à F. Les F_i sont filtrants, en effet, soient a_i et b_i deux éléments de F_i. Il existe deux mots $x, y\in$ F tels que $x=a_1a_2...a_i...a_n$ et $y=b_1b_2...b_i...b_n$. Comme F est filtrant, il existe $z=c_1c_2...c_i...c_n$ appartenant à F qui abrite à la fois x et y. Donc $c_i\in F_i$ et comme x, y et z sont de même longueur, on a $a_i\leqq c_i$ et $b_i\leqq c_i$. Donc les $(\downarrow F_i\cup\{1\})$ sont des âges élémentaires. Posons

$$\mathscr{B}=(\downarrow F_1\cup\{1\})*(\downarrow F_2\cup\{1\})*...*(\downarrow F_n\cup\{1\})$$

et montrons que $\mathscr{A}=\mathscr{B}$. Soit x un élément de $\mathscr{A}$. Si $x=a_1a_2...a_n$ est un mot de longueur n, alors $x\in$ F et chaque $a_i\in F_i$. Donc $x\in\mathscr{B}$. Si $x=a_1a_2...a_k$ est un mot de longueur k, $k<n$, alors il existe k indices $i_1<i_2<...<i_k$ tels que

$$x\in(\downarrow F_{i_1}\cup\{1\})*(\downarrow F_{i_2}\cup\{1\})*...(\downarrow F_{i_k}\cup\{1\}).$$

En effet soit $y\in$ F qui abrite x. Posons $y=y_1y_2...y_n$. Pour $1\leqq i\leqq n$, $y_i\in F_i$. Soit i_1 le plus petit indice tel que $a_1\leqq y_{i_1}$, i_2 le plus petit indice supérieur à i_1 tel que que $a_2\leqq y_{i_2}$, i_k le plus petit indice supérieur à i_{k-1} tel que $a_k\leqq y_{i_k}$, on a $a_1\in F_{i_1}, a_2\in\downarrow F_{i_2}, ..., a_k\in\downarrow F_{i_k}$. Par ailleurs, l'opération $*$ étant croissante et extensive, il s'ensuit que $\mathscr{A}$ est inclus dans $\mathscr{B}$. Inversement, soit $x\in\mathscr{B}$ de longueur $k, k\leqq n$. Posons $x=a_{i_1}a_{i_2}...a_{i_k}$ avec $a_{i_j}\in\downarrow F_{i_j}$ pour tout j, $1\leqq j\leqq k$,

$i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ et $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout j, $1 \leqq j \leqq k$, il existe $b_{i_j} \in F_{i_j}$ tel que $a_{i_j} \leqq b_{i_j}$. Pour tout j, $1 \leqq j \leqq k$, soit $x_j = a_1^j a_2^j \ldots a_{i_j}^j \ldots a_n^j$ un élément de F tel que $a_{i_j}^j = b_{i_j}$. Comme F est filtrant, il existe $y = y_1 \ldots y_{i_1} \ldots y_{i_k} \ldots y_n$ appartenant à F qui abrite tous les x_j. Comme chaque $a_{i_j} \leqq b_{i_j}$, le mot x s'abrite dans y. Ceci implique que $x \in \mathscr{A}$. D'où $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{A}$. □

PROPOSITION 4.2 : *Soit $\mathscr{J}$ un âge de mots de E^*. Si $\mathscr{J}$ a un plus grand élément ou une chaîne cofinale de cofinalité non dénombrable, alors $\mathscr{J}$ est un concaténat fini d'âges élémentaires.*

Preuve. — Sous cette hypothèse, la longueur des mots de $\mathscr{J}$ est bornée. C'est clair lorsque $\mathscr{J}$ a un plus grand élément. Montrons le dans le cas où $\mathscr{J}$ a une chaîne cofinale de cofinalité κ non dénombrable. Pour cela, considérons une suite croissante cofinale de type κ, soit

$$u_0 < u_1 < \ldots < u_\alpha < \ldots \alpha < \kappa.$$

La suite des longueurs des mots est encore croissante, soit $l(u_0) \leqq l(u_1) \leqq \ldots \leqq l(u_\alpha) \leqq \ldots \alpha < \kappa$. Elle est stationnaire — et donc vaut m à partir d'un certain rang — ce, du fait que toute application croissante d'un ordinal de cofinalité non dénombrable dans l'ordinal ω est constante à partir d'un certain rang. Comme cette suite est cofinale, tout mot de $\mathscr{J}$ est de longueur au plus m. On applique la proposition 4.1 pour conclure. □

LEMME 4.3 : *Tout âge $\mathscr{J}$ de cofinalité au plus dénombrable est produit d'une famille d'âges élémentaires indexée par une chaîne finie ou dénombrable.*

Preuve: Soit $(u_n)_n$ une suite croissante cofinale dans $\mathscr{J}$. Pour chaque mot $u_n = u_{1\,n} u_{2\,n} \ldots u_{k_n\,n}$ de longueur k_n, considérons la chaîne

$$C_n = x_{1\,n} < x_{2\,n} < \ldots < x_{k_n\,n}$$

et une application croissante $f_{n+1,\,n}$ qui témoigne que u_n s'abrite dans u_{n+1} (Par exemple, pour le plus petit indice j_1 tel que $u_{1\,n} \leqq u_{j_1\,n+1}$, posons $f_{n+1,\,n}(x_{1\,n}) = x_{j_1\,n+1}$. Supposant défini $f_{n+1,\,n}(x_{k-1\,n})$, soit j_k le plus petit indice supérieur à j_{k-1} tel que $u_{kn} \leqq u_{j_k\,n+1}$, posons alors $f_{n+1,\,n}(x_{kn}) = u_{j_k\,n+1}$). Considérons le système inductif $(C_n, f_{n+1,\,n})_n$. Soit C la limite inductive de la famille $(C_n)_n$ pour la famille d'applications $(f_{n+1,\,n})_n$. C'est une chaîne dénombrable. Pour chaque $a \in C$, considérons $F_a = \{u_{ij}$ tel que $x_{ij} \in a\}$. Par définition de la limite inductive, les F_a sont filtrants. Posons $X_a = \downarrow F_a \cup \{1\}$. C'est un âge élémentaire. On vérifie que $\mathscr{J} = \prod (X_a : a \in C)$. □

5. ÂGES DE MOTS SUR UN ALPHABET BELORDONNÉ

Un ensemble ordonné P est *bien fondé*, si toute partie non vide a un élément minimal ou d'une manière équivalente si P ne contient pas de suite infinie strictement décroissante. L'ensemble P sera dit *belordonné* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes du théorème suivant dû à Higman :

THÉORÈME 5.1 (Higman [6]) : *Soit P un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *Toute partie non vide de P a un nombre fini (non nul) d'éléments minimaux.*

(ii) *L'ensemble P est bien fondé et n'a pas d'antichaîne infinie.*

(iii) *Tout segment final F de P est finiment engendré. (Ceci voulant dire qu'il existe une partie finie L de P telle que $F = \uparrow L$.)*

(iv) *Pour toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ d'éléments de P, il existe deux entiers $n < m$ tels que $x_n \leqq x_m$.*

(v) *Toute suite $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ d'éléments de P contient une sous-suite infinie croissante.*

(vi) *L'ensemble $F(P)$ des sections finales de P ordonné par inclusion inverse est bien fondé.*

(vii) *L'ensemble $I(P)$ des sections initiales ordonné par inclusion est bien fondé.*

Nous rappelons le théorème suivant également dû à Higman [6] (*voir* aussi [11], et pour une synthèse récente sur le belordre, *voir*, par exemple, [14]).

THÉORÈME 5.2 : *Si E est un alphabet belordonné, alors l'ensemble E^* des mots finis sur E muni de l'ordre d'abritement de Higman est belordonné.*

Nous rappelons enfin un résultat moins connu (*voir* [5]). Nous en rappelons la preuve : le même argument étant utilisé pour la preuve du théorème 1.

LEMME 5.3 : *Soit P un ensemble ordonné; P n'a pas d'antichaîne infinie si et seulement si toute section initiale est réunion finie d'idéaux.*

Preuve : La condition est suffisante puisqu'une section initiale engendrée par une antichaîne infinie ne peut être réunion finie d'idéaux. Pour la réciproque, supposons d'abord que P est belordonné auquel cas $I(P)$ est bien fondé; raisonnons par induction : si l'énoncé est faux, considérons une section initiale, minimale pour l'inclusion, qui en témoigne; mais alors celle-ci ne peut être réunion de deux sections initiales propres. D'après le lemme 1.1, c'est un idéal. Contradiction. Dans le cas général, utilisons le fait (remontant à Hausdorff) que tout ensemble ordonné contient une partie cofinale bien fondée. Soit J une section initiale de P et P_J une partie cofinale de J bien fondée. Puisque P_J est en fait belordonné, il est union finie d'idéaux, soit donc $P_J = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ où les P_i sont des idéaux de P_J. Les $(\leftarrow P_i]$ sont des idéaux dont la réunion est $J = (\leftarrow P_J]$. □

Preuve du théorème 1 : La condition que E est belordonné est nécessaire car si E n'est pas belordonné, alors deux cas sont possibles :

1^er^ *cas* : E contient une ω^*-chaîne, soit $C = a_1 > a_2 > \ldots$ Dans ce cas, considérons la section initiale $\mathscr{A}$ engendrée par le sous ensemble $X := \{a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, \ldots\}$ de E^*. C'est un âge et il n'est pas un concaténat fini d'âges élémentaires car la longueur des mots n'est pas bornée. Supposons que $\mathscr{A}$ est un concaténat fini d'âges, soit $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 * \mathscr{A}_2 * \ldots \mathscr{A}_n$. Le mot $a_1 a_2 \ldots a_n$ appartient à $\mathscr{A}$. Il existe j, $k \in \{1, 2 \ldots n\}$ tels que $\mathscr{A}_j$ est étoilé et $a_k \in \mathscr{A}_j$. D'après le lemme 2.2 le mot $a_k a_k \ldots a_k$ ($k+1$ fois) appartient à $\mathscr{A}_j$. Donc à $\mathscr{A}$. Or cet élément ne peut être majoré par aucun élément de X. Contradiction.

2^e^ *cas* : E contient une antichaîne infinie. Dans ce cas, soit $L = \{a_0, a_1, \ldots\}$ une ω-antichaîne de E. Soit $\mathscr{A}$ la section initiale engendrée par l'ensemble des mots $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}$ tels que $i_1 > i_2 > \ldots > i_k$. Par un raisonnement analogue au 1^er^ cas, on montre que $\mathscr{A}$ ne vérifie pas (ii).

Réciproquement, supposons que E est belordonné. Alors E^* l'est aussi (théorème 5.2) et l'ensemble des âges est donc bien fondé (théorème 5.1). Compte tenu du théorème 2, il nous suffit de montrer que tout âge est concaténat fini d'âges indécomposables. La preuve est identique à celle du lemme 5.3 : si un âge n'est pas un tel concaténat, alors puisque l'ensemble des idéaux est bien fondé, il y en a un qui est minimal pour l'inclusion, mais alors cet âge ne peut être concaténat de deux sous âges propres, et donc il est indécomposable. Contradiction. □

Une preuve directe du théorème 2 dans le cas d'un alphabet belordonné

Voici une preuve directe du théorème 2, évitant à la fois le recours à la résiduation (lemmes 2.6 et 2.7) et à la compacité (proposition 3.3).

Preuve de l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) *du théorème* 2 : Supposons que $\mathscr{I} = \mathscr{I}_1 * \mathscr{I}_2$ avec $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ sections initiales de E^*. Puisque E est belordonné, E^* n'a pas d'antichaîne infinie et $\mathscr{I}_1$ et $\mathscr{I}_2$ sont des réunions finies d'âges, soit $\mathscr{I}_1 = \bigcup \{ \mathscr{I}_{1j} : 1 \leqq j \leqq n \}$ et $\mathscr{I}_2 = \bigcup \{ \mathscr{I}_{2k} : 1 \leqq k \leqq n \}$. On a

$$\mathscr{J} = \mathscr{I}_1 * \mathscr{I}_2 = \bigcup \{ \mathscr{I}_{1j} * \mathscr{I}_{2k} : 1 \leqq j \leqq n, 1 \leqq k \leqq n \}$$

ce qui implique que $\mathscr{J} = \mathscr{I}_{1j} * \mathscr{I}_{2k}$ pour un certain

$$(j, k) \in \{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Si $\mathscr{J}$ est indécomposable, alors $\mathscr{J} = \mathscr{I}_{1j}$ ou $\mathscr{J} = \mathscr{I}_{2k}$. Si $\mathscr{J} = \mathscr{I}_{1j}$, alors $\mathscr{I}_{1j} \subseteq \mathscr{I}_1 \subseteq \mathscr{J}$ et donc $\mathscr{J} = \mathscr{I}_1$. De même si $\mathscr{J} = \mathscr{I}_{2k}$, on a $\mathscr{J} = \mathscr{I}_2$ et par suite $\mathscr{J}$ est fortement indécomposable. □

Pour la preuve de (ii) ⇒ (iii) nous utilisons les deux lemmes suivants :

Étant donnés n ensembles ordonnés $P_1, P_2, \ldots, P_n$, soit

$$P := P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$$

leur produit direct et pour chaque i, $1 \leqq i \leqq n$, soit pr_i la projection de P dans P_i (définie par $\mathrm{pr}_i (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$). On munit P de l'ordre cartésien : $x \leqq y$ si et seulement si $\mathrm{pr}_i (x) \leqq \mathrm{pr}_i (y)$ dans P_i pour tout i, $1 \leqq i \leqq n$.

LEMME 5.4 : *Si X est un idéal de $P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n$, alors les $\mathrm{pr}_1 (X), \ldots, \mathrm{pr}_n (X)$ sont des idéaux de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ respectivement et $X = \mathrm{pr}_1 (X) \times \ldots \times \mathrm{pr}_n (X)$.*

Preuve : Posons $X_i = \mathrm{pr}_i (X)$. Du fait que pr_i est croissante et X filtrant il s'ensuit que X_i l'est. Soient x_i dans P_i et y_i tels que $x_i \leqq y_i$. Prenons y dans X tel que $y_i = \mathrm{pr}_i (y)$; si dans cet n-uple on substitue la coordonnée y_i par x_i le n-uple x obtenu vérifie $x \leqq y$ donc est dans X; or $x_i = \mathrm{pr}_i (x)$ donc $x_i \in X_i$, ce qui prouve que X_i est une section initiale. Ainsi X_i est un idéal. Il est clair que $X \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Montrons l'autre inclusion. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un élément de $X_1 \times \ldots \times X_n$ et pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, soit $x^j = (x_1^j, \ldots, x_n^j)$ un élément de X tel que $x_j^j = x_j$. Comme X est filtrant, il existe $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tel que pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, $x^j \leqq y$. On a donc pour tout j, $1 \leqq j \leqq n$, $x_j^j \leqq y_j$. Donc $(x_1, \ldots, x_n) \leqq (y_1, \ldots, y_n)$ et puisque X est une section initiale, on a $x \in X$. □

LEMME 5.5 : *Soient E un alphabet ordonné, $\mathscr{J}$ un âge de E^* et $u = u_0 u_1 \ldots u_n$ un mot appartenant à $\mathscr{J}$ de longueur $n+1$. Si E^* est belordonné, alors il existe $2n+3$ âges de E^*, soient $\mathscr{I}_0 \mathscr{I}_1, \ldots, \mathscr{I}_{2n+2}$ vérifiant :*

(i) *Pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, $u_k \notin \mathscr{I}_{2k}$.*

(ii) *Pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, $u_k \in \mathscr{I}_{2k+1}$ et $\mathscr{I}_{2k+1}$ est un âge élémentaire.*

(iii) *$\mathscr{J} = \mathscr{I}_0 * \mathscr{I}_1 * \ldots * \mathscr{I}_{2n+2}$.*

Preuve : Soit F l'ensemble des $2n+3$-uples $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n+2})$ tels que :

(1) Pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, u_k ne s'abrite pas dans v_{2k}.

(2) Pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, u_k s'abrite dans v_{2k+1}.

(3) $v_0 * v_1 * \ldots * v_{2n+2} \in \mathscr{J}$.

L'ensemble F est non vide car $(1, u_0, 1, u_1, \ldots, u_n, 1)$ est un élément de F puisqu'il vérifie les trois conditions ci-dessus. Il est belordonné car c'est une partie de $(E^*)^{2n+3}$ qui est belordonné car E^* l'est. D'après le lemme 5.3, cet ensemble est une réunion finie d'idéaux, soit $F = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k$. Considérons l'application φ de F dans $\mathscr{J}$ qui à tout $2n+3$-uplet $(v_0, v_1, \ldots, v_{2n+2})$ fait correspondre le mot $v_0 * v_1 * \ldots * v_{2n+2}$ de $\mathscr{J}$. L'ensemble $\varphi(F)$ est cofinal dans $\mathscr{J}$, en effet, soit $z \in \mathscr{J}$. Comme $\mathscr{J}$ est filtrant, il existe un mot $v \in \mathscr{J}$ abritant à la fois u et z. En utilisant le lemme 1.2, v est un concaténat de $2n+3$ mots $v_0, v_1, \ldots, v_{2n+2}$ vérifiant les trois propriétés ci-dessus. Il existe $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tel que $\varphi(F_i)$ est cofinale dans $\mathscr{J}$, en effet, $\varphi(F)$ étant cofinale dans $\mathscr{J}$, on a

$$\begin{aligned}\mathscr{J} &= \downarrow F'' = \downarrow \varphi(F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k)\\ &= \downarrow \varphi(F_1) \cup \varphi(F_2) \cup \ldots \cup \varphi(F_k) = \downarrow \varphi(F_1) \cup \downarrow \varphi(F_2) \cup \ldots \cup \downarrow \varphi(F_k).\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1, on a $\mathscr{J} = \downarrow \varphi(F_i)$ pour un certain i. Or F_i est une section initiale du produit

$$\begin{aligned}\mathscr{H} = (E/\downarrow u_0)^* \times (\downarrow u_0 \cup \{1\}) \times (E/\downarrow u_1)^*\\ \times (\downarrow u_1 \cup \{1\}) \times \ldots \times (E/\downarrow u_n)^* \times (\downarrow u_n \cup \{1\}) \times E^*.\end{aligned}$$

Donc F_i est un idéal de $\mathscr{H}$. En utilisant le lemme 5.4, F_i est un produit $Y_0 \times Y_1 \times \ldots \times Y_{2n+2}$ où les Y_k vérifient : pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, Y_{2k} est un âge inclus dans $(E/\downarrow u_k)^*$, Y_{2k+1} est un âge élémentaire inclus dans $(\downarrow u_k \cup \{1\})$ et Y_{2n} est un âge quelconque de E^*. Il suffit alors de prendre $\mathscr{I}_r = \downarrow Y_r$ pour tout r, $1 \leqq r \leqq 2n+2$. □

Preuve de l'implication (ii) ⇒ (iii) *du théorème* 2 : Soit $\mathscr{J}$ un âge de E^* qui n'est pas élémentaire. Montrons que $\mathscr{J}$ est stable par concaténation. D'après le lemme 2.2, il suffit de démontrer que pour tout $u \in \mathscr{J}$, $u * u \in \mathscr{J}$. Soit alors $u = u_0 u_1 \ldots u_n$ un mot appartenant à $\mathscr{J}$ de longueur $n+1$. D'après le lemme 5.5, il existe $2n+3$ âges $\mathscr{I}_0, \mathscr{I}_1, \ldots, \mathscr{I}_{2n+2}$ vérifiant les trois propriétés (i), (ii) et (iii) de ce lemme. Si $\mathscr{J}$ est indécomposable, alors $\mathscr{J} = \mathscr{I}_j$ pour un certain $j \in \{0, 1, \ldots, 2n+2\}$. Or $u_k \notin \mathscr{I}_{2k}$ et $u_k \in \mathscr{J}$ pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$, on déduit que $j \neq 2k$ pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$ et comme les $\mathscr{I}_{2k+1}$ sont des âges élémentaires, on déduit aussi que $j \neq 2k+1$ pour tout k, $0 \leqq k \leqq n$.

Donc $j=2n+2$ c'est-à-dire $\mathscr{J}=\mathscr{I}_{2n+2}$. Comme $u\in\mathscr{I}_0*\mathscr{I}_1*\ldots*\mathscr{I}_{2n+1}$, on a $u*\mathscr{J}\subseteq\mathscr{J}$. On déduit que $u*u\in\mathscr{J}$. □

6. GÉNÉRALISATION AUX MONOÏDES ORDONNÉS

On peut voir E^* comme le monoïde libre engendré par E. Donc, au lieu de E^*, on peut considérer plus généralement un monoïde ordonné, c'est-à-dire un ensemble M muni d'un ordre $\leqq$ et d'une opération de monoïde: $(x,y)\rightarrow x.y$ (associative et admettant un élément neutre, que nous notons 1) qui préserve l'ordre, c'est-à-dire telle que: $x\leqq x'$ et $y\leqq y'$ implique $x.y\leqq x'.y'$ pour tout $x,x',y,y'\in M$. On peut étendre cette opération à l'ensemble $J^+(M)$ de tous les idéaux non vides de l'ensemble ordonné M en posant $I.J=\downarrow\{x.y:x\in I,y\in J\}$. Une fois $J^+(M)$ ordonné par inclusion, il devient un monoïde ordonné dont l'élément neutre est $\downarrow\{1\}$, en outre M s'identifie à un sous-monoïde de $J^+(M)$ par le plongement $x\rightarrow\downarrow\{x\}$.

Dans tout monoïde N, et donc dans M et dans $J^+(M)$, on peut définir une notion d'indécomposabilité (aussi appelée irréductibilité): un élément u d'un monoïde est dit *indécomposable* si: $u=x.y$ implique $u=x$ ou $u=y$. Avec cette définition, l'élément neutre 1 peut être indécomposable. Pour diverses raisons, il est d'usage d'exclure 1; nous désignons par $\mathrm{Ind}(N)$ l'ensemble des éléments indécomposables de N privé de 1.

LEMME 6.1 : *L'ensemble* $\mathrm{Ind}(N)$ *est contenu dans toute partie X engendrant N (l'engendrement étant pris au sens que tout élément de N est un produit fini d'éléments de X). Réciproquement,* $\mathrm{Ind}(N)$ *engendre N si N peut être muni d'un ordre satisfaisant les conditions suivantes:*

(1) *L'ordre est compatible avec l'opération du monoïde, c'est-à-dire N devient un monoïde ordonné.*

(2) 1 *est le plus petit élément de N.*

(3) *L'ordre est bien fondé.*

Preuve: En raison de (2), l'opération du monoïde est extensive, c'est-à-dire $x, y\leqq x.y$ pour tout $x,y\in N$, et on peut raisonner comme au lemme 5.3. □

Si M est le monoïde libre E^*, alors $\mathrm{Ind}(M)=E$, et on a vu que $\mathrm{Ind}(J^+(M))$ est, en substance, formé d'une part des idéaux non vides de $\mathrm{Ind}(M)$ et d'autre part des étoiles des sections initiales non vides de $\mathrm{Ind}(M)$. Ce résultat s'insère dans le cadre suivant: partant d'un monoïde ordonné M, décrire les indécomposables de $J^+(M)$ au moyen de construction sur des parties bien choisies de $\mathrm{Ind}(M)$. C'est ce problème que nous étudions maintenant. Au préalable :

LEMME 6.2 : *Soit M un monoïde, ordonné de sorte que l'élément unité soit le plus petit élément de M. Soit $X \subseteq M$ et soit φ l'application de X^* dans M qui au mot $u_1 u_2 \ldots u_n$ associe $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_n) = u_1 . u_2 \ldots u_n$ et au mot vide associe l'élément unité de M. Si X engendre M, alors pour tout idéal I non vide de M, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $I = I.I$

(ii) $I = \varphi(L^*)$ *où L est une section initiale de X.*

(iii) $I = \downarrow \varphi(K^*)$ *où K est une partie de X.*

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Posons $L = I \cap X$. Puisque l'opération « . » est extensive (1 est le plus petit élément) et croissante, l'application φ est croissante et $\varphi(L^*) \subseteq I$. Voyons que $I \subseteq \varphi(L^*)$. Pour cela, soit $u \in I$. Puisque X engendre M, l'élément u s'écrit $u_1 . u_2 \ldots u_n$ avec $u_i \in X$. On a donc $u = \varphi(u_1 u_2 \ldots u_n)$. Puisque . est extensive et I est une section initiale, on a $u_i \in I$ donc $u_i \in I \cap X$ pour tout i. Donc $u \in \varphi(L^*)$.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Évident.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supposons que $I = \downarrow \varphi(K^*)$ pour une partie K de X. Puisque $\{a.b : a \in \downarrow \varphi(K^*),\ b \in \downarrow \varphi(K^*)\} \subseteq \downarrow \varphi(K^*)$, on a $I.I = \downarrow \{a.b : a \in \downarrow \varphi(K^*),\ b \in \downarrow \varphi(K^*)\} \subseteq \downarrow \varphi(K^*) = I$ et puisque $1 \in I$, on a $I \subseteq I.I$. Donc $I = I.I$. □

Remarque : Un idéal de M satisfaisant l'une des conditions ci-dessus n'est pas forcément indécomposable. En effet, l'opération « . » étant extensive, l'ensemble M lui-même est un idéal qui trivialement, satisfait la condition (i), alors qu'il peut, par exemple, être le produit de deux monoïdes. Pour obtenir un exemple, le plus simple est de prendre $M = a^* \times b^*$ ($\simeq \mathbb{N}^2$) muni de l'ordre produit.

PROPOSITION 6.3 : *Si I est un idéal non vide de M et M est belordonné, alors il y a équivalence entre :*

(i) *Pour tout $u \in I$, il existe $v \in I$ avec $v \geqq u$ tel que pour tout v_1, v_2 satisfaisant $v_1 . v_2 \in I$: si $v_1 . v_2 \geqq v$, alors $v_1 \geqq u$ ou $v_2 \geqq u$.*

(ii) *I est indécomposable.*

Preuve : non (ii) $\Rightarrow$ non (i). Supposons que I n'est pas indécomposable. Soient I_1, I_2 deux idéaux inclus strictement dans I avec $I = I_1 . I_2$. Choisissons $u \in I$ tel que $u \notin I_1$ et $u \notin I_2$. Soient $v_1 \in I_1$ et $v_2 \in I_2$ et $v = v_1 . v_2$ tels que $u \leqq v$. Puisque $u \notin I_1$ et $u \notin I_2$, l'élément u n'est inférieur ni à v_1 ni à v_2.

non (i) $\Rightarrow$ non (ii). Soit $u \in I$ et soit F l'ensemble des couples (v_1, v_2) tels que $v_1 . v_2 \in I$ et $v_1, v_2 \notin \uparrow u$. Puisque on suppose non (i), on peut choisir u de sorte que F soit non vide. Considérons l'application φ de F dans I qui à tout couple (v_1, v_2) de F fait correspondre l'élément $v_1 . v_2$ de I. L'ensemble $\varphi(F)$ est cofinal dans I. En effet, soit $x \in I$; puisque I est filtrant, il existe $v \in I$ qui majore u et x. La négation de (i) implique qu'il existe v_1, v_2 tel que $v_1 . v_2 \in I$, $v_1 . v_2 \geqq v$ et v_1, $v_2 \notin \uparrow u$. Ainsi on a $(v_1, v_2) \in F$ et $x \leqq v_1 . v_2 = \varphi(v_1, v_2)$. L'ensemble F est belordonné car c'est une partie de $M \times M$. D'après le lemme 5.3, cet ensemble est une réunion finie d'idéaux, soit $F = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n$. Puisque $\varphi(F)$ est cofinal dans I et puisque I est un idéal, il existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $\varphi(I_j)$ est cofinal dans I. En effet, $\varphi(F)$ étant cofinal dans I, on a:

$$\begin{aligned} I = \downarrow \varphi(I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_n) = \downarrow (\varphi(I_1) \cup \varphi(I_2) \cup \ldots \cup \varphi(I_n)) \\ = \downarrow \varphi(I_1) \cup \downarrow \varphi(I_2) \cup \ldots \cup \downarrow \varphi(I_n). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 1.1, on a $I = \downarrow \varphi(I_j)$ pour un certain j. L'ensemble F est une section initiale du produit $(M \setminus \uparrow u)^2$. Donc I_j est un idéal de cet ensemble. En utilisant le lemme 5.4, cet idéal est un produit $L_j \times K_j$ avec L_j, K_j idéaux de $(M \setminus \uparrow u)$. Donc $I = \downarrow \varphi(I_j) = \downarrow \varphi(L_j \times K_j) = \downarrow L_j . \downarrow K_j$. L'idéal I n'est pas indécomposable. $\square$

Remarque: On peut voir aisément que tout âge de mots vérifiant (i), et contenant des mots de longueur au moins 2, est étoilé. Cette proposition conduit donc à une preuve du théorème 2 lorsque l'alphabet est belordonné.

PROBLÈME: Est-ce que l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) subsiste si M n'est pas belordonné?

THÉORÈME 6.4: *Si* 1 *est le plus petit élément de M et M est belordonné, alors*:

(1) *Tout idéal non vide est produit fini d'idéaux indécomposables.*

(2) *Si X engendre M en tant que monoïde et si I est un idéal indécomposable, alors soit $I = \downarrow K$ où K est un idéal de X, soit $I = K^*$ où K est une section initiale de X.*

Preuve: (1) Si M est belordonné, alors l'ensemble $I(M)$ des sections initiales de M est bien fondé, donc $J^+(M)$ est également bien fondé. On peut lui appliquer le lemme 6.1.

(2) Soit φ l'application de X^* dans M qui au mot $u_1 u_2 \ldots u_n$ associe $\varphi(u_1 u_2 \ldots u_n) = u_1 . u_2 \ldots u_n$ et soit $J = \varphi^{-1}(I)$. L'ensemble X étant muni de l'ordre induit par celui de M, munissons X^* de l'ordre de Higman. Comme φ est croissante et I est une section initiale de M, il s'ensuit que J est une section initiale de X^* et puisque φ est surjective, on a $I = \varphi(J)$. Considérons l'ensemble $\mathscr{K}$ des sections initiales J' de X^* telles que $I = \downarrow \varphi(J')$. Cet ensemble

contient J. Puisque l'ensemble des sections initiales de X^* est bien fondé (X est belordonné), l'ensemble $\mathscr{K}$ a un élément minimal J_0. Cette section initiale est en fait un idéal de X^*, indécomposable dans $J(X^*)$. En effet, si $J_0 = J' \cup J''$, avec J', J'' sections initiales, alors $I = \downarrow \varphi(J_0) = \downarrow \varphi(J') \cup \downarrow \varphi(J'')$ et puisque I est un idéal, on a $I = \downarrow \varphi(J')$ ou $I = \downarrow \varphi(J'')$. Puisque J_0 est minimal, on a $J_0 = J'$ ou $J_0 = J''$. Donc J_0 est un idéal. Maintenant si $J_0 = J' * J''$ avec J', J'' idéaux de X^*, alors

$$I = \downarrow \varphi(J_0) = \downarrow \varphi(J' * J'') = \downarrow (\varphi(J') . \varphi(J'')) = \downarrow \varphi(J') . \downarrow \varphi(J'').$$

Puisque I est indécomposable, il est égal à l'un d'eux. Comme J_0 est minimal, il est égal soit à J', soit à J'', ce qui prouve qu'il est indécomposable. D'après le théorème 2, les idéaux indécomposables de X^* sont de la forme $K \cup \{1\}$ où K est un idéal de X ou de la forme K^* où K est une section initiale de X. Dans le premier cas I est de la forme $\downarrow K$. Dans le deuxième cas, on a $I = \downarrow K^*$. On applique alors le lemme 6.1 pour conclure. □

Problèmes : 1. La condition (2) du théorème 6.4 reste-t-elle vraie sans l'hypothèse que M est belordonné?

2. Est-ce que tout idéal J de $J^+(M)$ est un produit, éventuellement infini, d'idéaux de la forme $\downarrow K$ où K est un idéal de X?

7. GÉNÉRALISATION ÉVENTUELLE AUX ALGÈBRES ORDONNÉES

Au lieu d'une opération de monoïde, on peut considérer une opération binaire et plus généralement, une opération d'arité quelconque sur un ensemble A, c'est-à-dire une application $f: A^n \to A$ où $n = \mathbf{a}(f)$ est un entier désignant l'arité de f et au lieu d'une seule opération on peut en considérer plusieurs. Ainsi considérons une *algèbre*, c'est-à-dire un couple $(A, \mathscr{F})$ où A est un ensemble muni d'un ensemble $\mathscr{F}$ d'opérations. Disons qu'un élément $a \in A$ est *$\mathscr{F}$-indécomposable* ou plus brièvement *indécomposable* s'il n'existe pas $f \in \mathscr{F}$, $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ avec $n = \mathbf{a}(f)$ et $a_i \neq a$ pour tout i tels que $a = f(a_1, \ldots, a_n)$. (Ou si l'on préfère : pour tout $f \in \mathscr{F}$ et pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ avec $n = \mathbf{a}(f)$, $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ implique $a = a_i$ pour au moins un i.) Ainsi un élément a est $\mathscr{F}$-indécomposable s'il est $\{f\}$-indécomposable pour tout $f \in \mathscr{F}$. Avec cette défnition, les constantes, c'est-à-dire les images des applications 0-aires appartenant à $\mathscr{F}$ ne sont pas indécomposables.

Disons qu'une partie X *engendre* A en tant qu'algèbre si A est la seule partie contenant X et préservée par les opérations $f \in \mathscr{F}$. Comme on l'a vu en 6.1 dans le cas d'un monoïde, on a :

PROPOSITION 7.1 : *Soit* $(A, \mathscr{F})$ *une algèbre.*

(1) *Si* X *engendre* A, *alors l'ensemble* $\mathrm{Ind}(A)$ *des éléments indécomposables de* A *est inclus dans* X.

(2) *Si* A *peut être muni d'un ordre pour lequel les opérations sont :*

(*a*) *croissantes, c'est-à-dire :* $x_1 \leqq x'_1, \ldots, x_n \leqq x'_n$ *implique*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leqq f(x'_1, \ldots, x'_n)$$

(*b*) *extensives, c'est-à-dire :* $x_1, \ldots, x_n \leqq f(x_1, \ldots, x_n)$
(*ceci pour tout* $x_1, \ldots, x_n \in A, x'_1, \ldots, x'_n \in A$, *tout* $n < \omega$ *et toute* $f \in \mathscr{F}$ *telle que* $\mathbf{a}(f) = n$) *et si cet ordre est bien fondé, alors* $\mathrm{Ind}(A)$ *engendre* A.

Preuve : (1) Pour $x \in \mathrm{Ind}(A)$, considérer un « terme » de longueur minimale, c'est-à-dire un élément de l'algèbre libre engendrée par X qui donne x.

(2) Raisonner comme au lemme 5.3, en considérant un élément minimal de $A \setminus Y$ où Y est l'algèbre engendrée par $\mathrm{Ind}(A)$. □

Partant d'une algèbre ordonnée satisfaisant (*a*) et (*b*) de 7.1, on étend chaque opération à l'ensemble $J(A)$ des idéaux de A en posant $f(I_1, \ldots, I_n) = \downarrow \{f(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in I_i\}$. Ces opérations restent croissantes et extensives. Dans ce cadre se pose le problème du rapport entre les indécomposables de A et les indécomposables de $J(A)$ (Ceux-ci étant donc les idéaux I de $J(A)$ tels qu'il n'existe pas de $f \in \mathscr{F}$ et de $I_1, \ldots, I_n$ distincts de I vérifiant $I = f(I_1, \ldots, I_n)$. Il a été démontré par Higman [6] que si A est une algèbre ordonnée (comme ci-dessus), si $\mathscr{F}$ est fini et si X est une partie belordonnée qui engendre A, alors A est belordonnée; par conséquent si $\mathrm{Ind}(A)$ est belordonné et engendre A, alors $\mathrm{Ind}(J(A))$ engendre $J(A)$.

PROBLÈMES : 1. Supposons $\mathscr{F}$ fini. Soit $\mathscr{F}^\wedge$ le plus petit ensemble d'opérations sur A contenant (1) les fonctions 0-aires dont la valeur est dans Ind(A), (2) les éléments de $\mathscr{F}$, et qui est clos par l'action de $\mathscr{F}$ (c'est-à-dire qui est clos par composition).

1.a. Soit $I \in \mathrm{Ind}(J^+(A))$. Si A est belordonné, est-il vrai que I est le plus petit ensemble contenant une partie X de $\mathrm{Ind}(A)$ et clos par un certain sous-ensemble de $\mathscr{F}^\wedge$.

1.b. Est-ce que cette conclusion a lieu sans l'hypothèse que A est belordonné?

2. Étendre cette approche à un ensemble non nécessairement fini d'opérations mais ordonné comme dans la version de P. M. Cohn du théorème de Higman-Kruskal (*voir* [2], exercice 10, p. 125).

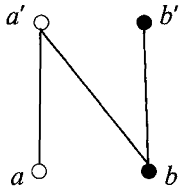
8. L'ALGÈBRE DES RELATIONS BINAIRES FINIES

Le cadre ci-dessus n'est pas artificiel. Un modèle est formé par la théorie des relations. Considérons par exemple la classe Ω_2 des relations binaires finies. Nous l'ordonnons par abritement (*cf.* 1 et lemme 1.3). Étant données une famille $(S_i)_{i\in I}$ de relation binaire S_i de base E_i et une relation binaire S de base I, la *somme lexicographique* de cette famille *suivant* S est la relation R notée $\sum(S_i : i\in S)$, de base la réunion disjointe des E_i, et telle que pour tout $x_i\in E_i$ et $y_j\in E_j$, on ait: $R(x_i, y_j)=+$, lorsque soit $i=j$ et $S_i(x_i, y_i)=+$, soit $i\neq j$ et $S(i,j)=+$. On peut associer à chaque relation binaire S «l'opération»: *somme lexicographique suivant* S ou tout simplement, *somme suivant* S, que nous désignons par $\sum_S$. Ainsi partant d'un ensemble $\mathcal{S}$ de relations binaires finies, nous pouvons munir Ω_2 d'une structure d'algèbre ordonné comme ci-dessus. Une relation R est *S-indécomposable* si R n'a pas de décomposition en une somme suivant S, c'est-à-dire, $R=\sum(S_i : i\in S)$ implique $R=R_i$ pour au moins un i (dans le cas contraire, on dit que R est *S-décomposable*). Elle est *$\mathcal{S}$-indécomposable* si elle est S-indécomposable pour tout $S\in\mathcal{S}$. Les éléments (non vides) de $J(\Omega_2)$ sont les âges de Fraïssé; chaque opération $\sum_S$ s'étend à $J(\Omega_2)$ en posant

$$\sum(\mathcal{A}_i : i\in S)=\downarrow\{\sum(R_i : i\in S) : R_i\in\mathcal{A}_i\}.$$

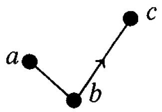
Un âge est *S-indécomposable* si pour toute famille $(\mathcal{A}_i)_{i\in S}$ d'âges de Ω_2, la décomposition $\mathcal{A}=\sum(\mathcal{A}_i : i\in S)$ implique $\mathcal{A}=\mathcal{A}_i$ pour au moins un i. Il est *$\mathcal{S}$-indécomposable* s'il est S-indécomposable pour tout $S\in\mathcal{S}$. Enfin il est *indécomposable* s'il est S-indécomposable pour toute relation binaire finie S. La question se pose de caractériser les âges indécomposables.

Exemples: (1) Prenons $\mathcal{S}$ formée de l'antichaîne à deux éléments, la chaîne à deux éléments et le graphe complet à deux éléments. Les opérations correspondantes sont respectivement la «somme directe», la «somme ordinale» et la «somme complète» que nous notons respectivement $\perp\!\!\!\perp$, $+$ et $\oplus$ (Noter que réciproquement si S est une relation binaire à deux éléments, alors $\sum_S$ est forcément l'une de ces trois opérations). Si X est formée de la chaîne vide et des chaînes à un élément, alors l'algèbre engendrée par X au moyen des deux opérations somme directe et somme ordinale est la classe des ordres qui n'abritent pas l'ensemble ordonné représenté ci-dessous $(a<a', b<a', b')$:



Si X est formée du graphe vide et des graphes à un élément, alors l'algèbre engendrée par X au moyen des deux opérations la somme directe et la somme complète est la classe des graphes finis ne contenant pas le chamin P_3 (chemin à quatre sommets). Ces ordres et ces graphes sont dits : *série-parallèles.*

(2) Soit S la relation suivante :



et soit R la relation obtenue comme somme suivant S de trois copies d'une antichaîne infinie. La relation R est indécomposable par somme directe, ordinale et complète mais elle est décomposable suivant S.

On a l'analogue de la proposition 6.3 :

THÉORÈME 8.1 : *Soit S une relation binaire finie. Étant donnée une relation binaire R d'âge $\mathscr{A}$, il y a équivalence entre* :

(i) *$\mathscr{A}$ est S-indécomposable.*

(ii) *Pour toute décomposition de R en une somme suivant S, soit $R=\sum(R_i : i\in S)$, il existe $i\in S$ tel que R_i est d'âge $\mathscr{A}$.*

(iii) *Pour tout $R'\in\mathscr{A}$, il existe $R''\in\mathscr{A}$ telle que $R''\geqq R'$ et pour toute décomposition $\sum(R_i : i\in S)$ appartenant à $\mathscr{A}$ si $\sum(R_i : i\in S)\geqq R''$, alors il existe $i\in S$ tel que $R_i\geqq R'$.*

Preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $R=\sum(R_i : i\in S)$ une décomposition de R. Soit $\mathscr{A}$ l'âge de R et pour chaque $i\in S$, soit $\mathscr{A}_i$ l'âge de R_i. Comme on le vérifie facilement, on a $\mathscr{A}=\sum(\mathscr{A}_i : i\in S)$. Le résultat s'ensuit.

non (iii) $\Rightarrow$ non (ii). On utilise un argument de compacité. Soit R' une relation qui témoigne de « non (iii) ». Soit E la base de R et I celle de S. Pour chaque $f: E\to I$ et $i\in I$, on pose $R_i=R/f^{-1}(i)$. Pour toute partie finie F de E, soit $\mathscr{V}_F$ l'ensemble des applications $f: E \to I$ telles que :

(1) $R/F = \sum(R_i/F : i \in S)$ et (2) R_i/F n'abrite pas R'.

L'hypothèse non (iii) implique que chaque $\mathscr{V}_F$ est non vide. Les intersections finies de ces $\mathscr{V}_F$ sont non vides (observer que

$$\mathscr{V}_{F_1} \cap \mathscr{V}_{F_2} \ldots \cap \mathscr{V}_{F_n} \supseteq \mathscr{V}_{F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_n}).$$

Enfin ces $\mathscr{V}_F$ sont des fermés de l'espace topologique I^E (où I est muni de la topologie discrète). Comme I^E est compact, l'intersection de tous ces $\mathscr{V}_F$ est non vide. Si f est un élément de cette intersection, alors $R = \sum(R_i : i \in S)$ et l'âge de R_i est strictement inclus dans $\mathscr{A}$ pour chaque $i \in S$.

non (i) $\Rightarrow$ non (iii). Soit $\mathscr{A} = \sum(\mathscr{A}_i : i \in S)$ une décomposition de sorte que chaque $\mathscr{A}_i$ soit un âge strictement inclus dans $\mathscr{A}$. Pour chaque $i \in S$, soit $T_i \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}_i$. Choisissons un $T' \in \mathscr{A}$ avec $T' \geqq T_i$ pour tout i. Puisque $T' \in \mathscr{A}$, il existe une décomposition $\sum(R_i : i \in S)$ appartenant à $\mathscr{A}$ avec $R_i \in \mathscr{A}_i$ pour tout i telle que $\sum(R_i : i \in S) \geqq T'$. Or aucune des R_i ne peut majorer T''. Donc T' est un élément de $\mathscr{A}$ qui ne vérifie pas (iii). □

Étant données une relation binaire finie S d'au moins deux éléments et une partie X de Ω_2 contenant le vide, la plus petite partie contenant X et stable par $\sum_S$ est un âge. Si une classe est stable par $\sum_S$, alors elle est stable par toutes les $\sum_{S/F}$ où F décrit toutes les parties à deux éléments de S lesquelles sommes sont soit des sommes directes, soit des sommes ordinales, soit des sommes complètes.

THÉORÈME 8.2 : *Soit $\mathscr{A}$ un âge de Ω_2. Si $\mathscr{A}$ est stable soit par somme ordinale, soit par somme directe et somme complète, alors $\mathscr{A}$ est indécomposable.*

Preuve: Supposons que $\mathscr{A}$ est non indécomposable et considérons S de taille minimale n pour laquelle $\mathscr{A}$ est S-décomposable. Soit R une relation d'âge $\mathscr{A}$ et $\sum(R_i : i \in S)$ une décomposition de R de sorte que l'âge $\mathscr{A}_i$ de R_i est strictement inclus dans $\mathscr{A}$ (théorème 8.2). Pour chaque $i \in S$, soit $\mathscr{B}_i$ l'âge de $\sum(R_j : j \in S - \{i\})$. A cause de la minimalité, on a $\mathscr{B}_i \neq \mathscr{A}$. Puisque $\mathscr{A}$ est filtrant, on a $\bigcup\{\mathscr{B}_i : i \in S\} \neq \mathscr{A}$. Soit $T \in \mathscr{A} \setminus \bigcup\{\mathscr{B}_i : i \in S\}$. Soit σ l'une des opérations pour lesquelles l'âge est clos, et soit $U = T \sigma T$ la somme de deux copies de T. Puisque $U \in \mathscr{A}$, on a $U \leqq R$. Il existe donc une partie de la base de R telle que R/F est isomorphe à U. L'ensemble F se décompose en deux parties F' et F'' telles que $R/F = R/F' \sigma R/F''$ avec R/F' isomorphe à T et R/F'' isomorphe à T. Chaque base E_i de R_i contient au moins un élément de F' et de F'', soient x_i' et x_i''. En effet, par construction, R/F' est isomorphe à T, or T n'appartient pas à l'âge de $\sum(R_j : j \in S - \{i\})$, donc F' intersecte E_i. De même F'' intersecte E_i.

Cas 1 : σ est la somme ordinale. On a donc pour tout $x' \in F'$ et $x'' \in F''$, $R(x', x'') = +$ et $R(x'', x') = -$. En particulier si i et j sont deux indices différents, on a $R(x'_i, x''_j) = +$. Puisque $i \neq j$ et $R(x'_i, x''_j) = +$, on a $S(i,j) = +$ et puisque $i \neq j$ et $R(x'_j, x''_i) = +$, on a aussi $S(j, i) = +$. Or R est somme suivant S, il s'ensuit que $R(x''_j, x'_i) = +$. Contradiction.

Cas 2 : σ est la somme directe ou la somme complète. Sans perdre de généralité, supposons que σ soit la somme directe. Par le même argument ci-dessus, on obtient que $S(i,j) = -$ pour tout $i \neq j$. Par la minimalité de S, on obtient que S a exactement deux éléments ($n=2$). En effet, fixons i dans S.

Nous pouvons écrire $\sum(R_j : j \in S) = R_i \perp\!\!\perp R_i^*$ avec $R_i^* = \sum(R_j : j \in S - \{i\})$ et l'âge de R_i^* égal à l'âge de $\sum(R_j : j \in S - \{i\})$. Donc par minimalité, la relation S a exactement deux éléments i, j et $S(i,j) = S(j, i) = -$ et par conséquent R est la somme directe $R_i \perp\!\!\perp R_j$. Ainsi si l'âge $\mathscr{A}$ est S-décomposable et stable par somme directe, alors $\mathscr{A}$ se décompose en « somme directe » de deux âges plus petits. La même démonstration donne que si $\mathscr{A}$ est stable par somme complète et s'il est décomposable, alors il est « somme complète » de deux âges plus petits. Par conséquent s'il est stable par somme directe et somme complète, il est forcément indécomposable. Sinon, il contiendrait une relation se décomposant de façon non triviale en une somme directe et une somme complète, ce qui est impossible, puisque si une relation est somme directe de deux restrictions non vides, elle n'est pas connexe, tandis que si elle est somme complète, elle est connexe. □

Remarque : Si on prend la relation binaire somme directe d'une antichaîne infinie et d'un indépendant infini (graphe dont les sommets sont deux à deux non liés), alors l'âge de cette relation est stable par somme directe et n'est pas indécomposable, puisque sur l'antichaîne la relation est réflexive et sur l'ensemble indépendant, elle est irréflexive.

COROLLAIRE 8.3 : *Sont indécomposables* :

(1) *l'âge* Ω_2 *des relations binaires finies.*

(2) *l'âge des chaînes finies.*

(3) *l'âge des ordres.*

(4) *l'âge des ordres série-parallèles.*

(5) *l'âge des graphes.*

(6) *l'âge des graphes série-parallèles.*

PROBLÈME : Soit $\mathscr{A}$ un âge $\mathscr{S}$-indécomposable. Est-il vrai que soit il existe une partie cofinale de $\mathscr{A}$ formée de relations $\mathscr{S}$-indécomposables, soit $\mathscr{A}$ est stable par $\sum_{S}$ pour un certain $S \in \mathscr{S}$?

REMERCIEMENTS

Les auteurs ont plaisir à remercier les arbitres pour leur examen soigneux de ce texte, leurs suggestions, remarques et corrections.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. J. BANDELT, M. POUZET, The MacNeille Completion of the Collection of Words Over an Ordered Alphabet, manuscrit, 1990.
2. P. M. COHN, Universal Algebra, M.I.A., *6*, Reidel, Dordrecht, 1981.
3. R. FRAÏSSÉ, Cours de Logique Mathématique, *1*, Relation et formule logique, Gauthier-Villars, Paris, 1971, trd. anglaise Reidel, Dordrecht, 1973.
4. R. FRAÏSSÉ, Cours de Logique Mathématique, *2*, Théorie des modèles, Gauthier-Villars, Paris, 1971, trd. anglaise Reidel, Dordrecht, 1973.
5. R. FRAÏSSÉ, Theory of Relations. Studies in Logic, *118*, North-Holland, Amsterdam, 1986.
6. G. HIGMAN, Ordering by Divisibility in Abstract Algebra, *Proc. London Math. Soc.*, *2*, 1952, p. 326-336.
7. E. JAWHARI, D. MISANE et M. POUZET, Retracts: Graphs and Ordered Sets from the Metric Point of View, *in* Combinatorics and Ordered Sets, I. RIVAL éd., *Contemp. Math.*, *57*, A.M.S., 1986, p. 175-226.
8. J. TECH, Set Theory, Academic Press, New York, 1978.
9. P. JULLIEN, Sur un théorème d'extension dans la théorie des mots, *C.R. Acad. Sci. Paris*, *266*, série A, 1968, p. 851-854.
10. P. JULLIEN, Contribution à l'étude des types d'ordres dispersés, *Thèse* de doctorat, Marseille, 1969.
11. J. B. KRUSKAL, Well-Quasi-Ordering, the Tree Theorem and Vazsonyi's Conjecture, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *95*, 1960, p. 210-225.
12. M. LOTHAIRE, Combinatorics on words, *Encyclopedia Math. Appl.*, *17*, Addison-Wesley, 1983.
13. E. C. MILNER et M. POUZET, On the Cofinality of Partially Ordered Sets, *in* Ordered sets, I. RIVAL ed., Reidel ASI, *83*, 1982, p. 279-297.
14. E. C. MILNER, Basic wqo-and bqo-Theory, *in* Graphs and Order, I. RIVAL ed., Reidel ASI, *147*, 1985, p. 487-502.
15. C. St. J. A. NASH-WILLIAMS, On Well-Quasi-Ordering Finite Trees, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, *59*, 1963, p. 833-835.
16. B. POIZAT, Cours de théorie des modèles, Nur-al-mantiqwal-ma'rifah, Villeurbanne, 1985.
17. A. QUILLIOT, An Application of the Helly Property to the Partially Ordered Sets, *J. Combin. Theory. Ser. A*, *35*, 1983, p. 185-198.
18. F. SAÏDANE, Graphes et langages : une approche métrique, *Thèse de diplôme de doctorat*, Lyon, novembre 1991, n° 206-91.