

P. CHARRIER

J. ROMAN

**Étude de la séparation et de l'élimination sur  
une famille de graphes quotients déduite d'une  
méthode de dissections emboîtées**

*RAIRO. Informatique théorique et applications*, tome 22, n° 2 (1988),  
p. 245-265

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1988\\_\\_22\\_2\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_2_245_0)

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ÉTUDE DE LA SÉPARATION ET DE L'ÉLIMINATION SUR UNE FAMILLE DE GRAPHS QUOTIENTS DÉDUITE D'UNE MÉTHODE DE DISSECTIONS EMBOÎTÉES (\*)

par P. CHARRIER <sup>(1)</sup> et J. ROMAN <sup>(2)</sup>

Communiqué par R. CORI

---

*Résumé. – Dans cet article, nous considérons des familles de graphes pour lesquels il existe une partition de l'ensemble des sommets en un arbre des séparateurs associé à un théorème de séparation. Nous démontrons tout d'abord des propriétés de séparation pour la famille des graphes obtenus par passage au quotient par rapport à cette partition des sommets; en rajoutant une hypothèse de degré borné pour la famille initiale de graphes, et en munissant ceux-ci d'une numérotation des sommets de type dissections emboîtées, on démontre ensuite que le graphe d'élimination d'un graphe quotient est un graphe à densité borné.*

*On applique alors ces résultats théoriques pour obtenir un algorithme de construction du graphe des communications associé à une implémentation répartie d'une méthode de résolution de grands systèmes creux d'équations linéaires de type dissections emboîtées. Ce graphe qui décrit les échanges entre les processus de l'algorithme réparti est ainsi obtenu en temps linéaire par rapport au nombre de processus.*

*Abstract. – In this paper, we consider families of graphs for which there is a partition of the vertices in a tree of separators associated with a separator theorem. First, we give some separation properties for the family of quotient graphs with regard to this partition of vertices; then, by adding a bounded degree assumption on the initial family of graphs and using a nested dissection ordering for their vertices, we prove that the elimination graph of such a quotient graph is a bounded density graph.*

*Next, we apply these theoretic results to achieve an algorithm of construction of the communication graph associated with a distributed implementation of an algorithm of resolution of large sparse systems of linear equations based on a nested dissection method. This graph, which describes the exchanges between the  $N$  processes of the distributed algorithm, is so constructed in  $\mathcal{O}(N)$  time.*

---

(\*) Reçu octobre 1986, révisé mai 1987.

<sup>(1)</sup> U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Unité associée au C.N.R.S. n° 226, Université de Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

<sup>(2)</sup> ENSERB et U.E.R. de Mathématiques et d'Informatique, Unité associée au C.N.R.S. n° 226, Université de Bordeaux-I, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

## 1. INTRODUCTION

*Les théorèmes de séparation* [15, 10, 11, 6] permettent de concevoir dans des domaines variés des algorithmes efficaces basés sur une stratégie de type *divide and conquer* [16, 14, 1, 25, 17, 12, 21, 20, 2].

On considère ici des graphes appartenant à une famille  $S$  vérifiant un  $n^\sigma$ -théorème de séparation,  $0 < \sigma < 1$ , pour lesquels il existe *une partition de l'ensemble des sommets correspondant à un arbre des séparateurs*; à partir de cette famille de graphes, on construit la famille  $\mathcal{S}$  des graphes obtenus par *passage au quotient* par rapport à ce type de partition.

L'objet de cet article est d'étudier un certain nombre de propriétés de cette famille de graphes quotients. Dans le paragraphe 2, on s'intéresse aux propriétés de *séparation*, et en particulier on démontre que cette famille admet un 1-théorème de séparation. Le paragraphe 3 est consacré à l'étude de *l'élimination* sur les graphes de  $\mathcal{S}$ ; on munit les graphes de  $S$  d'une *numérotation de type dissections emboîtées* et ceux de  $\mathcal{S}$  de la numérotation induite. On démontre alors, en utilisant une *hypothèse de degré borné* que l'éliminé d'un graphe quotient est un graphe à *densité borné*. Enfin dans le paragraphe 4, on utilise ces résultats théoriques pour caractériser et construire le *graphe des communications* associé à *une implémentation répartie* d'une méthode de dissections emboîtées pour la résolution de grands systèmes *creux* d'équations linéaires. Cela conduit à un algorithme *linéaire en temps* qui assure cette construction.

Précisons tout d'abord quelques notations.

**DÉFINITION 1.1 :** On dit qu'une famille  $\mathcal{F}$  de graphes vérifie un  $n^\omega$ -théorème de séparation [15],  $0 \leq \omega < 1$ , s'il existe deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$ ,  $0 < \alpha < 1$  et  $\beta > 0$ , telles que pour tout graphe  $G=(V, E)$  de  $\mathcal{F}$ , l'ensemble de ses  $n$  sommets peut être partitionné en trois sous-ensembles  $A, B, C$  vérifiant :

- aucune arête ne joint un sommet de  $A$  et un sommet de  $B$ ,
- $|A| \leq \alpha n$ ,  $|B| \leq \alpha n$ ,
- $|C| \leq \beta n^\omega$ .

L'ensemble  $C$  est appelé *séparateur* du graphe  $G$ ; dans le cas  $\omega=0$ , on parle de 1-théorème de séparation.

Dans toute la suite, on considère une famille de graphes  $S$  vérifiant un  $n^\sigma$ -théorème de séparation,  $0 < \sigma < 1$ , et dont les graphes admettent, au sens de la définition 1.2, une partition de l'ensemble des sommets en un arbre des séparateurs associé à ce  $n^\sigma$ -théorème de séparation.

**DÉFINITION 1.2 :** Soit  $G=(V, E)$  un graphe de  $S$ . On dit que  $G$  admet une partition  $\mathcal{P}$  de  $V$  en un arbre des séparateurs  $\mathcal{A}$  si on a la propriété suivante :

la racine de  $\mathcal{A}$  est un séparateur  $C$  de  $G$  (au sens du  $n^\sigma$ -théorème de séparation), et les deux sous-arbres de  $\mathcal{A}$  ayant  $C$  comme ancêtre commun sont des arbres des séparateurs correspondant à des partitions de l'ensemble des sommets des sous-graphes de  $G$  induits par les parties  $A$  et  $B$  obtenues par séparation.

Pour toute la suite, on notera  $\mathcal{P} = \{C_i\}_{i=1, N}$  et on introduit la notion de graphe quotient par rapport à la partition  $\mathcal{P}$ .

**DÉFINITION 1.3 :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe de  $S$ . Le graphe quotient de  $G$  par rapport à la partition  $\mathcal{P}$  est le graphe  $Q(G, \mathcal{P}) = (\mathcal{P}, \mathcal{E})$  avec  $(C_i, C_j)$  appartient à  $\mathcal{E}$  si et seulement si il existe  $x$  dans  $C_i$  et  $y$  dans  $C_j$  tels que  $(x, y)$  appartient à  $E$ .

On note  $\mathcal{S}$  la famille des graphes quotients  $Q(G, \mathcal{P})$  pour  $G$  dans  $S$ .

Pour tout  $i$  compris entre 1 et  $N$ , on note enfin :

- $G_i = (V_i, E_i)$  le sous-graphe de  $G$  séparé par  $C_i$  et  $n_i = |V_i|$ ,
- $Q(G_i, \mathcal{P}_i) = (\mathcal{P}_i, \mathcal{E}_i)$ , avec  $N_i = |\mathcal{P}_i|$ , le sous-graphe de  $Q(G, \mathcal{P})$  induit par  $\mathcal{P}_i$ , où  $\mathcal{P}_i$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{P}$  contenant les séparateurs formant une partition de  $V_i$ .

## 2. PROPRIÉTÉS DE SÉPARATION DE LA FAMILLE DES GRAPHES QUOTIENTS

Soit  $G = (V, E)$  un graphe de  $S$  et  $\mathcal{P}$  une partition de  $V$  associée à un arbre des séparateurs  $\mathcal{A}$ . Pour démontrer que la famille  $\mathcal{S}$  admet un 1-théorème de séparation, on a besoin des résultats suivants.

**PROPOSITION 2.1 :** Il existe  $0 < \gamma < 1$  tel que si  $G$  est un graphe de  $S$ , on a alors pour tout  $i$  compris entre 1 et  $N$

$$\gamma n_i \leq N_i \leq n_i.$$

*Démonstration :* Considérons  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  un sous-graphe de  $G$  à  $p$  sommets séparé par le séparateur  $\tilde{C}$  de  $\mathcal{P}$  et soit  $h(p)$  le nombre minimal possible de séparateurs formant une partition de  $\tilde{V}$ .

Remarquons tout d'abord que l'on a toujours  $h(p) \geq 1$ ,  $\forall p \geq 1$ .

Posons

$$z_0 = \left( \frac{\beta}{1 - \alpha} \right)^{1/1 - \sigma}$$

et soit  $z_1$  le plus petit entier supérieur à  $z_0$  tel que  $(1 - \alpha) z_1 - \beta z_1^\sigma \geq 1$ . On a alors pour  $p > z_1$ ,

$$h(p) \geq 1 + \min [h(p_1) + h(p_2)] \quad (1)$$

où le minimum est pris pour tous les couples  $(p_1, p_2)$  tels que

$$\begin{aligned} 1 &\leq (1-\alpha)p - \beta p^\sigma \leq p_2 \leq p_1 \leq \alpha p \\ p - \beta p^\sigma &\leq p_1 + p_2 \leq p. \end{aligned} \quad (2)$$

En effet, la séparation sur  $\tilde{G}$  selon le  $n^\sigma$ -théorème de séparation conduit à  $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \tilde{C}$ ,  $\tilde{C}$  étant le séparateur, et on peut définir  $p_1$  et  $p_2$  comme  $p_1 = |\tilde{V}_1|$ ,  $p_2 = |\tilde{V}_2|$ . Comme  $p > z_1$ , on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq (1-\alpha)p - \beta p^\sigma \leq p_2 \leq p_1 \leq \alpha p \\ p - \beta p^\sigma &\leq p_1 + p_2 \leq p. \end{aligned}$$

De plus, par construction, le nombre de séparateurs formant une partition de  $\tilde{V}$  est égal à la somme du nombre de séparateurs formant une partition de  $\tilde{V}_1$  et du nombre de séparateurs formant une partition de  $\tilde{V}_2$  plus un, d'où les relations (1) et (2).

D'après le lemme technique 2.2, démontré à la fin de ce paragraphe, il existe une constante  $0 < \gamma < 1$  ne dépendant que de  $S$  telle que  $h(p) \geq \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p)$  pour  $p \geq 1$ . Appliquant cette inégalité au graphe  $G_i$  pour  $1 \leq i \leq N$ , on en conclut que  $\gamma n_i \leq N_i$ ; comme on a trivialement  $N_i \leq n_i$ , la proposition est démontrée.  $\square$

**LEMME 2.1 :** *Considérons  $Q(G, \mathcal{P}) = (\mathcal{P}, \mathcal{E})$  un graphe de  $\mathcal{S}$ ; soit  $(C_i, C_j)$  une arête de  $\mathcal{E}$ . Alors  $C_i$  et  $C_j$  sont sur la même branche de l'arbre  $\mathcal{A}$ .*

*Démonstration :* Raisonnons par l'absurde; supposons que  $C_j$  ne soit pas sur la même branche que  $C_i$  et notons  $C_k$  le premier ascendant commun à  $C_i$  et  $C_j$ . Soit  $G_k = (V_k, E_k)$  le sous-graphe de  $G$  séparé par  $C_k$ , alors  $V_k = A_k \cup B_k \cup C_k$ , et on a nécessairement  $C_i \subset A_k$  et  $C_j \subset B_k$  (ou l'inverse); comme d'après la définition 1.1 il n'y a pas d'arête joignant un sommet de  $A_k$  et un sommet de  $B_k$ ,  $(C_i, C_j)$  n'appartient pas à  $\mathcal{E}$  d'où la contradiction.  $\square$

On peut alors énoncer le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.1 :** *La famille  $\mathcal{S}$  vérifie un 1-théorème de séparation.*

*Démonstration :* Nous allons démontrer (cf. définition 1.1) qu'il existe une constante  $\alpha^*$ ,  $0 < \alpha^* < 1$ , telle que pour tout graphe  $Q(G, \mathcal{P}) = (\mathcal{P}, \mathcal{E})$  de  $\mathcal{S}$ , l'ensemble de ses  $N$  sommets peut être partitionné en trois sous-ensembles **A**, **B**, **C** vérifiant :

- (a) aucune arête de  $\mathcal{E}$  ne joint un sommet de **A** et un sommet de **B**,
- (b)  $|\mathbf{A}| \leq \alpha^* N$  et  $|\mathbf{B}| \leq \alpha^* N$ ,
- (c)  $|\mathbf{C}| = 1$ ,

ce qui veut dire que  $\mathcal{S}$  admet un 1-théorème de séparation avec la constante  $\beta^* = 1$ .

Soit donc  $Q(G, \mathcal{P}) = (\mathcal{P}, \mathcal{E})$  un graphe de  $\mathcal{S}$  avec  $G = (V, E)$  dans  $S$  et  $|V| = n$ . Si  $C$  est la racine de l'arbre  $\mathcal{A}$  de  $G$ , on a alors  $V = A \cup B \cup C$  avec

- aucune arête ne joint un sommet de  $A$  et un sommet de  $B$ ,
- $|A| \leq \alpha n$  et  $|B| \leq \alpha n$ ,
- $|C| \leq \beta n^\sigma$ .

Définissons maintenant la séparation sur  $Q(G, \mathcal{P})$ ;

$$\mathbf{A} = \mathcal{P}_A = \{ C_i \text{ tels que } C_i \subset A \}$$

$$\mathbf{B} = \mathcal{P}_B = \{ C_i \text{ tels que } C_i \subset B \}$$

$$\mathbf{C} = \{ C \}.$$

D'après le lemme 2. 1, si  $(C_i, C_j) \in \mathcal{E}$  alors  $C_j$  et  $C_i$  sont sur la même branche de  $\mathcal{A}$ , donc aucune arête de  $\mathcal{E}$  ne joint un sommet de  $\mathbf{A}$  et un sommet de  $\mathbf{B}$ ; (a) est démontré. D'autre part, la définition de  $\mathbf{C}$  entraîne immédiatement (c).

Supposant que  $|\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}|$ , il reste alors à montrer que  $|\mathbf{A}| \leq \alpha^* N$ ,  $0 < \alpha^* < 1$ ,  $\alpha^*$  ne dépendant que de  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , la constante introduite à la proposition 2. 1 ( $\gamma$  ne dépend que de  $\beta$ ,  $\alpha$  et  $\sigma$ ) et soit  $z_0$  le plus petit entier strictement supérieur à  $(\beta/(1-\alpha))^{1/1-\sigma}$ . On définit alors la constante  $\mu_0$  par

$$\mu_0 = \gamma \frac{1-\alpha}{\alpha} - \frac{\gamma\beta}{\alpha} \frac{1}{(z_0)^{1-\sigma}}; \quad (3)$$

$\mu_0$  est strictement positive et ne dépend que de  $\sigma$ ,  $\beta$  et  $\alpha$ . Posons enfin

$$\alpha^* = \max\left(\frac{1}{1+\mu_0}, \frac{1}{1+\gamma/(\alpha z_0)}\right); \quad (4)$$

$\alpha^*$  est une constante ne dépendant que de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\sigma$  et vérifie  $0 < \alpha^* < 1$ .

(i) soit  $N \leq z_0$  et  $0 \leq |\mathbf{B}| < |\mathbf{A}|$ .

On a  $|\mathbf{A}| \leq |A| \leq \alpha n$ , comme  $n \leq N/\gamma$  et que  $N \leq z_0$ , il vient  $|\mathbf{A}| \leq \alpha z_0/\gamma$ . Considérons

$$\frac{N}{|\mathbf{A}|} = \frac{|\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| + |\mathbf{C}|}{|\mathbf{A}|} = 1 + \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|} + \frac{1}{|\mathbf{A}|}$$

donc

$$\frac{N}{|A|} \geq 1 + \frac{1}{|A|} \geq 1 + \gamma/(\alpha z_0).$$

On a obtenu

$$|A| \leq [1 + \gamma/(\alpha z_0)]^{-1} N$$

soit  $|A| \leq \alpha^* N$  en utilisant (4).

(ii) soit  $N > z_0$ ; d'après la proposition 2.1 on a  $\gamma |B| \leq |B|$ , donc

$$\frac{|B|}{|A|} \geq \gamma \frac{|B|}{|A|} \geq \frac{\gamma((1-\alpha)n - \beta n^\sigma)}{\alpha n}$$

ce qui s'écrit

$$\frac{|B|}{|A|} \geq \frac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{\gamma\beta}{\alpha} \frac{1}{n^{1-\sigma}}$$

soit encore

$$\frac{|B|}{|A|} \geq \frac{\gamma(1-\alpha)}{\alpha} - \frac{\gamma\beta}{\alpha} \frac{1}{z_0^{1-\sigma}}$$

car  $z_0 < N \leq n$ .

On a donc obtenu d'après (3)

$$\frac{|B|}{|A|} \geq \mu_0$$

ce qui conduit à

$$\frac{N}{|A|} = 1 + \frac{|B|}{|A|} + \frac{1}{|A|} \geq 1 + \mu_0$$

c'est-à-dire

$$|A| \leq [1 + \mu_0]^{-1} N \quad \text{soit} \quad |A| \leq \alpha^* N \text{ d'après (4).}$$

Le théorème est démontré.  $\square$

Remarquons que dans cette séparation, le sous-graphe de  $Q(G, \mathcal{P})$  induit par  $A$  est encore dans  $\mathcal{S}$  car c'est précisément le graphe  $Q(G(A), \mathcal{P}_A) = Q(G(A), A)$  où  $G(A)$  est le sous-graphe de  $G$  induit par  $A$ ; il

en est bien sûr de même pour le sous-graphe induit par **B**. De plus, il est clair que  $Q(G, \mathcal{P})$  admet une partition en un arbre des séparateurs associé au 1-théorème de séparation, et que cet arbre est exactement l'arbre  $\mathcal{A}$ .

La famille des graphes planaires admet un  $n^{1/2}$ -théorème de séparation [15] et est fermée pour la relation sous-graphe; une propriété intéressante d'un point de vue théorique est la *conservation de ce caractère planaire par passage au quotient*. Nous donnons ici simplement une condition suffisante de conservation.

**PROPOSITION 2.2 :** *Soit  $G=(V, E)$  un graphe planaire. Si pour tout  $i$  compris entre 1 et  $N$ , le sous-graphe de  $G$  induit par  $C_i$  est connexe alors  $Q(G, \mathcal{P})$  est planaire.*

*Démonstration :* Soit  $G$  un graphe planaire et soit  $Q(G, \mathcal{P})$  le graphe quotient associé pour  $\mathcal{P} = \{C_i\}_{i=1, N}$ . Considérons la construction suivante formée de  $N$  étapes :

- $G_{(0)} = G$
- pour  $i = 1$  à  $N$ ,  $G_{(i)}$  est obtenu en contractant dans  $G_{(i-1)}$  le sous-graphe connexe induit par  $C_i$  en un seul sommet  $s_i$ .

On obtient  $Q(G, \mathcal{P})$  à partir de  $G_{(N)}$  en identifiant  $s_i$  à  $C_i$  pour tout  $i$ .

Comme l'opération de *contraction d'un sous-graphe connexe en un seul sommet* conserve la planarité et que  $G$  est planaire, on en déduit que  $Q(G, \mathcal{P})$  l'est aussi. La proposition est démontrée.  $\square$

Une autre propriété qui se conserve par passage au quotient est celle de *densité bornée*; en effet, on a

$$|\mathcal{E}| \leq |E| \leq kn \leq (k/\gamma)N$$

d'après la proposition 2. 1.

Par contre, la propriété de *degré borné* ne se conserve pas par passage au quotient; cette dernière remarque, de même que celle sur la planarité, est illustrée sur l'exemple donné au paragraphe 4.

Pour conclure ce paragraphe 2, nous démontrons maintenant le lemme technique utilisé dans la proposition 2. 1.

**LEMME 2.2 :** *Soient  $\beta > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \sigma < 1$  et  $z_0 = (\beta/(1-\alpha))^{1/(1-\sigma)}$ .*

*Notons  $z_1$  le plus petit entier supérieur à  $z_0$  tel que  $(1-\alpha)z_1 - \beta z_1^\sigma \geq 1$ ; Si  $h$  est une fonction telle que :*

- $\forall p \geq 1, h(p) \geq 1$
- $\forall p > z_1, h(p) \geq 1 + \min[h(p_1) + h(p_2)]$

où le minimum est pris pour tous les couples  $(p_1, p_2)$  vérifiant

$$\begin{cases} 1 \leq (1-\alpha)p - \beta p^\sigma \leq p_2 \leq p_1 \leq \alpha p \\ p - \beta p^\sigma \leq p_1 + p_2 \leq p, \end{cases}$$

alors il existe un réel  $0 < \gamma < 1$  ne dépendant que de  $\alpha, \beta$ , et  $\sigma$  tel que

$$\forall p \geq 1, \quad h(p) \geq \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p).$$

*Démonstration:* On introduit pour le calcul les deux fonctions  $\varepsilon(p)$  et  $\mu(p)$  comme suit :

- $(1-\alpha)p - \beta p^\sigma = (1-\alpha)p \left(1 - \left(\frac{z_0}{p}\right)^{1-\sigma}\right) = (1-\alpha)p \varepsilon(p)$  pour  $p > z_1$ ;

$\varepsilon$  est alors une fonction croissante et continue vérifiant

$$0 < \varepsilon(z_1 + 1) \leq \varepsilon(p) < 1, \quad \text{pour } p > z_1.$$

- $\mu(p) = \alpha^\sigma + (1-\alpha)^\sigma \varepsilon(p)^\sigma$ ; quand  $p$  tend vers l'infini,  $\mu(p)$  tend vers  $\alpha^\sigma + (1-\alpha)^\sigma$  qui est strictement plus grand que 1 car  $\sigma$  est strictement plus petit que 1. On définit alors  $z_2$  comme étant le plus petit entier supérieur à  $z_1$  tel que  $\mu(z_2) > 1$ ; on a alors pour  $p > z_2$ ,  $\mu(p) = 1 + @ (p)$  où  $@$  est une fonction strictement positive et croissante.

On définit ensuite :

- $\xi = [\alpha^\sigma + (1-\alpha)^\sigma] \log\left(\frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon(z_1 + 1)}\right).$

$\xi$  est strictement positif et ne dépend que de  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$ ; soit alors  $z_3$  le plus petit entier supérieur à  $z_2$  tel que

$$\forall q \geq z_3, \quad @(z_3) \log(q) - \xi - \beta/2 > 0. \tag{5}$$

- Considérons enfin un réel  $\gamma$  vérifiant

$$\frac{1}{z_3/2 + z_3^\sigma \log(z_3)} \geq 2\gamma > 0 \tag{6}$$

(on remarquera que ceci implique  $\gamma < 1$ ).

Nous allons démontrer par récurrence sur  $p$  que  $h(p) \geq \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p)$ .

(i) Soit  $p < z_3$ ; comme par hypothèse on a  $h(p) \geq 1$ , il vient

$$\frac{h(p)}{p/2 + p^\sigma \log(p)} > \frac{1}{z_3/2 + z_3^\sigma \log(z_3)} \geq 2\gamma \quad \text{d'après (6).}$$

Ceci donne alors

$$h(p) > \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p).$$

(ii) Soit  $p \geq z_3$ ; en utilisant notre hypothèse de récurrence on peut écrire

$$h(p) \geq 1 + \gamma p_1 + 2\gamma p_1^\sigma \log(p_1) + \gamma p_2 + 2\gamma p_2^\sigma \log(p_2)$$

pour des valeurs convenables de  $p_1$  et de  $p_2$  comme définies dans l'énoncé. Il vient alors

$$h(p) \geq 1 + \gamma(p_1 + p_2) + 2\gamma[(p_1^\sigma + p_2^\sigma) \log((1-\alpha)p - \beta p^\sigma)]. \quad (7)$$

On a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} - p_1 + p_2 &\geq p - \beta p^\sigma & (8) \\ - p_1^\sigma + p_2^\sigma &\geq (\alpha p)^\sigma + [(1-\alpha)p - \beta p^\sigma]^\sigma \end{aligned}$$

en effet, pour  $p_1 + p_2$  fixé, la fonction  $p_1^\sigma + p_2^\sigma$  est minimisée quand l'un des deux arguments est minimum et l'autre maximum; il vient alors

$$p_1^\sigma + p_2^\sigma \geq [\alpha^\sigma + (1-\alpha)^\sigma \varepsilon(p)^\sigma] p^\sigma$$

soit

$$p_1^\sigma + p_2^\sigma \geq \mu(p) p^\sigma. \quad (9)$$

A partir de (7), (8) et (9), on déduit que

$$h(p) \geq 1 + \gamma p - \gamma \beta p^\sigma + 2\gamma \mu(p) p^\sigma [\log(p) + \log((1-\alpha)\varepsilon(p))]$$

soit

$$h(p) \geq 1 + \gamma p + 2\gamma \mu(p) p^\sigma \log(p) - \left[ 2\gamma \mu(p) \log\left(\frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon(p)}\right) + \gamma \beta \right] p^\sigma. \quad (10)$$

D'autre part

$$\mu(p) \leq \alpha^\sigma + (1-\alpha)^\sigma \quad \text{et} \quad \log\left(\frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon(p)}\right) \leq \log\left(\frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon(z_1+1)}\right)$$

donc

$$\mu(p) \log \left( \frac{1}{(1-\alpha) \varepsilon(p)} \right) \leq \xi.$$

L'inégalité (10) entraîne alors

$$h(p) \geq 1 + \gamma p + 2\gamma \mu(p) p^\sigma \log(p) - (2\gamma \xi + \gamma \beta) p^\sigma.$$

En utilisant l'égalité  $\mu(p) = 1 + @ (p)$  et  $@ (p) \geq @ (z_3)$  pour  $p \geq z_3$ , il vient

$$h(p) \geq 1 + \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p) + 2\gamma [@(z_3) \log(p) - \xi - \beta/2] p^\sigma. \quad (11)$$

La définition de  $z_3$  (cf. (5)) et (11) donnent donc

$$h(p) \geq 1 + \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p)$$

soit

$$h(p) > \gamma p + 2\gamma p^\sigma \log(p) \quad \text{pour } p \geq z_3.$$

Le lemme est démontré.  $\square$

### 3. ÉTUDE DE L'ÉLIMINATION SUR LA FAMILLE DES GRAPHES QUOTIENTS

L'étude de l'élimination de Gauss au sens des graphes a fait l'objet de nombreux articles; on pourra consulter en particulier ([22, 23]).

DÉFINITION 3.1 : Soit  $G = (V, E)$  un graphe dont les  $n$  sommets sont numérotés par la bijection  $\varphi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$ . On appelle *graphe d'élimination* de  $G$  le graphe  $G^* = (V, E^*)$  défini par :

$(v, w)$  appartient à  $E^*$  si et seulement si

- ou bien  $(v, w)$  appartient à  $E$ ,
- ou bien il existe un chemin  $[v = v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} = w]$  dans  $G$  tel que  $\varphi^{-1}(v_i) < \min(\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(w))$  pour  $i = 2, k$ .

On dit que  $G^*$  est la fermeture monotone transitive de  $G$ .

On s'intéresse à l'élimination sur la famille  $\mathcal{S}$  des graphes quotients construits à partir de ceux contenus dans  $S$  qui auront été préalablement munis d'une *numérotation de type dissections emboîtées*.

DÉFINITION 3.2 : Soit  $G$  un graphe de  $S$ ; soit  $\mathcal{A}$  un arbre des séparateurs associé au  $n^\sigma$ -théorème de séparation dont la racine est le séparateur  $C$  (cf.

définition 1. 2). Une numérotation des sommets de type dissections emboîtées associée à ce théorème de séparation est une numérotation dans laquelle les plus grands numéros sont affectés aux sommets de  $C$ , et telle que chaque sous-arbre de  $\mathcal{A}$  est muni récursivement d'une numérotation de type dissections emboîtées.

L'ordre d'élimination des sommets de  $G$  correspond à une numérotation *post-ordre* des  $N$  sommets de  $\mathcal{A}$ . La numérotation des sommets de  $Q(G, \mathcal{P})$  est alors une numérotation de type dissections emboîtées associée au 1-théorème de séparation démontré au paragraphe 2; elle est en fait induite par celle des sommets de  $G$  associé au  $n^\sigma$ -théorème de séparation.

Dans toute la suite, on se restreindra à la sous-famille  $S_\delta$  de  $S$  formée de graphes dont les sommets ont un degré borné par l'entier  $\delta$  positif; on notera alors  $\mathcal{S}_\delta$  la famille des graphes quotients  $Q(G, \mathcal{P})$  où  $G$  est dans  $S_\delta$ .

L'objet de ce paragraphe est donc d'étudier le graphe d'élimination  $Q(G, \mathcal{P})^* = (\mathcal{P}, \mathcal{E}^*)$  et de montrer que  $|\mathcal{E}^*|$  est au plus un  $\mathcal{O}(N)$ .

Rappelons tout d'abord que les résultats de complexité obtenus sur  $|E^*|$  pour la famille de graphes  $S_\delta$  utilisent de manière essentielle les propriétés suivantes: l'existence d'un  $n^\sigma$ -théorème de séparation d'une part, l'hypothèse de degré borné d'autre part ([12, 21, 20]).

La famille des graphes quotients ne vérifie pas, elle, la propriété de degré borné mais une propriété plus faible, à savoir que les sommets des graphes de  $\mathcal{S}_\delta$  ont un degré variant comme un  $\mathcal{O}(N^\sigma)$  (cf. lemme 3. 1). Par contre, cette famille satisfait une propriété de séparation très forte (l'existence d'un 1-théorème de séparation démontrée au théorème 2. 1), suffisante pour compenser la croissance du degré. En effet, on montre plus généralement au théorème 3. 1 que le nombre d'arêtes du graphe d'élimination varie comme un  $\mathcal{O}(n)$  pour les familles de graphes dont le degré maximum varie avec  $n$  (comme un  $\mathcal{O}(n^x)$ ,  $x < 1$ ), pourvu qu'elles vérifient une propriété de séparation assez forte (existence d'un  $n^\lambda$ -théorème de séparation avec  $2\lambda + x < 1$ ).

LEMME 3. 1 : Soit  $i$  compris entre 1 et  $N$ . Les sommets du graphe  $Q(G_i, \mathcal{P}_i)$  ont un degré variant au plus comme un  $\mathcal{O}(N_i^\sigma)$ .

Démonstration: Soit  $i$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Le nombre maximal d'arêtes de  $Q(G, \mathcal{P})$  ayant  $C_i$  comme extrémité est  $|\text{Adj}_G(C_i)|$ ; comme  $G$  appartient à  $S_\delta$ , on a

$$|\text{Adj}_G(C_i)| \leq \delta |C_i| \quad \text{soit} \quad |\text{Adj}_G(C_i)| \leq \delta \beta n_i^\sigma.$$

En utilisant la proposition 2. 1, on obtient finalement

$$|\text{Adj}_G(C_i)| \leq (\delta \beta / \gamma^\sigma) N_i^\sigma$$

et le lemme est démontré.  $\square$

Considérons la famille de graphes  $\mathcal{F}_x$ , où  $x$  est un réel compris strictement entre 0 et 1, vérifiant les propriétés suivantes :

— il existe  $\xi > 0$  tel que si  $G$  est un graphe de  $\mathcal{F}_x$  à  $n$  sommets, le degré de ses sommets varie au plus comme  $\xi n^x$ .

— la famille  $\mathcal{F}_x$  vérifie un  $n^\lambda$ -théorème de séparation de constantes associées  $0 < \alpha < 1$ ,  $\beta > 0$  avec  $0 < \lambda < 1/2$  et  $2\lambda + x < 1$ ; de plus, les graphes de  $\mathcal{F}_x$  admettent un arbre des séparateurs et sont munis d'une numérotation de type dissections emboîtées associée à ce théorème de séparation.

**THÉORÈME 3.1 :** Soit  $G = (V, E)$  un graphe de  $\mathcal{F}_x$  et soit  $G^* = (V, E^*)$  son graphe d'élimination; le cardinal de  $E^*$  est alors au plus un  $\mathcal{O}(n)$ .

*Démonstration :* Soit donc  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , un graphe de  $\mathcal{F}_x$ ; considérons  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  le sous-graphe de  $G$  séparé par le séparateur  $\tilde{C}$  de  $\mathcal{P}$  et ayant  $p$  sommets et  $b$  arêtes dans sa brosse (la brosse de  $\tilde{G}$  dans  $G$  [21] est l'ensemble des arêtes de  $E$  dont une extrémité et une seule est dans  $\tilde{V}$ ).

Définissons alors  $f(b, p)$  comme étant le nombre maximal possible d'arêtes de  $E^*$  dont l'extrémité de plus petit numéro est dans  $\tilde{V}$ .

Pour tout  $p \geq 1$  et  $b \geq 0$ , il est clair que l'on a toujours  $f(b, p) \leq pb + p^2/2$ ; d'autre part, si  $p > z_0$ ,  $z_0 = [\beta/(1-\alpha)]^{1/1-\lambda}$ , on a alors

$$f(b, p) \leq \beta^2/2 p^{2\lambda} + \beta p^\lambda b + \max [f(b_1, p_1) + f(b_2, p_2)] \quad (12)$$

où le maximum est pris pour les couples  $(p_1, p_2)$  et  $(b_1, b_2)$  tels que

$$\begin{aligned} 0 < (1-\alpha)p - \beta p^\lambda &\leq p_2 \leq p_1 \leq \alpha p \\ p - \beta p^\lambda &\leq p_1 + p_2 \leq p \end{aligned} \quad (13)$$

et

$$b_1 + b_2 \leq b + \xi \beta p^{\lambda+x}. \quad (14)$$

En effet, la séparation sur  $\tilde{G}$  selon le  $n^\lambda$ -théorème de séparation conduit à  $\tilde{V} = \tilde{V}_1 \cup \tilde{V}_2 \cup \tilde{C}$ ,  $\tilde{C}$  étant le séparateur dont les sommets sont numérotés avec des numéros plus grands que ceux que l'on affecte aux sommets de  $\tilde{V}_1$  et de  $\tilde{V}_2$ . Tout comme pour  $\tilde{G}$ , on définit  $p_1, b_1, p_2, b_2$  pour les sous-graphes induits par  $\tilde{V}_1$  et  $\tilde{V}_2$ ; comme  $p > z_0$ , aucun de ces deux sous-ensembles de sommets ne peut être vide et on a (13). L'inégalité  $b_1 + b_2 \leq b + |B_{\tilde{C}}|$  établie dans [21] où  $B_{\tilde{C}}$  est la brosse de  $\tilde{C}$ , puis les majorations  $|B_{\tilde{C}}| \leq \xi p^x |\tilde{C}|$  avec  $\xi > 0$  et  $|\tilde{C}| \leq \beta p^\lambda$ , entraînent (14).

D'autre part, le nombre maximal d'arêtes de  $E^*$  dont l'extrémité de plus petit numéro est dans  $\tilde{C}$  est majoré par  $\beta^2/2 p^{2\lambda} + \beta p^\lambda b$  [21]. Étant donnée

la méthode de numérotation et la définition 3.1 de  $G^*$ , aucune arête de  $E^*$  ne peut joindre un sommet de  $\tilde{V}_1$  et un sommet de  $\tilde{V}_2$ ; on a donc l'inégalité (12).

D'après le lemme technique 3.2 démontré à la fin de ce paragraphe, il existe trois constantes réelles  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  telles que

$$f(b, p) \leq \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} + \gamma_3 p^\lambda b, \quad \forall p \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall b \geq 0.$$

En appliquant cette inégalité à  $G$ , avec  $p = n$  et  $b = 0$ , on obtient la majoration annoncée. Le théorème est démontré.  $\square$

Le corollaire 3.1 donne alors le résultat recherché.

**COROLLAIRE 3.1 :** *Le cardinal de  $\mathcal{E}^*$  est au plus un  $\mathcal{O}(N)$ .*

*Démonstration :* Soit  $Q(G, \mathcal{P}) = (\mathcal{P}, \mathcal{E})$  un graphe de  $\mathcal{S}_\delta$ , ayant  $N$  sommets et construit à partir de  $G = (V, E)$  un graphe de  $S_\delta$ ; considérons  $Q(G, \mathcal{P})^* = (\mathcal{P}, \mathcal{E}^*)$  son graphe d'élimination.

D'après le théorème 2.1,  $\mathcal{S}_\delta$  admet un 1-théorème de séparation; pour les mêmes constantes associées,  $\mathcal{S}_\delta$  admet trivialement un  $n^\lambda$ -théorème de séparation avec en particulier  $\lambda < (1 - \sigma)/2$  et donc  $0 < \lambda < 1/2$ . On a alors  $2\lambda + \sigma < 1$ ; en utilisant le lemme 3.1 et le théorème 3.1, on en déduit que  $|\mathcal{E}^*|$  varie comme un  $\mathcal{O}(N)$ . Le corollaire est démontré.  $\square$

Pour conclure ce paragraphe 3, nous démontrons maintenant le lemme technique utilisé dans le théorème 3.1.

**LEMME 3.2 :** *Soient  $\beta > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \lambda < 1/2, 0 < x < 1$  avec  $2\lambda + x < 1$  et  $\xi > 0$ .*

*Notons*

$$z_0 = \left( \frac{\beta}{1 - \alpha} \right)^{1/1 - \lambda};$$

*si  $f$  est une fonction telle que*

$$- \quad \forall p \geq 1 \quad \text{et} \quad \forall b \geq 0, \quad f(b, p) \leq pb + p^2/2$$

*et*

$$- \quad \forall p > z_0,$$

$$f(b, p) \leq \beta^2/2 \quad p^{2\lambda} + \beta p^\lambda b + \max [f(b_1, p_1) + f(b_2, p_2)]$$

*où le maximum est pris pour tous les couples  $(p_1, p_2)$  et  $(b_1, b_2)$  tels que*

$$\begin{cases} 0 < (1 - \alpha)p - \beta p^\lambda \leq p_2 \leq p_1 \leq \alpha p \\ p - \beta p^\lambda \leq p_1 + p_2 \leq p \end{cases}$$

et

$$b_1 + b_2 \leq b + \xi \beta p^{\lambda+x},$$

alors il existe trois réels positifs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  tels que

$$\forall p \geq 1, \quad \forall b \geq 0, \quad f(b, p) \leq \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} + \gamma_3 p^\lambda b.$$

*Démonstration:* On introduit pour le calcul les deux fonctions  $\varepsilon(p)$  et  $\mu(p)$  comme suit :

- $(1 - \alpha)p - \beta p^\lambda = (1 - \alpha)p \left( 1 - \left( \frac{z_0}{p} \right)^{1-\lambda} \right) = (1 - \alpha)p \varepsilon(p)$  pour  $p > z_0$ ;

$\varepsilon$  est alors une fonction croissante et continue vérifiant

$$0 < \varepsilon(z_0 + 1) \leq \varepsilon(p) < 1, \quad \text{pour } p > z_0.$$

- $\mu(p) = \alpha^{2\lambda+x} + (1 - \alpha)^{2\lambda+x} \varepsilon(p)^{2\lambda+x}$ ; en utilisant un argument identique à celui du lemme 2.2, on définit alors  $z_1$  comme étant le plus petit entier supérieur à  $z_0$  tel que  $\mu(z_1) > 1$ .

Considérons maintenant les trois réels positifs  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  définis par :

$$\begin{cases} \gamma_3 \geq \max [z_1^{1-\lambda}, \beta / (1 - \alpha^\lambda)] \\ \gamma_2 \geq (\beta^2 / 2 + \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta) / (\mu(z_1) - 1) \\ \gamma_1 \geq \gamma_2 + z_1^2 / 2. \end{cases} \quad (15)$$

Nous allons démontrer par récurrence sur  $p$  que

$$f(b, p) \leq \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} + \gamma_3 p^\lambda b.$$

(i) Soit  $p < z_1$ ; on a par hypothèse

$$f(b, p) \leq pb + p^2 / 2; \quad (16)$$

l'égalité  $pb = p^{1-\lambda} p^\lambda b$  entraîne  $pb < z_1^{1-\lambda} p^\lambda b$  pour  $p < z_1$  soit, en utilisant (15),

$$pb < \gamma_3 p^\lambda b. \quad (17)$$

Considérons  $p \rightarrow \Psi(p) = \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x}, p > 0$ .

On a  $\Psi'(p) = \gamma_1 - \gamma_2 (2\lambda + x) p^{2\lambda+x-1}$  et  $\Psi'(p) \geq \gamma_1 - \gamma_2 (2\lambda + x) > \gamma_1 - \gamma_2$  pour  $p \geq 1$ ; la relation  $\gamma_1 - \gamma_2 \geq z_1^2 / 2 > 0$  entraîne  $\Psi'(p) > 0$  donc  $\Psi(p) \geq \Psi(1)$  pour  $p \geq 1$ . Ceci conduit à

$$\gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} \geq \gamma_1 - \gamma_2 \geq z_1^2 / 2 > p^2 / 2 \quad \text{pour } p < z_1. \quad (18)$$

En combinant (16), (17) et (18), il vient

$$f(b, p) < \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} + \gamma_3 p^\lambda b \quad \text{pour } p < z_1.$$

(ii) Soit  $p \geq z_1$ ; en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$f(b, p) \leq \beta^2/2 p^{2\lambda} + \beta p^\lambda b + \gamma_1 p_1 - \gamma_2 p_1^{2\lambda+x} + \gamma_3 p_1^\lambda b_1 \\ + \gamma_1 p_2 - \gamma_2 p_2^{2\lambda+x} + \gamma_3 p_2^\lambda b_2 \quad (19)$$

pour des valeurs convenables de  $p_1, p_2, b_1, b_2$  comme définies dans l'énoncé. On a alors les inégalités suivantes :

$$- p_1 + p_2 \leq p. \quad (20) \\ - p_1^{2\lambda+x} + p_2^{2\lambda+x} \geq (\alpha p)^{2\lambda+x} + [(1-\alpha)p - \beta p^\lambda]^{2\lambda+x}$$

que l'on obtient par un argument identique à celui utilisé au lemme 2. 2; il vient alors

$$p_1^{2\lambda+x} + p_2^{2\lambda+x} \geq [\alpha^{2\lambda+x} + (1-\alpha)^{2\lambda+x} \varepsilon (p)^{2\lambda+x}] p^{2\lambda+x}$$

soit

$$- p_1^{2\lambda+x} + p_2^{2\lambda+x} \geq \mu(p) p^{2\lambda+x}. \quad (21) \\ - p_1^\lambda b_1 + p_2^\lambda b_2 \leq \alpha^\lambda p^\lambda (b_1 + b_2) \leq \alpha^\lambda p^\lambda (b + \xi \beta p^{\lambda+x})$$

ce qui donne

$$p_1^\lambda b_1 + p_2^\lambda b_2 \leq \alpha^\lambda p^\lambda b + \alpha^\lambda \xi \beta p^{2\lambda+x}. \quad (22)$$

En regroupant (19), (20), (21) et (22), il vient

$$f(b, p) \leq \gamma_1 p - [\gamma_2 \mu(p) - \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta - \beta^2/2] p^{2\lambda+x} + (\gamma_3 \alpha^\lambda + \beta) p^\lambda b. \quad (23)$$

Comme d'après (15)  $\gamma_3 \geq \beta/(1-\alpha^\lambda)$ , on a

$$\gamma_3 \alpha^\lambda + \beta \leq \gamma_3. \quad (24)$$

Par ailleurs, la fonction  $\mu$  est croissante donc

$$\gamma_2 \mu(p) - \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta - \beta^2/2 \geq \gamma_2 \mu(z_1) - \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta - \beta^2/2 \quad \text{pour } p \geq z_1;$$

le choix de  $\gamma_2$  dans (15) implique  $\gamma_2 \mu(z_1) - \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta - \beta^2/2 \geq \gamma_2$  donc

$$\gamma_2 \mu(p) - \gamma_3 \alpha^\lambda \xi \beta - \beta^2/2 \geq \gamma_2 \quad \text{pour } p \geq z_1. \quad (25)$$

En regroupant (23), (24) et (25), on obtient finalement

$$f(b, p) \leq \gamma_1 p - \gamma_2 p^{2\lambda+x} + \gamma_3 p^\lambda b \quad \text{pour } p \geq z_1.$$

Le lemme est démontré.  $\square$

#### 4. APPLICATION A LA CONSTRUCTION DU GRAPHE DES COMMUNICATIONS D'UN ALGORITHME RÉPARTI DE RÉOLUTION DE GRANDS SYSTÈMES LINÉAIRES CREUX

Nous montrons maintenant que les résultats précédents permettent de répondre, dans un cas particulier, à certaines questions qui se posent plus généralement lors de la conception d'algorithmes parallèles [13, 18, 19] sur des calculateurs de type *message passing*. De tels calculateurs sont constitués d'un ensemble de processeurs indépendants au sens où ils disposent d'une mémoire propre et exécutent un programme propre; ces processeurs coordonnent leurs activités en échangeant des messages à travers un réseau de communication [5, 24].

Pour tirer parti du parallélisme, on est amené à partager le travail total en tâches indépendantes. A chacune de ces tâches, on associe un programme séquentiel appelé *processus*; les processus se transmettent des informations en utilisant les primitives du système de communication (primitives du type *émet* et *reçoit*). La conception d'un algorithme réparti passe donc par la construction du *graphe des communications* dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des processus et dont les arêtes sont les canaux de communication entre ces processus.

Dans ce qui suit nous étudions le graphe des communications associé à une implémentation répartie d'un algorithme de résolution de grands systèmes linéaires *creux*, de type *dissections emboîtées*; rappelons tout d'abord les principaux aspects de cette méthode.

On veut résoudre par méthode directe des systèmes linéaires

$$Mx = b,$$

où  $M$  est une matrice symétrique  $n \times n$  définie positive creuse et de grande taille; l'algorithme se décompose en deux étapes: factorisation de  $M$  sous la forme  $LDL'$  puis résolution  $Lz = b$ ,  $Dy = z$ ,  $L'x = y$ . La création de nouveaux termes non nuls durant la factorisation (phénomène de *remplissage*) fait que la matrice  $L$  est plus pleine que  $M$ . Ce phénomène de remplissage est lié à l'ordre d'élimination des inconnues c'est-à-dire à la *numérotation* de celles-ci. Pour analyser ce phénomène, il est intéressant d'étudier *l'élimination de Gauss au sens des graphes* [22, 23, 8].

DÉFINITION 4.1 : Soit  $M$  une matrice symétrique définie positive; on lui associe le graphe numéroté  $G=(V, E, \varphi)$  défini comme suit :

- il y a autant de sommets dans  $V$  que de colonnes (ou de lignes) dans  $M$
- la numérotation est une bijection  $\varphi: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow V$  et on peut alors écrire  $V = \{x_j\}_{j=1, n}$
- l'arête  $(x_j, x_i)$  est dans  $E$  si et seulement si  $M_{ij} \neq 0$  pour  $i > j$ .

Le remplissage est alors caractérisé par le résultat suivant [22, 23].

PROPOSITION 4.1 : *Le graphe associé à la matrice  $L$  obtenue par factorisation est le graphe d'élimination  $G^*=(V, E^*)$  (cf. définition 3.1) du graphe  $G=(V, E)$  associé à la matrice  $M$ .*

On s'intéresse à la résolution de systèmes  $Mx=b$  dont la matrice  $M$  est associée à un graphe  $G$  appartenant à une famille  $S_\delta$  de graphes vérifiant les propriétés suivantes :

- $S_\delta$  admet un  $n^\sigma$ -théorème de séparation,  $1/2 \leq \sigma < 1$ ,
- les graphes de  $S_\delta$  admettent un arbre des séparateurs associé à ce théorème de séparation,
- les sommets des graphes de  $S_\delta$  ont un degré borné par l'entier positif  $\delta$  (ces hypothèses correspondent aux classes de matrices apparaissant dans les problèmes pratiques et en particulier dans la méthode des éléments finis [4]).

La méthode considérée ici consiste à munir  $G$  d'une numérotation de type dissections emboîtées (cf. définition 3.2); cette méthode de numérotation est une méthode de type *divide and conquer* qui assure en particulier une bonne conservation du creux [7, 17, 12, 9, 21]. De plus, la partition  $\mathcal{P}$  associée à l'arbre des séparateurs  $\mathcal{A}$  permet d'élaborer une *structure de données par blocs pour la matrice  $L$* ; une étude de complexité relative à cette structure ainsi que des algorithmes adaptés à sa manipulation sont présentés dans [2].

Par ailleurs, étant de type *divide and conquer*, cette méthode induit naturellement du *parallélisme*. Dans [3], on conçoit un *algorithme réparti de résolution en associant un processus à chaque séparateur de la partition  $\mathcal{P}$* ; le graphe des communications associé à cet algorithme s'avère être alors  $\mathcal{G} = Q(G^*, \mathcal{P})$ .

On s'intéresse donc à la construction automatique de ce graphe des communications et à la complexité en temps de celle-ci.

La construction naturelle de  $Q(G^*, \mathcal{P})$  consiste à enchaîner les deux étapes

$$G \rightarrow G^* \rightarrow Q(G^*, \mathcal{P}) \quad (C1)$$

c'est-à-dire à faire une factorisation logique sur  $G$  pour déterminer  $G^*$  [23] suivie d'un passage au quotient; ces deux opérations ont une complexité en

temps variant comme un  $\mathcal{O}(|E^*|)$ , i.e. comme un  $\mathcal{O}(n \log(n))$  si  $\sigma=1/2$  et comme un  $\mathcal{O}(n^{2^\sigma})$  si  $1/2 < \sigma < 1$  [12, 21, 20].

Une autre construction consisterait à *commuter* les deux étapes décrites ci-dessus, i.e. à faire

$$G \rightarrow Q(G, \mathcal{P}) \rightarrow Q(G, \mathcal{P})^*. \tag{C2}$$

La proposition 4.2 démontrée dans [2] donne une condition suffisante, peu contraignante dans la pratique, qui assure que les résultats obtenus par les deux constructions sont identiques.

PROPOSITION 4.2 : Si pour tout  $i=1, N$  le séparateur  $C_i$  est contenu dans une seule composante connexe du graphe  $G_i$ , alors

$$Q(G, \mathcal{P})^* = Q(G^*, \mathcal{P}).$$

Notons que cette hypothèse est vérifiée en particulier pour les algorithmes de séparation introduits dans [7, 15]; on suppose dans ce qui suit que la proposition 4.2 est vérifiée.

On peut alors énoncer le résultat central de ce paragraphe.

PROPOSITION 4.3 : Le graphe des communications  $\mathcal{G}$  est à densité borné. De plus, il existe un algorithme de construction de ce graphe dont la complexité en temps est linéaire par rapport au nombre  $N$  de processus.

35		39	32	49	14	18	11
36		38	33	48	15	17	12
34		37	31	47	13	16	10
42		41	40	46	21	20	19
26		30	23	45	5	9	2
27		29	24	44	6	8	3
25							1
		28	22	43	4	7	

Figure 4.1

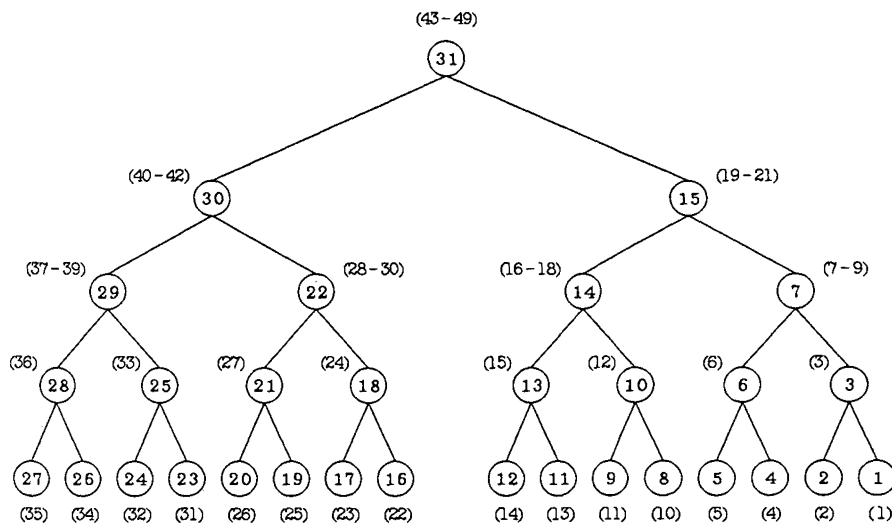


Figure 4.2

*Démonstration:* Nous avons par construction  $\mathcal{G} = Q(G^*, \mathcal{P})$ . En nous plaçant dans le cadre de la proposition 4.2, il vient alors  $\mathcal{G} = Q(G, \mathcal{P})^* = (\mathcal{P}, \mathcal{E}^*)$ ; le graphe  $\mathcal{G}$  peut donc être obtenu par la construction (C2).

La première étape, i.e. celle de passage au quotient à partir de  $G$ , a une complexité variant comme un  $\mathcal{O}(|E|)$ . Cette complexité est un  $\mathcal{O}(n)$  car  $G$  est à degré borné, et donc un  $\mathcal{O}(N)$  d'après la proposition 2.1.

La deuxième étape, i.e. celle de construction du graphe d'élimination de  $Q(G, \mathcal{P})$  et qui consiste en une factorisation logique [23] sur ce graphe, a une complexité variant comme un  $\mathcal{O}(|\mathcal{E}^*|)$ . Cette complexité est alors aussi un  $\mathcal{O}(N)$  d'après le corollaire 3.1.

On déduit donc que la construction de  $\mathcal{G}$  a une complexité en temps variant comme un  $\mathcal{O}(N)$  et que d'autre part  $\mathcal{G}$  est à densité borné. La proposition est démontrée.  $\square$

Pour conclure, considérons à titre d'exemple le graphe numéroté  $G$  à 49 sommets de la figure 4.1.

La numérotation des sommets est de type dissections emboîtées associée au  $n^{1/2}$ -théorème de séparation vérifié par la famille des graphes en grille [7].

L'arbre  $\mathcal{A}$  des séparateurs muni de sa numérotation post-ordre a l'allure représentée sur la figure 4.2.

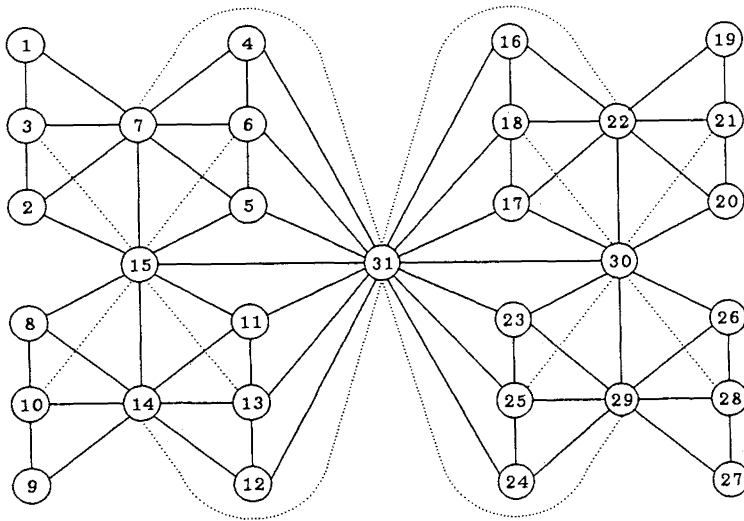


Figure 4.3

Pour chacun des 31 séparateurs nous avons indiqué la liste des numéros de ses sommets entre parenthèses.

Le graphe quotient  $Q(G, \mathcal{P})$  a donc 31 sommets. Nous représentons ci-dessous le graphe  $Q(G, \mathcal{P})^*$ ; les arêtes en traits pleins sont celles de  $Q(G, \mathcal{P})$  et les arêtes en traits pointillés sont celles qui ont été créées au cours de l'élimination.

Remarquons tout d'abord que  $Q(G, \mathcal{P})$  est planaire, ce qui est en conformité avec la proposition 2.2; enfin, on pourra vérifier que pour les graphes en grille à  $n = p \times p$  sommets, le degré du séparateur  $C_N$  dans  $Q(G, \mathcal{P})$  est  $2n^{1/2}$  et n'est donc pas borné.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. S. N. BHATT et F. T. LEIGHTON, *A Framework for Solving VLSI Graph Layout Problems*, J. Comput. Syst. Sci., vol. 28, 1984, p. 300-343.
2. P. CHARRIER et J. ROMAN, *Algorithmique et calculs de complexité pour un solveur de type dissections emboîtées*, Rapport interne Informatique, Université de Bordeaux-I, 1986, soumis pour publication dans Numerische Mathematik.
3. P. CHARRIER et J. ROMAN, *Study of the Parallelism Induced by a Nested Dissection Method and of its Implementation on a Message-Passing Multiprocessor Computer*, Rapport interne Informatique, Université de Bordeaux-I, 1987, soumis pour publication dans S.I.A.M. Journal of Computing.

4. P. G. CIARLET, *Numerical Analysis of the Finite Element Method*, Séminaire de mathématiques supérieures, Presses de l'Université de Montréal, 1976.
5. M. C. COUNLH, J. M. LEPINE, J. ROMAN, F. RUBI et B. VAUQUELIN, *Description du calculateur CHEOPS*, Rapport interne Informatique, Université de Bordeaux-I, 1986.
6. H. N. DJIDJEV, *On the Problem of Partitioning Planar Graphs*, S.I.A.M. J. Algebraic Discrete Methods, Vol. 3, 1982, p. 229-240.
7. J. A. GEORGE, *Nested Dissection of a Regular Finite Element Mesh.*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol. 10, 1973, p. 345-367.
8. J. A. GEORGE et J. W. H. LIU, *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1981.
9. J. R. GILBERT, *Some Nested Dissection Order is Nearly Optimal*, Technical report 86-767, Department of Computer Science, Cornell University, 1986.
10. J. R. GILBERT, J. P. HUTCHINSON et R. E. TARJAN, *A Separator Theorem for Graphs of Bounded Genus*, J. Algorithms, vol. 5, 1984, p. 391-407.
11. J. R. GILBERT, D. J. ROSE et A. EDENBRANDT, *A Separator Theorem for Chordal Graphs*, S.I.A.M. J. Algebraic Discrete Methods, vol. 5, 1984, p. 306-313.
12. J. R. GILBERT et R. E. TARJAN, *The Analysis of a Nested Dissection Algorithm*, Numerische Mathematik, vol. 50, 1987, p. 377-404.
13. H. T. KUNG, *The Structure of Parallel Algorithm*, Advances in Computers, vol. 19, Academic Press, New York, 1980.
14. F. T. LEIGHTON, *A Layout Strategy for VLSI which is Provably Good*, Proc. 14th Ann. A.C.M. Symp. Theory Comput., 1982, p. 85-98.
15. R. J. LIPTON et R. E. TARJAN, *A Separator Theorem for Planar Graphs*, S.I.A.M. J. on Appl. Math., vol. 36, 1979, p. 177-189.
16. R. J. LIPTON et R. E. TARJAN, *Applications of a Planar Separator Theorem*, S.I.A.M. J. Comput., vol. 9, 1980, p. 615-627.
17. R. J. LIPTON, D. J. ROSE et R. E. TARJAN, *Generalized Nested Dissection*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., vol. 16, 1979, p. 346-358.
18. M. RAYNAL, *Algorithmique du parallélisme: le problème de l'exclusion mutuelle*, Dunod Informatique, 1984.
19. M. RAYNAL, *Algorithmes distribués et protocoles*, Eyrolles, Paris, 1985.
20. J. ROMAN, *Dissection emboîtée et n<sup>o</sup>-théorème de séparation ( $1/2 < \sigma < 1$ )*, Rapport interne Analyse appliquée et Informatique, Université de Bordeaux-I, 1984.
21. J. ROMAN, *Calculs de complexité relatifs à une méthode de dissection emboîtée*, Numerische Mathematik, vol. 47, 1985, p. 175-190.
22. D. J. ROSE, *A Graph-Theoretic Study of the Numerical Solution of Sparse Positive Definite Systems of Linear Equations*, Graph Theory and Computing, p. 183-217, R.C. Read, Academic Press, New York, 1973.
23. D. J. ROSE, R. E. TARJAN et G. S. LUEKER, *Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs*, S.I.A.M. J. Comput., vol. 5, 1976, p. 266-283.
24. C. L. SEITZ, *The Cosmic Cube*, Commun. A.C.M., vol. 28, n<sup>o</sup> 1, 1985, p. 22-33.
25. G. VARENNE, *Dessins récursifs de graphes*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, Université de Paris-VII, Laboratoire Informatique Théorique et Programmation, 1985.