

SYMEON BOZAPALIDIS

**Sur une classe de transformations d'arbres**

*RAIRO. Informatique théorique et applications*, tome 22, n° 1 (1988),  
p. 43-47

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1988\\_\\_22\\_1\\_43\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1988__22_1_43_0)

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique et applications » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR UNE CLASSE DE TRANSFORMATIONS D'ARBRES (\*)

par Symeon BOZAPALIDIS <sup>(1)</sup>

Communiqué par J. E. PIN

---

Résumé. – On introduit une certaine classe de transformations d'arbres qui a de bonnes propriétés : elle est close par composition, elle préserve les principales familles de forêts (reconnaissables, algébriques) et en outre, dans cette classe, l'égalité est décidable.

Abstract. – We study a class of tree-transformation from  $T_\Sigma$  to  $T_\Gamma$  whose graph is a recognizable subset of the  $\Sigma \otimes \Gamma$ -algebra  $T_\Sigma \times T_\Gamma$ .

It is shown that these transformations preserve recognizable and algebraic forests and are closed under composition.

$T_\Sigma$  désigne l'ensemble des arbres sur l'alphabet gradué  $\Sigma$ .

### 1. TRANSFORMATIONS $\Sigma \otimes \Gamma$ -RECONNAISSABLES

Étant donné deux alphabets gradués disjoints  $\Sigma$  &  $\Gamma$ , on définit leur produit tensoriel  $\Sigma \otimes \Gamma$  par

$$(\Sigma \otimes \Gamma)_n = \bigcup_{0 \leq k \leq n} \Sigma_k \Gamma_{n-k} \quad (\text{concatenation}).$$

On peut munir  $T_\Sigma \times T_\Gamma$  d'une structure de  $\Sigma \otimes \Gamma$ -algèbre si l'on pose

$$\sigma\tau((s_1, t_1), \dots, (s_k, t_k), \dots, (s_n, t_n)) = (\sigma s_1 \dots s_k, \tau t_{k+1} \dots t_n)$$

où  $\sigma \in \Sigma_k$ ,  $\tau \in \Gamma_{n-k}$ ,  $s_i \in T_\Sigma$  &  $t_j \in T_\Gamma$ .

---

(\*) Reçu novembre 1986, révisé février 1987.

(<sup>1</sup>) Aristote University of Thessaloniki, Department of Mathematics. Thessaloniki, Grèce.

On va étudier les transformations de  $T_\Sigma$  vers  $T_\Gamma$  dont les graphes associés sont exactement les parties  $\Sigma \otimes \Gamma$ -reconnaissables de  $T_\Sigma \times T_\Gamma$ . Notons  $\mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$  cette classe. Soient

$$\varphi_\Sigma: T_{\Sigma \otimes \Gamma} \rightarrow T_\Sigma \quad \& \quad \varphi_\Gamma: T_{\Sigma \otimes \Gamma} \rightarrow T_\Gamma$$

les homomorphismes définis par

$$\varphi_\Sigma[\sigma\tau(\omega_1 \dots \omega_k \dots \omega_n)] = \sigma(\varphi_\Sigma \omega_1 \dots \varphi_\Sigma \omega_k)$$

$$\varphi_\Gamma[\sigma\tau(\omega_1 \dots \omega_k \dots \omega_n)] = \tau(\varphi_\Gamma \omega_{k+1} \dots \varphi_\Gamma \omega_n)$$

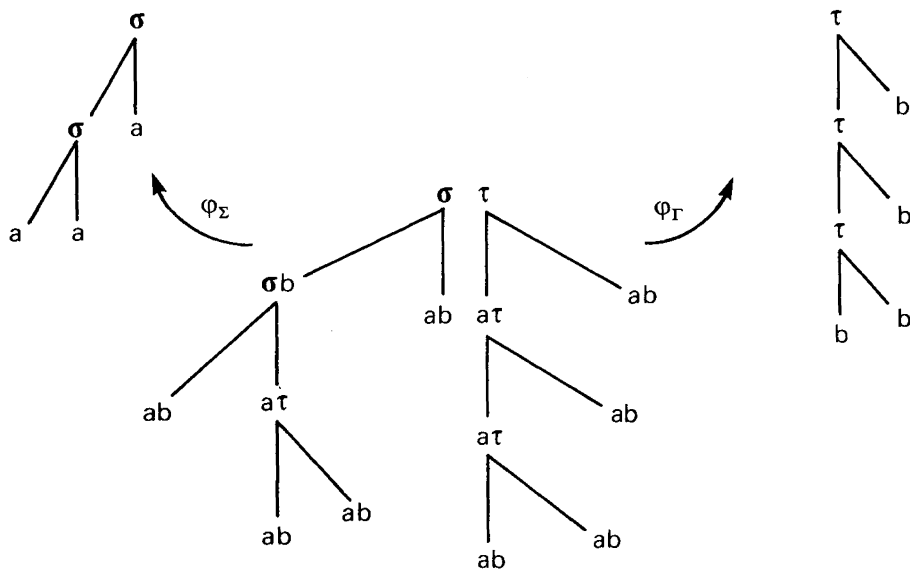
et  $h_{\Sigma, \Gamma}: T_{\Sigma \otimes \Gamma} \rightarrow T_\Sigma \times T_\Gamma$  l'application induite :

$$h_{\Sigma, \Gamma} \omega = (\varphi_\Sigma \omega, \varphi_\Gamma \omega).$$

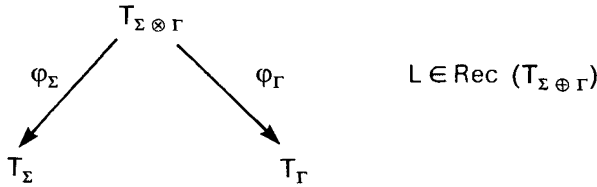
$h_{\Sigma, \Gamma}$  est l'unique  $\Sigma \otimes \Gamma$ -homomorphisme qui de plus est surjectif.

L'exemple suivant visualise les choses :

$$\left. \begin{array}{l} \Sigma_2 = \{ \sigma \}, \quad \Sigma_0 = \{ a \} \\ \Gamma_2 = \{ \tau \}, \quad \Gamma_0 = \{ b \} \end{array} \right\} \Sigma_n = \Gamma_n = \emptyset, \quad n \neq 0, 2$$



PROPOSITION : Les transformations  $\Sigma \otimes \Gamma$ -reconnaissables de  $T_\Sigma$  vers  $T_\Gamma$  coïncident avec les bimorphismes  $(\varphi_\Sigma, L, \varphi_\Gamma)$

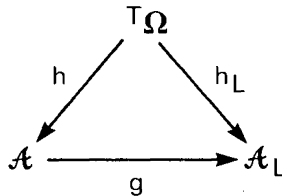


pour lesquels  $L = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(h_{\Sigma, \Gamma}(L))$ .

Preuve : Soit  $A \in \mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$ , alors  $L = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A)$  est une forêt reconnaissable de  $T_{\Sigma \otimes \Gamma}$  et comme  $h_{\Sigma, \Gamma}$  est surjectif,  $h_{\Sigma, \Gamma}(L) = A$ . La réciproque : si  $L \in \text{Rec}(T_{\Sigma \otimes \Gamma})$  est telle que  $L = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(h_{\Sigma, \Gamma}(L))$  en vertu du lemme qui suit,  $h_{\Sigma, \Gamma}(L)$  est  $\Sigma \otimes \Gamma$ -reconnaissable. ■

LEMME : Soit  $\Omega$  un alphabet gradué,  $\mathcal{A}$  une  $\Omega$ -algèbre telle que l'unique  $\Omega$ -homomorphisme  $h : T_\Omega \rightarrow \mathcal{A}$  est surjectif. Soit encore  $L$  une forêt reconnaissable de  $T_\Omega$  telle que  $L = h^{-1}(h(L))$ . Alors l'image  $h(L)$  est une partie reconnaissable de  $\mathcal{A}$ .

Preuve : On a un diagramme commutatif d'homomorphismes surjectifs



où  $\mathcal{A}_L$  est la  $\Omega$ -algèbre syntaxique de  $L$  et  $h_L$  l'homomorphisme canonique associé ([2], p. 87). Il est facile de prouver que

$$h(L) = g^{-1}(g(h(L))).$$

Cette relation et le fait que  $\mathcal{A}_L$  est finie nous donne la reconnaissabilité de  $h(L)$ . ■

Quelle que soit la forêt algébrique  $U \subseteq T_\Sigma$ , son image inverse  $\varphi_\Sigma^{-1}(U)$  est aussi algébrique ([1], théorème 4.1); comme la classe des forêts algébriques est fermée par homomorphisme linéaire et par intersection avec une forêt reconnaissable, la forêt

$$\varphi_\Gamma(\varphi_\Sigma^{-1}(U) \cap L)$$

est bien algébrique. Ainsi

PROPOSITION : *Les transformations  $\Sigma \otimes \Gamma$ -reconnaissables préservent la reconnaissabilité et l'algébricité. ■*

Il est aussi intéressant de noter que l'égalité dans  $\mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$  est décidable. Cela vient du fait que pour  $A_1, A_2 \in \mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$

$$A_1 = A_2 \quad \text{ssi} \quad h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_1) = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_2)$$

et la dernière relation est décidable puisqu'il s'agit de forêts reconnaissables. On va terminer ce paragraphe avec la remarque que  $\mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$  contient la classe importante des relations de la forme

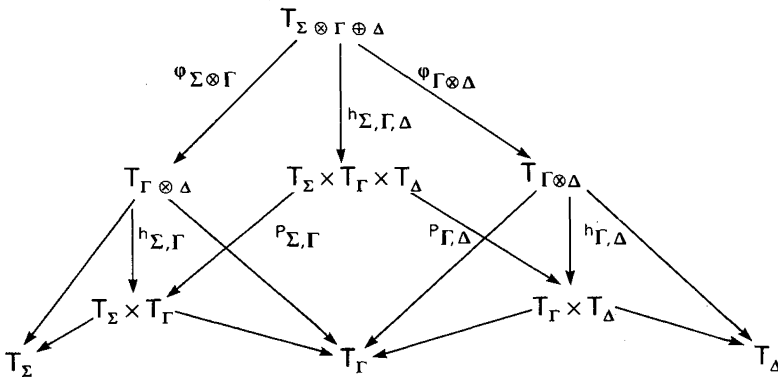
$$\bigcup_{i=1}^n B_i \times C_i, \quad B_i \in \text{Rec}(T_\Sigma) \quad \& \quad C_i \in \text{Rec}(T_\Gamma).$$

En effet, soit  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{C}$ ) un automate d'arbres reconnaissant  $B \subseteq T_\Sigma$  (resp.  $C \subseteq T_\Gamma$ ); alors le produit  $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$  admet une structure canonique de  $\Sigma \otimes \Gamma$ -algèbre et il reconnaît  $B \times C$ .

2. FERMETURE PAR COMPOSITION

THÉORÈME : *La classe des transformations considérées est fermée par composition.*

Preuve : On considère trois alphabets gradués  $\Sigma, \Gamma$  &  $\Delta$  et le diagramme suivant



où les flèches  $P$  désignent les projections d'un produit, et où les flèches verticales sont les seules flèches (homomorphismes) qui font commuter ce diagramme.

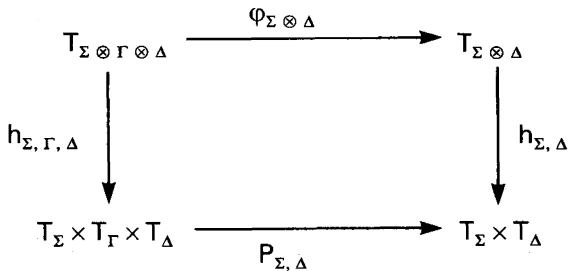
Prenons  $A_1 \in \mathcal{R}(\Sigma, \Gamma)$  &  $A_2 \in \mathcal{R}(\Gamma, \Delta)$  et posons

$$L_1 = h_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_1), \quad L_2 = h_{\Gamma, \Delta}^{-1}(A_2) \quad \& \quad A = P_{\Sigma, \Gamma}^{-1}(A_1) \cap P_{\Gamma, \Delta}^{-1}(A_2)$$

alors

$$h_{\Sigma, \Gamma, \Delta}^{-1}(A) = \varphi_{\Sigma \otimes \Gamma}^{-1}(L_1) \cap \varphi_{\Gamma \otimes \Delta}^{-1}(L_2).$$

Comme l'image de  $A$  par la projection  $P_{\Sigma, \Delta} : T_{\Sigma} \times T_{\Gamma} \times T_{\Delta} \rightarrow T_{\Sigma} \times T_{\Delta}$  est justement la composition  $A_1 \circ A_2$ , du diagramme commutatif ci-après



on tire que

$$h_{\Sigma, \Delta}^{-1}(A_1 \circ A_2) = \varphi_{\Sigma \otimes \Delta}(h_{\Sigma, \Gamma, \Delta}^{-1}(A)).$$

En appliquant le lemme au  $\Sigma \otimes \Delta$ -homomorphisme  $h_{\Sigma, \Delta}$  et à la forêt  $L = \varphi_{\Sigma \otimes \Delta}(h_{\Sigma, \Gamma, \Delta}^{-1}(A))$  qui est reconnaissable (car  $\varphi_{\Sigma \otimes \Delta}$  est linéaire et  $h_{\Sigma, \Gamma, \Delta}^{-1}(A)$  reconnaissable) on déduit que  $A_1 \circ A_2 \in \mathcal{R}(\Sigma, \Delta)$ . ■

### BIBLIOGRAPHIE

1. A. ARNOLD et M. DAUCHET, *Forêts algébriques et homomorphismes inverses*, Information and Control, vol. 37, n° 2, p. 182-196.
2. F. GECSEG et M. STEINBY, *Tree Automata*, Akademiai Kiado, Budapest, 1984.