RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

DIDIER ARQUES
ISABELLE JACQUES

Solides non organisés : définition, implantation et plongement

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 25, nº 3 (1991), p. 219-246
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1991__25_3_219_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 25, n° 3, 1991, p. 219 à 246)

SOLIDES NON ORGANISÉS : DÉFINITION, IMPLANTATION ET PLONGEMENT (*)

par Didier ARQUES [1] et Isabelle JACQUES [1]

Communiqué par R. CORI

Résumé. – *La modélisation* 3 *D de solides est actuellement caractérisée par de nombreux travaux se situant au niveau topologique et utilisant la richesse des outils de la théorie des cartes pour traduire à l'aide d'un schéma de représentation combinatoire le solide topologique sous-jacent au solide géométrique.*

Nous proposons ici un tel schéma de représentation combinatoire (et la structure de données naturellement associée) qui permet de traduire tout solide topologique à l'aide d'un couple de permutations agissant sur l'ensemble des sections frontières, traduisant respectivement l'organisation des faces (resp. des arêtes) autour de chaque arête (resp. face). Nous caractérisons le domaine, et les propriétés d'unicité et de non-ambiguïté de ce schéma. L'étude (usuellement difficile) de sa validité (plongeabilité, dans $\mathbb{R}^3$, *d'un solide combinatoire donné) est résolue dans le cadre des solides combinatoires effeuillables qui sont prouvés être plongeables si et seulement si les cartes définissant les sommets du solide combinatoire sont planaires. Une classe particulière de tels solides effeuillables est énumérée par la suite de Schröder-Etherington.*

L'étude de ces solides effeuillables, généralisant la notion 2 *D classique d'arbre, nous a conduit à définir une notion de « solide non organisé » qui est au solide topologique ce qu'un graphe est à une carte. Ce niveau « Non Organisé » en amont du niveau d'étude topologique précité semble n'avoir jamais été abordé. Nous le détaillons du point de vue combinatoire et algorithmique et montrons qu'il est le cadre naturel pour exprimer certains algorithmes (comme celui de l'obtention d'un solide effeuillable recouvrant un solide donné) à notre connaissance non encore étudiés et pour poser certains problèmes comme celui de la réorganisation d'un tel solide non organisé en un solide plongé dans* $\mathbb{R}^3$, *algorithmes et problèmes généralisant naturellement le problème de plongement d'un graphe sur une surface de genre minimum, et naturellement liés à l'étude de la validité d'un schéma de représentation combinatoire en modélisation* 3 *D.*

Abstract. – 3 *D-Solid modeling is presently characterized by numerous studies stressing the topological level. These works use the great variety of map theory tools to describe the underlying topological solid of a rigid one, with the help of a combinatorial representation scheme.*

Herein, such a scheme (and its associated data structure) is presented, allowing characterization of every topological solid by a pair of permutations acting on the set of "boundary sections", representing respectively the face order (resp. edge order) around each edge (resp. face). The domain, unicity and unambiguity of this scheme are characterized. The usually difficult study of

(*) Reçu en avril 1989, révisé en juin 1990.
[1] Laboratoire d'Informatique de Besançon, Université de Franche-Comté, 16, route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France.

the scheme validity (the 3 D-embedding of a combinatorial solid) is performed within the context of "face-sheddable" combinatorial solids, for which it is proved they can be embedded if and only if the maps defining the vertices of the combinatorial solid are planar. A particular class of such solids is enumerated by the Schröder-Etherington sequence.

The study of these "face-sheddable" solids (generalizing the classical 2 D-tree notion), leads to a definition of an "unorganized solid" notion, which is associated with the topological solid such as a graph is associated with a map. This unorganized level upstream from the topological one, seems never to have been studied. This unorganized level is presented from a combinatorial and algorithmic point of view. It is the natural context for presenting some algorithms (e.g. the construction of a covering "face-sheddable" solid of a given rigid solid) which are not yet developed, to our knowledge, and for proposing some open problems like the reorganization of an unorganized solid into a 3 D rigid solid: algorithms generalizing the embedding problem of a graph on a minimal genus surface. These problems are related to the validity of the combinatorial representation scheme.

INTRODUCTION

La modélisation géométrique des objets tridimensionnels, constitue le point de départ de tout développement et correspond très souvent à un type d'application très précise. Ainsi, pour la conception d'objets, la représentation par les bords (*BREP*) (*cf.* [1, 6, 21]) va généralement être utilisée; alors que pour la réalisation de scènes animées, la représentation par éléments de volume (voxels) semble plus adaptée (*cf.* [20]).

Les principales techniques de modélisation [c'est-à-dire modélisation par cellules, par voxels, par arbres de construction (*CSG*), ou par les bords (*BREP*), ...] peuvent être caractérisées par l'étendue du domaine (rarement spécifié de façon simple) des solides auxquels elles s'appliquent, ainsi que par le schéma de représentation qu'elles utilisent. Généralement, ces techniques s'appliquent à des solides formés d'un unique volume intérieur (parfois solides issus de familles primitives données) qui, par l'utilisation de primitives de manipulation dites eulériennes (union, intersection, ...), engendrent des solides plus complexes. Un certain nombre de propriétés sont associées à chacune de ces techniques dont les plus importantes sont la non-ambiguïté (qualité par laquelle une représentation symbolique correspond à un seul solide physique), l'unicité (à un solide donné, correspond une description symbolique unique dans le modèle) et la validité (caractérisant si une structure symbolique donnée arbitrairement, est représentable dans le domaine issu d'un solide réel). L'étude de la validité d'un schéma de représentation est complexe (sauf dans des cas très particuliers) et est le plus souvent non explicitée. De la même façon, la « validité » des primitives de manipulation (au sens : le domaine est-il fermé sous l'action de ces primitives ?) peut ne pas être évidente (*cf.* [11 et 21]). Les représentations *BREP* et *CSG* sont usuellement non-ambiguës mais ne sont pas uniques (*cf.* [21]).

Une autre classification de ces techniques de modélisation peut être proposée en fonction de la part laissée à chacun des deux aspects topologique et géométrique. Ce problème est classique dans tous les domaines combinant analyse et synthèse d'images, le mouvement actuel tendant à privilégier de plus en plus la richesse de la structure topologique sous-jacente, la géométrie de l'objet n'apparaissant alors que comme une couche d'information complémentaire au modèle topologique (*cf.* [25]). Ainsi, en modélisation $3D$ de solides, du point de vue topologique, la représentation par les bords s'intéresse généralement à la topologie des objets, uniquement en hiérarchisant les différents niveaux (sommets, arêtes, faces et volumes) (*cf.* [26]). Quelques travaux utilisent la théorie des graphes pour décrire les relations de voisinage entre ces niveaux (*cf.* [1]). Dans ces descriptions, le modèle ne prend généralement en compte que les solides élémentaires, la reconstruction des solides réels se faisant alors par une géométrie constructive sur ces solides élémentaires (recollements par sommets, arêtes ou faces). Récemment, sont apparues des descriptions visant à enrichir les relations fonctionnelles entre les éléments constitutifs en adoptant une structure combinatoire plus ou moins riche, essentiellement caractérisée par la définition combinatoire de la notion de carte telle que définie par R. Cori (*cf.* [9]). Une représentation de ce type peut être trouvée dans Requicha [21] mais la structure combinatoire est encore pauvre. Guibas et Stolfi (*cf.* [15]) donnent une structure combinatoire issue des diagrammes de Voronoï, mais dans cet article, les préoccupations essentiellement théoriques, laissent de côté les applications possibles en infographie. Enfin, sont apparues des modélisations (*cf.* [11, 18, 2, 3 et 23]) appliquant au domaine tridimensionnel la richesse des structures et des outils développés autour de la notion de carte planaire (*cf.* 10 et 5]).

L'étude des cartes planaires peut être structurée en les niveaux aujourd'hui bien connus et développés : « *graphes* » (*cf.* [7 et 24]), « *topologique* » (*cf.* [4 et 5]) (théorie des cartes de genre quelconque), « *combinatoire* » (*cf.* [9 et 12]) (identification des cartes à des couples de permutations agissant sur les brins), « *algorithmique* » (les permutations se traduisent par des listes chaînées) et « *géométrique* » (*cf.* [8]) (chaque pointeur est remplacé par un angle ou une longueur).

Paradoxalement, une telle approche hiérarchisée ne semble pas être aussi développée en graphique $3D$. Si les aspects topologique et combinatoire font l'objet de travaux récents, le niveau analogue au « niveau graphe » des cartes semble ne pas avoir été développé. Ce domaine sous-jacent aux solides topologiques semble pourtant un des points d'attaque possibles dans l'étude de la validité d'une technique de modélisation associant les niveaux topologique et géométrique au niveau combinatoire. C'est également le niveau naturel auquel sont exprimables certains algorithmes agissant sur les solides. C'est cet aspect qui est développé dans cet article, qui a pour but de créer le cadre théorique, permettant de poser un certain nombre de problèmes algorithmiques $3D$, dont certains semblant très difficiles, n'ont pas été posés à notre connaissance, et généralisent certains algorithmes classiques de théorie des graphes (par exemple, le test de planarité de Hopcroft et Tarjan). Il semble, en particulier, que le niveau « Non organisé » présenté dans cet article, soit le cadre naturel pour décrire certains de ces problèmes et algorithmes (comme, par exemple, l'obtention d'un solide effeuillable recouvrant un solide donné). Précisément :

1. Nous développons d'abord la notion de *solide topologique*, indépendamment de toute géométrie (qui pourra être ajoutée ultérieurement), comme partition de $\mathbb{R}^3$, notion que nous modélisons, en associant à tout solide topologique un *solide combinatoire*, dit généralisé, défini par un couple de permutations agissant sur l'ensemble des « sections frontières » (portions de faces) du solide. Un « solide topologique » permet de modéliser tout type de solide réel. En termes classiques de modélisation (*cf.* [21]), le domaine de notre schéma de représentation combinatoire (*cf.* paragraphe I) est donc vaste, et de définition très simple, à l'opposé des domaines, usuellement peu clairement spécifiés, des méthodes classiques qui reconstruisent les solides qu'elles modélisent à partir de primitives de manipulation et de solides primitifs (essentiellement à deux volumes).

Par ailleurs, notre démarche est *inverse*. Alors que les travaux précités modélisent essentiellement des solides, par une géométrie constructive, basée sur les frontières bidimensionnelles de solides ne possédant qu'un seul volume intérieur, nous développons un modèle dans lequel *la notion de volume est intrinsèque*. De ce fait, toute partition de $\mathbb{R}^3$, en sommets, arêtes, faces et volumes formant un solide complexe sera modélisée de façon *unique*, indépendamment de toute reconstruction, qui, par définition, est réalisable de multiples façons. La propriété d'unicité, du modèle que nous proposons, est ainsi directement issue de notre démarche. Il est entendu qu'au niveau topologique auquel nous nous plaçons, l'unicité signifie, qu'à toute classe d'équivalence (« à une déformation homéomorphique près ») de solides topologiques, est associé un solide combinatoire unique. De même, la non-ambiguïté sera évidente, traduisant le fait que le schéma de modélisation, qui, à un solide topologique, associe un solide combinatoire, est une bijection sur l'espace image.

2. Nous étudions la validité de ce schéma de représentation, ce qui revient à déterminer si un solide généralisé (combinatoire) est plongeable en tant que

partition de $\mathbb{R}^3$. Ce problème est beaucoup plus difficile que l'analogue $2D$, où la notion de genre permet, par un simple calcul algébrique de tester la planarité d'une carte. Une telle notion de genre, associée à une classification des variétés compactes de dimension 3, n'existe pas au niveau $3D$ (*cf.* [2 et 19]). Le principal résultat de cet article concerne la caractérisation des solides généralisés effeuillables qui sont plongeables dans $\mathbb{R}^3$, par la planarité des « cartes associées » à leurs sommets. L'obtention de ce résultat nous a conduit à la notion de « solide non organisé » (par organisation, nous entendons par exemple l'ordre dans lequel on rencontre les faces en tournant autour d'une arête qui leur est frontière, l'ordre des arêtes qui sont frontières d'une face, ou l'organisation des brins issus d'un sommet) qui est aux solides ce qu'un graphe est à une carte. Le problème de la réorganisation d'un tel solide non organisé en un solide de $\mathbb{R}^3$, est une généralisation du test de planarité d'une carte (*cf.* conclusion pour des exemples). Une classe particulière de solides effeuillables est prouvée être énumérée par la suite de Schröder-Etherington et est en bijection avec une famille de mots généralisant les mots de Dyck (*cf.* [13 et 17]).

3. Après avoir associé aux solides généralisés et non organisés, une implantation sous forme de listes chaînées croisées sur les sections frontières, nous présentons enfin, au paragraphe IV, certains algorithmes de manipulation de nos objets, ainsi qu'un algorithme testant la validité d'un solide combinatoire effeuillable.

I. SOLIDE, SOLIDE NON ORGANISÉ, SOLIDE GÉNÉRALISÉ

L'intérêt de la notion de *solide non organisé*, présentée dans ce paragraphe, outre l'aspect « généralisation » d'un graphe, est d'être le cadre naturel pour certains algorithmes sur les solides (Test « d'effeuillabilité », Détermination d'un solide effeuillable recouvrant un solide donné, *cf.* paragraphe IV); algorithmes, pour lesquels l'organisation du solide n'est pas utilisée. Cette notion apparaîtra donc comme un élément simplificateur et unificateur pour certains algorithmes.

DÉFINITIONS 1 :

1. *Solide topologique :*

Un *solide topologique* S est une partition de $\mathbb{R}^3$ en quatre ensembles finis de cellules :

– l'ensemble de ses sommets, qui sont des points de $\mathbb{R}^3$,

— l'ensemble de ses arêtes, qui sont des arcs de Jordan ouverts simples, deux à deux disjoints, dont les extrémités sont des sommets. On appelle *brin* (arc), toute arête orientée du solide.

L'ensemble des sommets et des arêtes constitue le *graphe sous-jacent* au solide.

— l'ensemble de ses faces, qui sont des variétés de dimension 2 ouvertes, simplement connexes, deux à deux disjointes, dont les frontières sont constituées de sommets et d'arêtes,

— l'ensemble de ses volumes, qui sont des ouverts de $\mathbb{R}^3$, deux à deux disjoints, dont les frontières sont constituées de sommets, d'arêtes et de faces.

Deux cellules sont dites *incidentes* si l'une est dans la frontière de l'autre.

Classe d'équivalence de solides topologiques :

Deux solides topologiques sont dits *équivalents*, s'il existe un homéomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur lui-même qui préserve l'orientation de $\mathbb{R}^3$ et qui échange les sommets, arêtes, faces et volumes des deux solides.

Une classe d'équivalence de solides topologiques sera appelée *solide* dans la suite.

2. *Topologie d'un solide au voisinage d'un sommet s :*

Considérons une petite sphère centrée en s.

La trace du solide topologique sur cette petite sphère est une *carte planaire* notée $C(s)$ (cf. *fig.* 1) dont les sommets sont la trace des arêtes issues de s et dont les arêtes sont la trace des faces dont s est sommet frontière.

Cette carte n'est pas nécessairement connexe, mais est *planaire* : l'intersection, en dehors d'un sommet extrémité de deux arêtes de $C(s)$ correspondrait en effet à l'intersection (impossible, par définition) de deux faces du solide topologique en dehors d'une arête frontière.

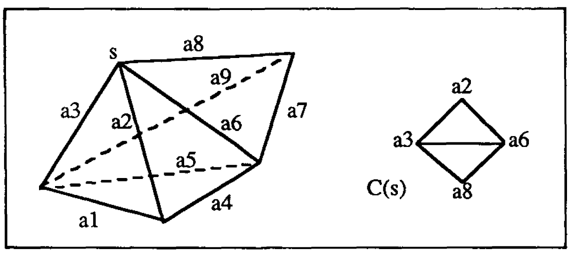

Figure 1. — Un solide constitué de deux volumes intérieurs.

Précisément, $C(s)$ est définie par :

– Chaque arête a du solide issue de s, donne un sommet de $C(s)$.

– Chaque secteur angulaire (a_1, s, a_2) (constitué de deux arêtes issues de s telles que a_1 et a_2 soient deux arêtes successives de la frontière d'une face incidente à s) donne une arête joignant le sommet associé à a_1 dans $C(s)$ au sommet associé à a_2 dans $C(s)$, l'ordre des arêtes de $C(s)$ issues d'un sommet a_i étant l'ordre dans le sens trigonométrique des faces s'appuyant dans ce solide sur le brin a_i issu de s.

Remarque : Cette définition d'un solide couvre tous les types de solides habituellement envisagés en géométrie $3D$, y compris ceux possédant des faces pendantes (habituellement non considérées en modélisation $3D$, *cf.* [21]). Usuellement, les solides considérés définis par leurs bords (*BREP*) ou issus de familles primitives de solides de base (*CSG*), sont constitués de deux volumes, et permettent par opérations « eulériennes » (union, ...) de construire des solides plus complexes, couverts par la définition précédente.

DÉFINITION 2 : *Solide non organisé ou NOSolide :*

On appelle *solide non organisé* ou *sans topologie* (NOSolide) le couple $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$ constitué d'un ensemble $\mathscr{A}$ fini d'*arêtes* et d'une famille $\mathscr{F}$ de parties de $\mathscr{A}$ appelées *faces* :

$$\mathscr{A}=\{a_1, \ldots, a_n\}$$

$$\mathscr{F}=\{f_1, \ldots, f_m\} \qquad \text{avec} \quad f_i \in \mathscr{P}(\mathscr{A}) \quad \text{et} \quad f_i \neq \varnothing \quad \text{pour tout } i.$$

Remarques : (1) On déduit, de façon évidente, à partir d'un solide S, dont les faces ont pour frontières des circuits eulériens, un NOSolide $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$, en oubliant dans la définition d'une face orientée f de $\mathscr{F}$, l'ordre naturel des arêtes qui constituent sa frontière, et en oubliant pour chaque brin l'ordre des faces qui s'appuient dessus.

La perte de cette information sur l'ordre des arêtes d'une face orientée, entraîne l'impossibilité de reconstruire, à partir de N, l'ensemble des sommets et l'ensemble des volumes.

Ce phénomène est l'analogue de celui qui, pour un graphe issu d'une carte, en oubliant l'ordre des arêtes issues de chaque sommet, rend impossible la reconstruction des faces de la carte de départ.

Exemple 1 : Le NOSolide sous-jacent au solide de la figure 1 est défini par :

$$\mathscr{A}=\{a_1, \ldots, a_9\}$$

$$\mathscr{F}=\{f_1=\{a_1, a_2, a_3\}, f_2=\{a_1, a_4, a_5\}, f_3=\{a_3, a_5, a_6\}, f_4=\{a_6, a_7, a_8\}, f_5=\{a_3, a_8, a_9\}, f_6=\{a_2, a_4, a_6\}, f_7=\{a_5, a_7, a_9\}\}.$$

(2) La notion de NOSolide modélisant un solide sans sa topologie peut être mise en rapport avec la classique notion d'hypergraphe. Les hypergraphes ont été introduits dans un tout autre contexte et dans un but d'unification de la théorie des graphes (*cf.* [7]), en vue de la généralisation de certains résultats sur les graphes. Si ces deux notions ont des points communs, leurs buts sont cependant totalement différents. Il est en particulier à noter que ce qui est considéré respectivement comme faces et arêtes dans les NOSolides est en fait vu dans le cadre des hypergraphes comme arêtes et sommets. Les préoccupations sont donc fondamentalement différentes, en particulier les problèmes que nous aborderons ultérieurement : le problème de la récupération de la notion de sommet et de celle de volume dans le cadre des NOSolides n'a pas d'équivalent dans le cadre des hypergraphes, et le problème du plongement se pose différemment dans les deux situations (les hypergraphes se plongent sous forme d'hypercartes sur une surface, problème classique et totalement différent du plongement d'un NOSolide dans l'espace).

(3) Soit un NOSolide $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$, $\mathscr{F}$ étant une famille de parties de $\mathscr{A}$.

Comme pour les hypergraphes, pour préserver la dualité, on peut définir $\mathscr{A}$ comme famille de parties de $\mathscr{F}$, en définissant l'arête a_i dans $\mathscr{A}$ comme l'ensemble (éventuellement vide si cette arête est « pendante » dans $\mathbb{R}^3$) des faces de $\mathscr{F}$ qui la contiennent : $a_i \in \mathscr{P}(\mathscr{F})$.

C'est sous cette définition duale que nous considérerons dans la suite les NOSolides.

On dira qu'une face f et une arête a sont *incidentes* si $f \in a$ (et donc $a \in f$).

Exemple 2 : L'exemple 1 se redéfinit par :

$$\mathscr{A}=\{a_1=\{f_1, f_2\}, a_2=\{f_1, f_6\}, a_3=\{f_1, f_3, f_5\}, a_4=\{f_2, f_6\}, a_5=\{f_2, f_3, f_7\}, a_6=\{f_3, f_4, f_6\}, a_7=\{f_4, f_7\}, a_8=\{f_4, f_5\}, a_9=\{f_5, f_7\}\}$$

$\mathscr{F}$ est inchangé.

A un tel NOSolide. on peut associer un solide (dit « généralisé ») selon l'algorithme suivant, appelé *réorganisation du NOSolide* :

Construction d'un solide à partir d'un NOSolide : Construire un solide à partir d'un NOSolide, consiste à spécifier l'ordre des arcs constituant la frontière d'une face et, dualement, l'ordre des faces, lorsque l'on tourne autour d'un arc, selon l'algorithme :

ALGORITHME 1 : *Réorganisation d'un NOSolide :* En entrée, on a un NOSolide $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$.

1. Dédoubler $\mathscr{A}$ en l'ensemble $\mathscr{B}=\{a_i^+, a_i^-, i\in\{1, \ldots, n\}\}$ des arcs (ou brins) associés aux arêtes a_i.

2. Organiser chaque face (ensemble d'arêtes) f_j, en ordonnant ses arêtes en un circuit et en choisissant pour chaque arête un sens de parcours (c'est-à-dire en remplaçant l'arête a_i de f_j par a_i^+ ou a_i^-).

Si l'on désire maintenir l'aspect dual de nos définitions à ce niveau, les faces f_j ainsi organisées seront notées f_j^+, les faces f_j^- associées étant obtenues en parcourant le circuit définissant f_j^+ en sens contraire et en remplaçant chaque arc a_i^+ (resp. a_i^-) par son opposé a_i^- (resp. a_i^+).

En fait, la donnée des faces f_j^- n'apporte aucune information complémentaire au modèle. *Aussi, dans la suite, nous ne les introduirons pas, et nous confondrons f_j et f_j^+ dans les notations.*

3. Organiser chaque brin a_i^+ en un circuit constitué de l'ensemble des faces qui s'appuient dessus dans l'ordre où on les rencontre en tournant autour du brin a_i^+ dans le sens trigonométrique.

DÉFINITIONS 3 : *Solide généralisé :* 1. Un tel solide, obtenu par l'algorithme 1, sera dit *généralisé* (car non nécessairement plongeable en tant que partition de $\mathbb{R}^3$).

2. *Sommets d'un solide généralisé :* L'algorithme décrit définition 1.2, permet d'associer à tout solide généralisé SG, une carte $C(SG)$ dont les sommets sont associés aux brins de SG, deux sommets b_1 et b_2 étant liés par une arête si b_1 et b_2^{-1} sont deux brins successifs d'une face f_j^+ ou f_j^-, l'ordre des successeurs b_i d'un sommet b de $C(SG)$ se déduisant de l'ordre des faces s'appuyant sur ce brin (*cf.* paragraphe IV.2 pour l'algorithme précis). On appelle *sommet d'un solide généralisé,* toute composante connexe de $C(SG)$.

Remarques : (1) Soit S un solide de $\mathbb{R}^3$. Si l'on réorganise son NOSolide sous-jacent de manière à réobtenir S, le solide effectivement obtenu S' se déduit de S en décomposant chaque sommet s de S, en autant de sommets que la carte $C(s)$ associée à s, a de composantes connexes. Par exemple, si S est constitué de deux tétraèdres ayant un seul sommet en commun (opposés par ce sommet), S' sera constitué de ces deux tétraèdres disjoints, le sommet commun dans S donnant lieu à deux sommets disjoints dans S'.

(2) Les cartes connexes définissant les sommets d'un solide généralisé n'ont aucune raison d'être planaires.

Si l'on utilise la dualité qui échange sommets et volumes, faces et arêtes (*cf.* [2]), on peut également définir tout volume V d'un solide topologique par une carte $C(V)$ (non nécessairement planaire si le volume V n'est pas homéomorphe à la boule unité de $\mathbb{R}^3$). On pourrait ainsi, via cette dualité, reconstruire les cartes associées aux volumes d'un solide généralisé (cet aspect ne sera pas développé dans cet article). Une telle reconstruction d'un sommet ou d'un volume se formalisera aisément au niveau combinatoire (*cf.* algorithme du paragraphe IV).

(3) Le problème du plongement, dans $\mathbb{R}^3$, d'un solide généralisé, est celui de la validité du modèle combinatoire (validité au sens de [21]), bien que se situant à un autre niveau, aucune géométrie n'étant incluse, à ce stade, dans nos objets. En particulier, on montre dans [2] que le problème du plongement d'un solide combinatoire dans une variété compacte de dimension 3 (problème qui contient celui du plongement dans $\mathbb{R}^3$) est lié à la classification des variétés compactes de dimension 3, problème aujourd'hui non résolu. Par contre, une dimension en dessous, le classique problème du plongement dans $\mathbb{R}^2$, d'un arbre défini dans $\mathbb{R}^3$, est trivial. Nous nous proposons, dans cet article, d'étudier sa généralisation aux solides : c'est ce problème que nous abordons dans le paragraphe III.

II. ASPECTS COMBINATOIRES ET STRUCTURES DE DONNÉES ASSOCIÉES

II.1. Définition combinatoire d'un NOSolide et structure de données associée

Le problème d'une représentation combinatoire d'un NOSolide se pose naturellement comme préliminaire à toute implantation algorithmique.

Paradoxalement, bien que la notion de brin soit l'élément de base de la représentation combinatoire d'une carte, et bien qu'un NOSolide contienne naturellement la notion d'arête, l'élément de base naturel de sa représentation combinatoire n'est pas le brin issu d'un sommet, mais la « *section frontière* (de face) » $sf(a, f)$, intuitivement, partie de la face f incidente à une arête frontière a (cf. *fig.* 3). Une notion de ce type a été introduite dans [11] dans le cadre des complexes cellulaires topologiques (c'est-à-dire solides topologiques dont les volumes sont homéomorphes à $\mathbb{R}^3$).

Une raison intuitive est la suivante : si l'on considère une carte en dimension 1, c'est-à-dire une carte réduite à un circuit (suite de sommets et d'arêtes ordonnés sur le cercle), il y a bijection entre sommets et arêtes. Dès lors, les sommets organisés en cycle $(s_1, \ldots, s_n)$ suffisent à caractériser une telle carte en dimension 1. Si l'on considère les cartes et graphes en dimen-

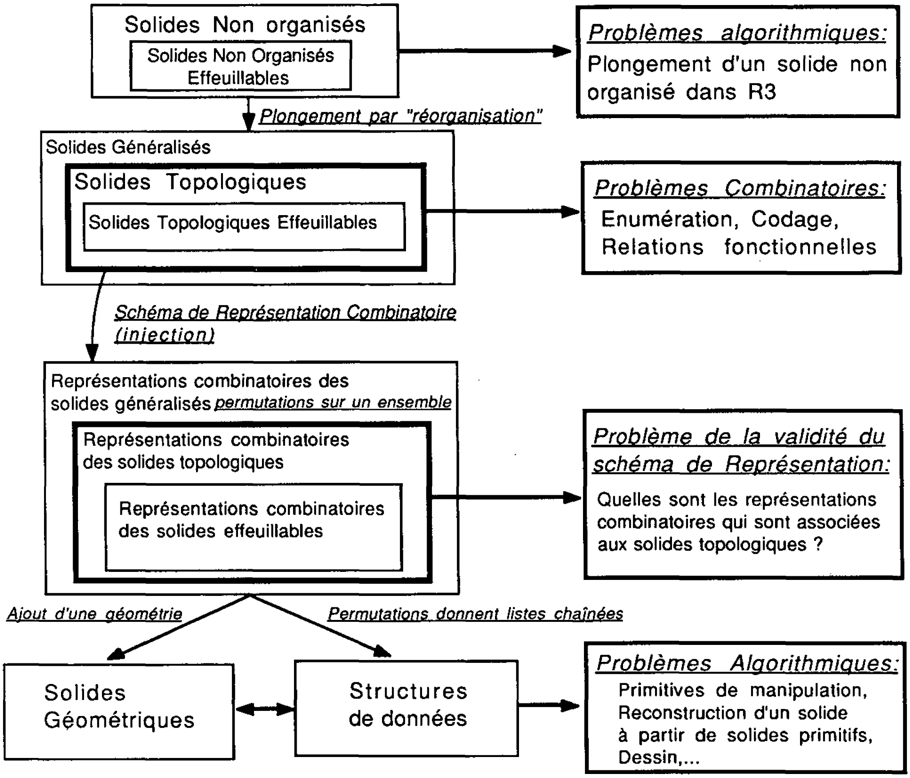

Figure 2. — Les différents niveaux de description du schéma de représentation combinatoire.

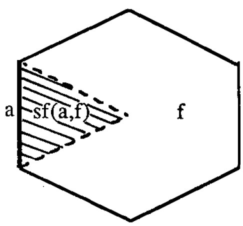

Fig. 3

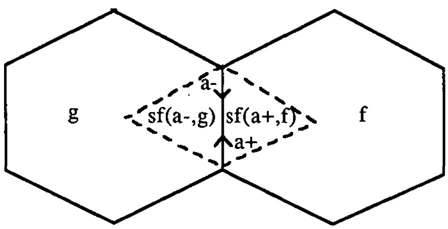

Fig. 4

Figure 3. — Dans le cas d'un solide, la section frontière de la face *f* incidente à l'arête *a* est la partie hachurée ci-dessus.

Figure 4. — Portion de carte (2 faces) portée par une surface.

sion 2, les sommets ne suffisent plus à caractériser la structure, la bijection précitée n'existant plus. C'est la notion d'arête (et même d'arc ou de brin) qui est alors classiquement utilisée (*cf.* [9]). Là encore, pour une carte dessinée sur une surface, il y a bijection entre arc et section frontière (à un arc, on associe intuitivement la section frontière qui s'appuie dessus à sa droite), selon la figure 4.

De la même façon que dans le passage de la dimension 1 à la dimension 2, lorsque l'on passe en dimension 3, cette bijection entre arc et section frontière n'existe plus, plus de deux faces (et donc sections frontières) pouvant s'appuyer sur une même arête. La notion de brin devient alors insuffisante pour représenter combinatoirement cette nouvelle structure. La notion qui s'impose à la place, est naturellement celle de section frontière associée à une face et une arête.

DÉFINITION 4 : *NOSolide combinatoire :*

Un *NOSolide combinatoire* est le triplet $(\mathcal{S}, p, s)$ constitué de deux partitions p et s agissant sur un ensemble fini $\mathcal{S}$ d'éléments appelés « sections frontières ».

Les éléments de p (resp. s) sont appelés *faces* (resp. *arêtes*) du NOSolide combinatoire.

Remarques : (1) A tout NOSolide$(\mathcal{A}, \mathcal{F})$, on associe, à l'évidence de façon bijective, un NOSolide combinatoire, en prenant pour ensemble $\mathcal{S}$ des sections frontières l'ensemble des couples $sf(a_i, f_j)$ où : $a_i \in \mathcal{A}, f_j \in \mathcal{F}$ et $a_i \in f_j$.

Une face f (resp. arête a) apparaît alors comme une partie de $\mathcal{S}$: c'est l'ensemble des sections frontières $sf(*, f)$ [resp. $sf(a, *)$].

(2) La dualité naturelle, interne aux NOSolides, échangeant arêtes et faces, se traduit, dans ce modèle combinatoire, par l'échange de p et s : le *NOSolide dual* N^d de $N=(\mathcal{S}, p, s)$ est $N^d=(\mathcal{S}, s, p)$.

Structure de données associée à un NOSolide

A la structure combinatoire précédente, on associe une implantation naturelle d'un NOSolide : deux listes chaînées principales pour les faces et les arêtes. De chaque enregistrement face (resp. arête) de la liste principale des faces (resp. des arêtes), est issue une liste chaînée circulaire des sections frontières bordant cette face (resp. s'appuyant sur cette arête).

Les sections frontières, éléments de base de la structure, sont donc organisées en deux familles de listes chaînées croisées (une représentant la partition p et l'autre la partition s).

II.2. Définition combinatoire d'un solide généralisé et structure de données

Nous donnons ici la traduction, au niveau des structures combinatoires, de l'algorithme 1 qui permet de créer un solide généralisé à partir d'un NOSolide.

DÉFINITION 5 : *Ensemble des sections frontières orientées :*

On appelle *section frontière orientée d'un solide généralisé*, un couple $sf(a_i^*, f_j)$ où : $a_i^* \in f_j$ (a_i^* est élément du circuit de la face $f_j^+ = f_j$, $*$ représentant $^+$ ou $^-$).

On note Σ l'ensemble des sections frontières orientées.

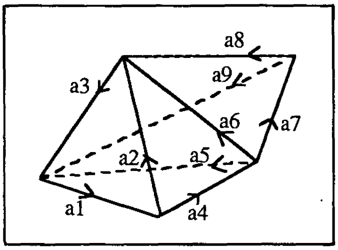

Figure 5. — Solide combinatoire associé au solide de la figure 1.

$$\mathscr{B} = \{ a_1^+, a_1^-, \ldots, a_9^+, a_9^- \}$$

$$\mathscr{F} = \{f_1 = a_1^+ a_2^+ a_3^+, f_2 = a_1^+ a_4^+ a_5^+, f_3 = a_3^+ a_5^- a_6^+,$$
$$f_4 = a_6^- a_7^+ a_8^+, f_5 = a_3^+ a_9^- a_8^+, f_6 = a_2^+ a_6^- a_4^-, f_7 = a_5^+ a_9^- a_7^- \}$$

$$\Sigma = \{ sf(a_1^+, f_1), sf(a_2^+, f_1), sf(a_3^+, f_1), \ldots, sf(a_5^+, f_7), sf(a_9^-, f_7), sf(a_7^-, f_7) \}$$

f_1 est le cycle $(sf(a_1^+, f_1), sf(a_2^+, f_1), sf(a_3^+, f_1))$ pour π.

Traduction de l'algorithme 1 :

- Par le 2, l'ensemble des faces $f_j = f_j^+$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des cycles d'une permutation π sur Σ.

- Par le 3, on associe à chaque arc a_i^+, l'ensemble des sections frontières de Σ, dont le premier terme est a_i^+ ou a_i^-.

Organiser selon l'algorithme 1 chaque arc a_i^+ en un circuit constitué des faces f_j [ici, les sections frontières $sf(a_i^*, f_j)$] qui s'appuient dessus, consiste à définir, pour chaque arc a_i^+, un cycle constitué des $sf(a_i^*, f_j)$. On définit ainsi une seconde permutation σ dont les cycles sont en bijection avec les arcs a_i^+.

On a donc associé, de façon bijective, à tout solide généralisé, un *solide généralisé combinatoire* (Σ, π, σ).

Remarque : Sous cette forme, on a encore « l'identité » mathématique entre la notion de solide généralisé combinatoire et celle d'hypercarte combinatoire, telle que définie par Cori dans [9]. Cependant les problèmes posés pour ces deux notions sont fondamentalement différents : le problème de la planarité d'une hypercarte est facile (et se ramène au calcul du genre) mais ne semble pas aider à la résolution du problème beaucoup plus difficile du plongement d'un solide non organisé sous forme de solide topologique.

Implantation d'un solide généralisé

Elle est la traduction directe des permutations sous forme de listes chaînées circulaires, agissant sur des enregistrements du type « sections frontières ».

En fait, cette structure est analogue à celle d'un NOSolide combinatoire : les deux listes principales d'arcs et de faces sont considérées comme celles des a_i^+ et des $f_j = f_j^+$; les enregistrements de type « section frontière orientée » précisant, de plus, s'ils correspondent au couple $sf(a_i^+, f_j)$ ou $sf(a_i^-, f_j)$.

III. NOSolide EFFEUILLABLE

III.1. Définition et plongement

L'« effeuillage » d'un graphe, c'est-à-dire la suppression des arêtes incidentes à un sommet de degré 1, est un algorithme classique permettant de tester si un graphe est un arbre, c'est-à-dire est totalement effeuillable.

Cet algorithme se généralise aux NOSolides :

Définition 6 : *Effeuillage d'une face :*

On appelle *opération d'effeuillage* d'une face d'un NOSolide N de $\mathbb{R}^3$, l'opération qui consiste à choisir une arête incidente à une seule face (*arête de degré* 1), et à supprimer dans la définition de N cette face en tant qu'ensemble et en tant qu'élément des arêtes auxquelles elle est incidente.

Algorithme 2 : *Effeuillage d'un NOSolide :*

On appelle *algorithme d'effeuillage* d'un NOSolide, l'application itérée de l'opération d'effeuillage des faces, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'arêtes de degré 1.

Remarque : L'opération et l'algorithme d'effeuillage n'utilisent que la notion de degré d'une arête (nombre de faces qui la constituent en tant qu'ensemble) et ne dépendent en aucun cas de l'organisation éventuelle des arêtes autour d'une face ou des faces incidentes à une arête. Ils sont donc parfaitement définis pour les solides topologiques et généralisés, étant entendu que leur application à un tel solide doit être faite en conservant son organisation, et produit donc un nouveau solide topologique ou généralisé avec une face de moins.

DÉFINITION 7 : Un NOSolide (resp. Solide, Solide généralisé) est dit *effeuillable* si et seulement si il perd toutes ses faces par l'algorithme d'effeuillage.

PROPOSITION 1 : *Un solide (topologique), transformé par l'algorithme d'effeuillage en son graphe sous-jacent, est un solide à un seul volume.*

Démonstration : On part d'un solide que l'on peut transformer en son graphe sous-jacent, par l'algorithme d'effeuillage.

L'opération d'effeuillage ne modifiant pas le nombre de volumes, si à la fin, on obtient un seul volume, on avait également au départ un seul volume.

Remarque : La réciproque est fausse.

La figure 6 donne l'exemple classique d'un solide à un seul volume (Bing's house with 2 rooms) non effeuillable (il n'y a aucune arête de degré 1 pour commencer l'effeuillage) : ce solide est constitué de deux « chambres » auxquelles on peut accéder par deux cheminées (ce qui assure qu'il n'y a qu'un seul volume).

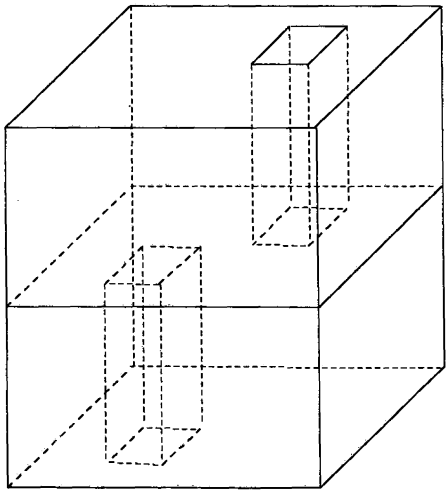

Figure 6

DÉFINITION 8 : *NOSolide plongeable :*

Un NOSolide est dit *plongeable* dans $\mathbb{R}^3$, si on peut le réorganiser en un solide (topologique) de $\mathbb{R}^3$.

THÉORÈME 1 : Un NOSolide effeuillable est plongeable dans $\mathbb{R}^3$, si et seulement si, on peut le réorganiser en un solide généralisé dont les sommets soient définis par des cartes planaires.

Remarque : Une axiomatique du type « topologie combinatoire », telle que celle introduite par Cori dans [9] dans le cadre $2D$, pour prouver rigoureusement les résultats concernant les problèmes de codage et d'énumération des hypercartes planaires, est également nécessaire en $3D$. Dans cet article introductif, la preuve de ce théorème est présentée à l'aide d'arguments élémentaires géométriques.

Démonstration :

$\Rightarrow$ On part d'un NOSolide effeuillable plongeable dans $\mathbb{R}^3$.

S'il est plongeable dans $\mathbb{R}^3$, c'est que l'on peut le réorganiser en un solide de $\mathbb{R}^3$, et, dès lors, les cartes associées aux sommets de ce solide sont planaires.

$\Leftarrow$ La démonstration se fait par récurrence sur le nombre d'arêtes :

1. Si le NOSolide effeuillable ne contient qu'une arête (dès lors nécessairement de degré ≤ 1), cette arête est soit une boucle sans face, soit une boucle bordant une face, soit une arête non boucle sans face.

Il y a une seule réorganisation possible (évident) : les cartes associées aux sommets sont planaires et le solide généralisé est, à l'évidence, plongeable.

2. Supposons le résultat démontré pour $k \leq n$ arêtes.

Pour un NOSolide effeuillable S à $k=n+1$ arêtes : supposons l'avoir réorganisé en un solide généralisé SG, dont toutes les cartes $C(s)$ définissant les sommets s de SG soient planaires.

Montrons que SG est plongeable dans $\mathbb{R}^3$.

S possède au moins une arête a de degré 1, on la supprime ainsi que la face f qui lui est incidente. On obtient un nouvel NOSolide S' toujours effeuillable : donc un NOSolide effeuillable avec une arête de moins. De plus, S' est réorganisable en un solide généralisé SG' déduit de SG, en supprimant l'arête et la face considérées. Les cartes $C'(s)$ définissant les sommets s de SG' sont toujours planaires (elles sont déduites des cartes planaires des sommets de SG par suppression éventuelle d'une arête associée à la face f). Par récurrence, SG' est donc plongeable dans $\mathbb{R}^3$ en un solide à un seul volume, dont les cartes planaires associées aux sommets sont celles définissant les sommets de SG'.

Il reste à montrer que la face f et l'arête a peuvent être rajoutées dans ce plongement sans créer d'intersection non désirée (avec des faces préexistantes) :

Soit b^* un arc de la frontière de f dans SG' ($b \neq a$). La section frontière $sf(b^*, f)$ apparaît dans la liste chaînée associée à b^+ dans SG entre deux sections frontières $sf(b^*, g)$ et $sf(b^*, h)$. On peut alors insérer un élément de surface s'appuyant sur b^* et situé entre les sections frontières $sf(b^*, g)$ et $sf(b^*, h)$. On fait de même avec c^*, arc de la frontière de f suivant b^* (cf. *fig.* 7).

Soit s, le sommet final de b^* (initial de c^*). La planarité de la carte $C(s)$ définissant le sommet s dans SG, assure que l'on peut recoller les portions de surface $sf(b^*, f)$ et $sf(c^*, f)$ par une portion de disque (α, s, β) où $\alpha\beta$ est l'arête de $C(s)$ trace de f sur la petite sphère de centre s (*cf.* définition 1.2). La planarité de $C(s)$ assure que cette surface (α, s, β) ne coupe aucune autre surface du plongement de SG'. En recollant ainsi le long de toute la frontière de f dans SG', on reconstruit la face f dont la partie de frontière en dehors de SG' est l'arête a.

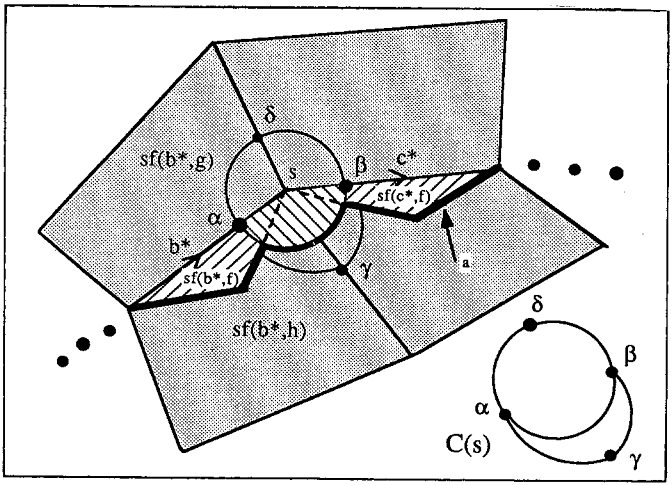

Figure 7

Remarque : Bien entendu, le problème de plonger un NOSolide effeuillable avec des contraintes géométriques (faces planes, arêtes sous forme de segments, ...) est en aval des problèmes abordés ici. Ce problème a été abordé et résolu dans le cas $2D$ du dessin d'arbres et de cartes (*cf.* [22 et 10]).

COROLLAIRE : Un solide généralisé effeuillable est plongeable dans $\mathbb{R}^3$ si et seulement si les cartes définissant ses sommets sont planaires.

Démonstration : Évidente par le théorème 1.

III.2. Énumération d'une classe particulière de solides effeuillables

A l'opposé des cartes planaires, les problèmes d'énumération d'objets $3D$ semblent n'avoir été que très peu abordés. Aucun résultat n'est à notre connaissance connu sur l'énumération des solides effeuillables. Nous proposons ici l'énumération d'une classe particulière de tels solides, généralisant l'énumération des hypercartes à un seul sommet, donnée par Cori dans [9].

DÉFINITIONS 9 : On appelle *Solide-Arbre*, un solide à un seul volume (extérieur) simplement connexe, tel que les cartes associées à chaque sommet sont

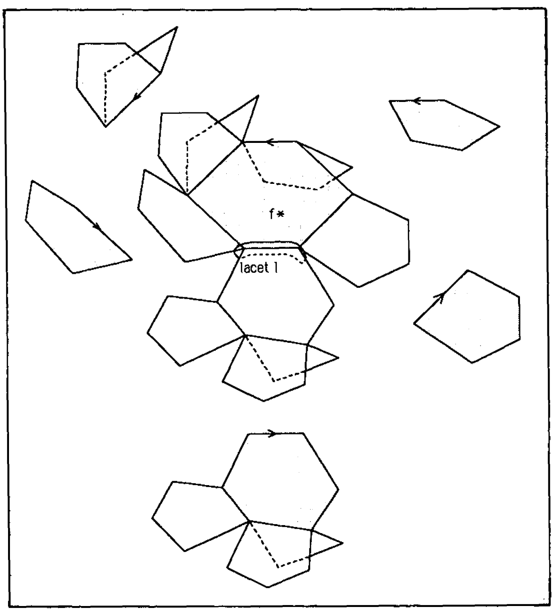

Figure 8. — Opération de décomposition récursive d'un solide-arbre pointé par suppression de la face distinguée.

des arbres. On suppose de plus que toutes les faces sont des polygones à au moins 2 côtés.

Un tel solide-arbre sera dit *pointé* si l'un de ses arcs et l'une des faces incidentes à cet arc sont distingués. Le solide-arbre réduit à un sommet (ne contenant aucune face ni arête) sera également supposé pointé.

PROPOSITION 2 : (1) *L'opération de suppression de la face distinguée f^* (polygone à n côtés) crée n solides-arbres (éventuellement vides). Chacun est canoniquement pointé en distinguant l'arc qui le lie à f^* et en distinguant la première face que l'on rencontre en tournant autour de cet arc à partir de f^* dans un sens positif fixé.*

(2) $F(f_2, \ldots, f_n, \ldots)$, *série génératrice commutative énumérant les solides-arbres pointés (le degré de f_n donnant le nombre de faces à n côtés), est solution de l'équation fonctionnelle :*

$$F = 1 + \sum_{n \geqq 2} f_n F^n.$$

(3) $A(z) = F(z, \ldots, z^{n-1}, \ldots)$, *obtenue en substituant z^{n-1} à f_n dans F, est la série génératrice des solides-arbres pointés décomptés en fonction du nombre d'arêtes moins une. Elle est solution de l'équation fonctionnelle de « Schröder-Etherington » :*

$$A = 1 + \frac{z A^2}{1 - z A}.$$

(4) Le nombre de solides-arbres pointés à n arêtes est :

$$a_n = \frac{1}{m} \cdot \sum_{0 \leqq k \leqq m-1} \binom{m}{k} 2^{m-1-k} \binom{m}{m-1-k}$$

(5) Il y a bijection entre les solides-arbres et les chemins de Dyck généralisés dont les pas montants sont de hauteur $\geqq 1$ et les pas descendants de hauteur 1 (famille classique énumérée par la suite de Schröder-Etherington, *cf.* [17]).

Démonstration : (1) Choisissons une arête a du bord de la face distinguée f^*. Les deux sommets extrémités de cette arête ayant des cartes associées qui sont des arbres, on peut dessiner dans le volume extérieur, un lacet 1 faisant le tour et infiniment proche de cette arête (cf. *fig.* 8). Le volume extérieur étant simplement connexe, on peut déformer continuement ce lacet en un point du volume extérieur, définissant ainsi une surface fermée (si l'on suppose le lacet de départ confondu avec l'arête a). Cette surface partage l'espace en deux volumes, contenant chacun une partie du solide. Celle qui ne contient pas f^* est le solide-arbre qui se détache quand on supprime f^* (cf. *fig.* 8).

(2) Cette formule est évidente à partir de la règle de décomposition du (1).

(3) Pour démontrer que lorsque l'on remplace f_n par z^{n-1}, le degré de z décompte les arêtes du solide-arbre sauf l'arête distinguée, il suffit de raisonner récursivement à l'aide de la décomposition du (1) : si ce résultat est vrai pour chacun des solides-arbres A_i, $1 \leqq i \leqq n$, obtenus en supprimant la face distinguée, le degré de z obtenu en multipliant les monômes associés à chacun de ces solides-arbres décomptera le nombre total d'arêtes du solide de départ moins n (une arête perdue pour chacun des solides-arbres A_i, $1 \leqq i \leqq n$). Lorsque l'on multiplie ce monôme par z^{n-1} (terme associé à la face f^*), on obtient bien pour degré de z, le nombre total d'arêtes moins une.

La relation fonctionnelle sur la série A se déduit de façon évidente de celle sur F.

(4) Évident par la formule de Lagrange (cf. *fig.* 9).

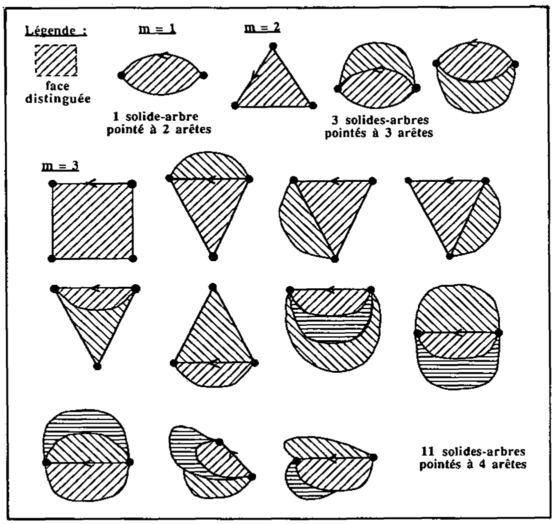

Figure 9. – Les premiers solides-arbres pointés à 2, 3 et 4 arêtes.

(5) On associe à tout solide-arbre une arborescence dessinée dans le plan, les arêtes filles de chaque sommet de l'arborescence étant regroupées en paquets successifs selon la figure 10. Chaque sommet de cette arborescence est associé à un arc du solide-arbre et chaque paquet de n arêtes filles de ce sommet est associé à une face à $(n+1)$ côtés du solide-arbre incidente à cet

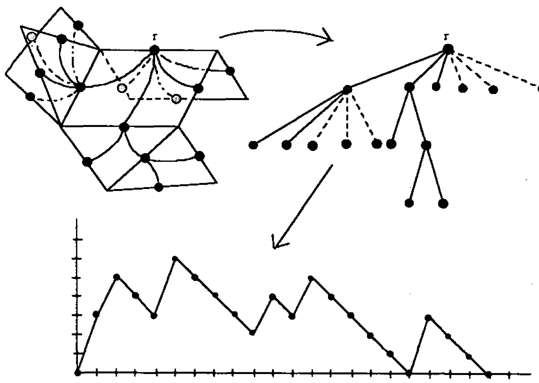

Figure 10. — **Étapes de la bijection entre solides-arbres et mots de Dyck généralisés.**

arc. L'ordre des paquets d'arêtes est alors l'ordre pour le sens positif autour de l'arc, des faces qui lui sont incidentes.

On associe aisément à cette arborescence, selon la figure 10, un chemin de Dyck généralisé, en associant lors du parcours prioritairement en profondeur de l'arborescence, un pas montant de hauteur n lorsque l'on descend le long de la première arête d'un paquet de n arêtes, et un pas descendant de hauteur un lorsque l'on remonte le long d'une arête de l'arborescence. L'application réciproque est évidente.

IV. ALGORITHMES DE MANIPULATION

IV.1. Algorithme d'effeuillage

Par la remarque de la définition 6, cet algorithme s'applique au niveau des NOSolides.

Algorithme Test_effeuillable ($N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$: NOSolide) : booléen;
Début
  { $\mathscr{A}_1$ étant l'ensemble des arêtes de degré 1 du NOSolide courant N et
   $\mathscr{F}_1$ étant l'ensemble des faces qui leur sont incidentes }
  Déterminer le degré de chaque arête de $\mathscr{A}$;
  Déterminer les ensembles $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{F}_1$;
  Tant que $\mathscr{A}_1$ non vide *faire*
    $\mathscr{F}=\mathscr{F}\setminus\mathscr{F}_1$;
   { On définit ainsi un nouveau NOSolide $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$ où $\mathscr{A}$ reste inchangé par effeuillage. }
    Déterminer les ensembles $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{F}_1$ pour N;
  Fait;
  Si $\mathscr{F}=\varnothing$
  Alors Test_effeuillable = VRAI
  Sinon Test_effeuillable = FAUX
  FinSi
Fin.

Si l'on maintient à jour, une table des degrés des arêtes et les chaînages circulaires bidirectionnels des sections frontières s'appuyant sur chaque arête, on peut réaliser facilement cet algorithme, linéairement en le nombre de sections frontières de la structure. Pour cela, il suffit d'utiliser une file; les éléments dans la queue de la file, à chaque étape de l'itération principale, étant l'ensemble courant $\mathscr{A}_1$ des arêtes de degré 1.

Remarque : Le problème de la réorganisation d'un NOSolide en un solide de $\mathbb{R}^3$ est une généralisation naturelle du test de planarité d'un graphe. Une étape intermédiaire dans la résolution de ce problème est l'obtention d'un NOSolide effeuillable recouvrant le NOSolide donné. Cette étape est analogue à celle de l'obtention d'un arbre recouvrant un graphe, algorithme de base essentiel en algorithmique $2D$. Les méthodes pour obtenir un tel arbre recouvrant sont nombreuses (algorithme de Kruskal [14], méthodes associées aux différents algorithmes de parcours d'un graphe : parcours prioritairement en profondeur, ...). Ces algorithmes sont linéaires en le nombre d'arêtes. Il semble que la généralisation au niveau des NOSolides (linéaire en le nombre de sections frontières) de ces algorithmes ne soit pas évidente. On peut très facilement déduire de l'algorithme d'effeuillage, un algorithme de recouvrement d'un NOSolide, de complexité, le nombre de sections frontières au carré :

Partant d'un NOSolide $N=(\mathscr{A}, \mathscr{F})$, on construit itérativement un NOSolide effeuillable recouvrant $S=(\mathscr{A}, \mathscr{G})$, initialisé avec $\mathscr{G}=\varnothing$. On teste alors pour chaque face candidate à être ajoutée, si son ajout au NOSolide effeuillable S courant, laisse S effeuillable, auquel cas, on l'ajoute effectivement.

Cet algorithme qui traite les faces les unes à la suite des autres, ressemble dans son esprit à celui très classique de Kruskal. L'inconvénient est l'appel systématique à la procédure d'effeuillage. La méthode utilisée dans les graphes pour garder la linéarité est de tester si l'arête ajoutée joint deux composantes connexes de la forêt en construction, auquel cas on est sûr de ne pas créer de cycle. On peut très facilement dans notre situation définir une notion de composante connexe d'un NOSolide.

On définit pour cela une relation d'équivalence entre arêtes : deux arêtes a et b sont équivalentes si l'on peut trouver un chemin de faces les joignant [c'est-à-dire une suite de faces ayant deux à deux une arête en commun, l'arête a (resp. b) étant incidente à la première (resp. dernière) face]. On vérifie facilement que toutes les arêtes d'une face d'un NOSolide sont équivalentes. On définit alors une composante connexe du NOSolide comme le NOSolide défini par le couple constitué d'une classe d'équivalence d'arêtes et des faces dont la frontière est constituée d'arêtes de cette classe. On remarquera que deux telles composantes connexes, si elles sont définies sur un NOSolide issu d'un solide, peuvent avoir un sommet en commun (par exemple, les deux tétraèdres d'un solide constitué de deux tétraèdres opposés par un sommet).

Il s'avère que l'ajout d'une face incidente à deux telles composantes connexes peut hélas créer un volume et rendre le NOSolide non effeuillable, ce qui rend caduque une généralisation immédiate de l'algorithme de Kruskal par cette méthode.

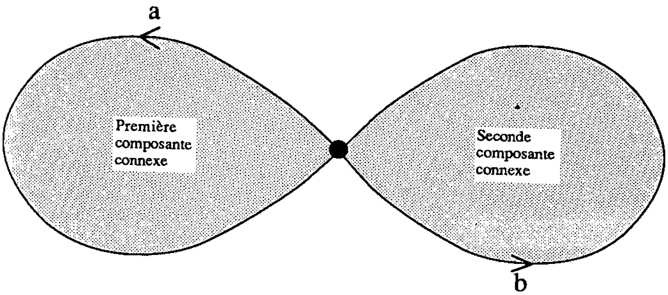

Figure 11. – Ajout de la face $f=(a, b)$ incidente à deux composantes connexes.

L'obtention d'un algorithme testant la plongeabilité d'un NOSolide en un solide de $\mathbb{R}^3$, généralisant à $\mathbb{R}^3$ la combinatoire très riche de l'algorithme de planarité de Hopcroft et Tarjan, semble très difficile.

IV.2. Détermination des sommets d'un solide généralisé

Idée de l'algorithme de reconstruction d'un sommet

L'algorithme présenté ici, reconstruit la structure de données implantant la carte $C(s)$ que nous avons associée à un sommet s, dans un solide généralisé (*cf.* définition 3).

On va, dans un premier temps, déterminer la sous-structure (de la structure implantant le solide généralisé) composée des sections frontières orientées $sf(a_k^*, f_l)$ (*cf.* définition 5), telles que s soit sommet initial ou final de a_k^* : on dira que s est incident (initial ou final) à la section frontière $sf(a_k^*, f_l)$.

En entrée, est donnée une section frontière sf, incidente au sommet s dont on cherche à reconstruire la carte $C(s)$.

Cet algorithme consiste en l'application des deux règles suivantes :

R1 : Si s est initial (resp. final) à une section frontière orientée $sf(a_k^x, f_l)$, il est incident à toutes les sections frontières $sf(a_k^y, f_i)$ du chaînage donnant les faces s'appuyant sur l'arête a_k. Il sera initial (resp. final) à $sf(a_k^y, f_i)$ si $y = x$, sinon il sera final (resp. initial) à $sf(a_k^y, f_i)$.

R2 : Si s est initial (resp. final) à la section frontière $sf(a_k^*, f_l)$, alors s est final (resp. initial) à la section frontière $sf(a_r^*, f_l)$ précédent (resp. suivant) $sf(a_k^*, f_l)$ dans le chaînage *circulaire* des sections frontières orientées définissant la frontière de f_l.

La complexité de cet algorithme est, à l'évidence, linéaire en le nombre de sections frontières incidentes au sommet reconstruit.

IV.3. Test de validité d'un solide généralisé effeuillable

Il suffit, par le théorème 1, de tester, si toutes les cartes définissant ses sommets, sont planaires. Il suffit pour cela de calculer le genre de chacune des cartes reconstruites par l'algorithme précédent.

La complexité de cet algorithme est également linéaire en le nombre de sections frontières : cela se déduit de la complexité de l'algorithme précédent et du fait que le calcul du genre d'une carte est linéaire en le nombre de ses brins (l'évaluation du nombre de faces d'une carte étant obtenu par un simple parcours de la carte), qui sont ici naturellement associés aux sections frontières.

CONCLUSION

Nous nous sommes intéressés à deux problèmes :

1. Le problème de la plongeabilité d'un solide généralisé dans $\mathbb{R}^3$ (résolu dans le cadre d'un solide généralisé effeuillable), c'est-à-dire le problème de la validité du modèle proposé;

2. Le problème plus général de la réorganisation d'un NOSolide en un solide de $\mathbb{R}^3$.

L'analogue en dimension 2 du premier problème est celui de la détermination du genre d'une carte et donc de son plongement sur une surface. En $2D$, ce problème est très simple, directement lié à la classification des surfaces de dimension 2 à l'aide du genre. Une telle classification n'existe pas en dimension 3 (*cf.* [19]), et il n'existe pas de formule du genre permettant de conclure par un simple calcul algébrique si un solide généralisé est ou non plongeable dans $\mathbb{R}^3$.

L'analogue en dimension 2 du second problème est celui du test de la planarité d'un graphe [16]. Pour aborder ce problème en dimension 3, il est nécessaire de définir l'analogue d'un graphe pour un solide. Cet analogue peut être vu à plusieurs niveaux. La notion que nous avons proposée dans cette optique et qui nous semble la plus générale souhaitable est celle de NOSolide. Le problème du plongement d'un NOSolide dans $\mathbb{R}^3$ semble difficile. Un cas particulier est celui du plongement des NOSolides effeuillables, cf. *fig.* 12. L'analogue $2D$ est évident : tout arbre est plongeable dans le plan, mais il n'en est pas de même pour les NOSolides effeuillables. Seront plongeables (*cf.* théorème 1) ceux que l'on peut réorganiser en un solide généralisé dont tous les sommets sont associés à des cartes planaires (Déterminer si c'est toujours possible est un problème ouvert). On est donc ramené à réorganiser les listes de sections frontières des faces et des arêtes de façon à rendre planaires les graphes associés à chaque sommet. Ce problème généralise celui résolu par Hopcroft et Tarjan, pour les raisons suivantes : il y a plusieurs graphes que l'on traite simultanément et qui ne sont pas indépendants (deux sommets d'un solide généralisé liés par une arête donneront deux graphes contenant deux sommets associés à cette arête); modifier l'ordre des arêtes

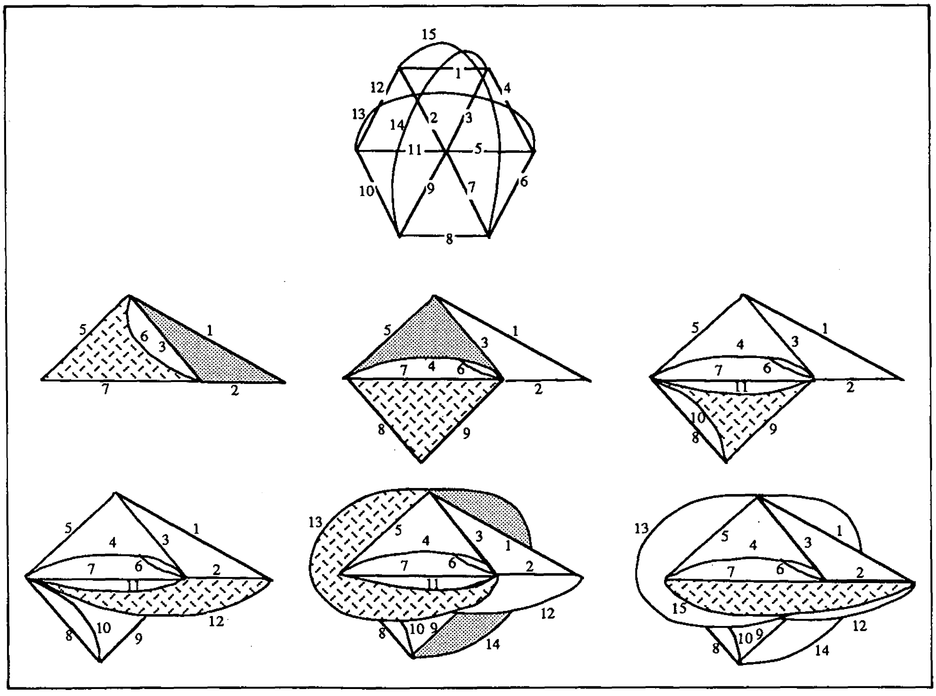

Figure 12. — Réorganisation d'un NOSolide effeuillable (haut de la figure) en un solide de $\mathbb{R}^3$. Les différentes étapes (6) de la réorganisation sont présentées par ajouts successifs de faces hachurées (de façon à appréhender leur disposition spatiale).

d'une face modifie les sommets du solide (y compris leur nombre : cf. *fig.* 12) et donc les graphes associés.

Un cas particulier qui est équivalent au test de planarité est obtenu en prenant une classe plus restrictive de NOSolides effeuillables. On considère les NOSolides dont les arcs et les faces (positives) sont précisés (points 1 et 2 de l'algorithme 1), seules restant à organiser les listes de faces autour de chaque arc. Pour un tel type de NOSolide effeuillable déjà en partie réorganisé, les graphes associés aux sommets sont bien déterminés et organiser les listes de faces autour des arcs revient à choisir l'ordre des arêtes issues des sommets de ces graphes.

Considérons un tel NOSolide effeuillable représentant un cône (cf. *fig.* 13), c'est-à-dire constitué d'un sommet s (sommet du cône), de faces triangulaires issues de s, et des sommets t de la base du cône, dont toutes les arêtes issues sont de degré un sauf éventuellement celle joignant s à t. Tous les graphes associés aux sommets t de la base sont des graphes « étoiles » (cf. *fig.* 13) et sont planaires quelle que soit l'organisation des faces autour de l'arête (s, t). Le seul problème à résoudre est donc d'organiser les listes de faces autour des arêtes issues de s de façon à rendre planaire le graphe $G(s)$: on est dans ce cadre exactement ramené au test de planarité d'Hopcroft et Tarjan.

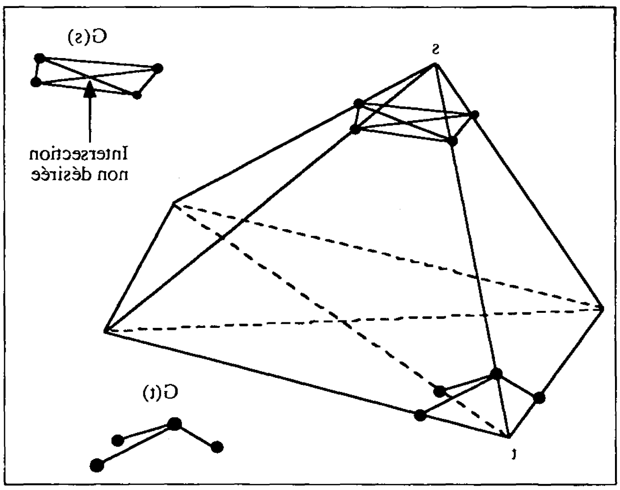

Figure 13

La structure de données proposée, intègre complètement la notion de dualité dans sa conception, et permet d'avoir des algorithmes identiques (à la transposition près de la structure de données) pour des problèmes duaux (par exemple, reconstruction des sommets ou des volumes d'un solide).

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Ansaldi, L. De Floriani et B. Falcidieno, Geometric modeling of solid objects by using a face adjacency graph representation, *A.C.M.*, 1985, *19*, 3, p. 131-139.
2. D. Arques et P. Koch, Pavages tridimensionnels, *BIGRE n° 61-62,* avril 1989 : *Langages et Algorithmes du Graphique*, p. 5-15.
3. D. Arques et P. Koch, Modélisation de solides par les pavages, *Actes de PIXIM* 1989, p. 47-61.
4. D. Arques, Une relation fonctionnelle nouvelle sur les cartes planaires pointées, *J. Combin., Theory Ser. B*, 1985, *39*, n° 1, p. 27-42.
5. D. Arques, Arbres, graphes planaires et synthèse d'images figuratives de végétaux, *Cours de D.E.A.*, Univ. Franche-Comté, 1988.
6. P. Baumann, A formal specification of a boundary representation, EUROGRAPHIC'S 88, 1988, p. 141-154.
7. C. Berge, Graphes et hypergraphes, *Dunod Université*, 1970, n° 604.
8. M. Berger, Géométrie. 3/Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes, CEDIC, *Fernand Nathan*, Paris, 1978.
9. R. Cori, Un code pour les graphes planaires et ses applications, *Astérisque*, 27, 1975.
10. N. Chiba, K. Onoguchi et T. Nishizeki, Drawing plane graphs nicely, *Acta Infor.*, 1985, *22*, p. 187-201.
11. D. P. Dobkin et M. J. Laszlo, Primitives for the manipulation of three-dimensional subdivisions. *Algorithmica*, 1989, *4*, p. 3-32.
12. J. R. Edmonds, A combinatorial representation for polyhedral surfaces, *Amer. Math. Soc. Notices*, 1960, *7*, p. 646-650.
13. I. M. H. Etherington, Some Problems of Non-associative combinations (I), *The Edinburgh Mathematical Notes*, 1940, *32*, p. 1-13.
14. M. Gondran et M. Minoux, Graphes et algorithmes, *Éditions Eyrolles*, Chapitre 4, 1985.
15. L. Guibas et J. Stolfi, Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoï Diagrams, *A.C.M. Trans. on Graphics*, 1985, *4*, 2, p. 74-123.
16. J. Hopcroft et R. Tarjan, Efficient Planarity Testing. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 1974, *21*, 4, p. 549-568.
17. S. G. Kettle, Families Enumerated by the Schröder-Etherington Sequence and a Renewal Array it Generates, *Lecture Notes in Math.*, 1982, *1036*, p. 244-274.
18. P. Lienhardt, Extension of the notion of map and subdivisions of a three-dimensional space, *Lectures Notes in Comput. Sci.*, Springer-Verlag, 294, Proceedings of STACS, 1988.
19. W. S. Massey, Algebraic Topology: An Introduction, Harbrace College Mathematics Series, 1967.
20. W. M. Newman et R. F. Sproull, 1979. Principles of interactive computer graphics, *McGraw-Hill*, Computer Science Series, 1979.
21. A. Requicha, Representations for Rigid Solids: Theory, Methods, and Systems. *Computing Surveys*, 1980, *12*, 4, p. 437-464.
22. E. M. Reingold et J. S. Tilford, Tidier Drawings of trees, *I.E.E.E. Trans. Software Engrg.*, 1981, *7*, 2, p. 223-228.

23. J. C. SPEHNER, La fusion dans les cartes et dans les pavages, Rapport de Recherche n° 48, Université de Haute Alsace, 1988.
24. W. T. TUTTE, Graph Theory. Ed. *Addison-Wesley, Encyclopedia Math. Sci., 21*, 1984.
25. X. VIENNOT, G. EYROLLES, N. JANEY et D. ARQUES, Combinatorial Analysis of Ramified Patterns and Computer Imagery of Trees, *A.C.M. Comput. Graphics*, 1989, *23*, 3, p. 31-40.
26. K. WEILER, Edge-based data structures for solid modeling in curved-surface environments, *I.E.E.E. CG & A*, 1985, p. 21-40.