RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

MARC CHEMILLIER

Monoïde libre et musique, première partie : les musiciens ont-ils besoin des mathématiques ?

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 21, nº 3 (1987), p. 341-371

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1987__21_3_341_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 21, n° 3, 1987, p. 341 à 371)

MONOÏDE LIBRE ET MUSIQUE PREMIÈRE PARTIE : LES MUSICIENS ONT-ILS BESOIN DES MATHÉMATIQUES ? (*)

par Marc Chemillier ([1])

Communiqué par J.-E. Pin

Résumé. – *Ceci est la première partie d'un article consacré aux possibilités d'application à la combinatoire musicale, de méthodes issues de l'informatique théorique ou des mathématiques, faisant intervenir des automates, des arbres, des structures algébriques, etc. Cette première partie tente de regrouper et de décrire succintement diverses recherches qui ont été menées dans cette direction (travaux de Forte, Lerdahl et Jackendoff, Greussay, Barbaud, Balzano, Riotte et le Projet n° 5 de la Recherche Musicale à l'I.R.C.A.M.). Dans le dernier paragraphe, on décrit le point de départ d'une nouvelle proposition théorique, qui sera exposée dans la deuxième partie de cet article (à paraître).*

Abstract. – *This is the first part of an article which deals with the possible use of mathematical or informatical methods in musical combinatorics, using automata, trees, algebraic structures, ... The first part, presented here tries to sum up different researchs in this direction that have already been made (works by Forte, Lerdahl and Jackendoff, Greussay, Barbaud, Balzano, Riotte and the Project No. 5 of Musical Research at I.R.C.A.M.). In the last paragraph, we present the first step of a new theoretical proposition that will be developped in the second part of the article (to appear).*

(*) Reçu en octobre 1986, révisé en janvier 1987.
([1]) L.I.T.P., Université Paris-VII, 4, place Jussieu, 75005 Paris.

INTRODUCTION

« Il n'y a pas de théorème particulièrement intéressant dans la théorie des ensembles ou la théorie des graphes, qui ait un rapport avec les problèmes musicaux », peut-on lire à la page 53 de l'un des ouvrages récents les plus importants dans le domaine de l'étude formalisée de la musique : *A generative theory of tonal music* [Lerdahl 1983]. Pourtant, un phénomène culturel caractéristique de notre époque semble bien être ce qu'on pourrait appeler la « tentation mathématique », chez les compositeurs et les théoriciens de la musique. Mais il convient de préciser ce qu'on entend par « mathématiques » : parmi les propositions théoriques qu'on a essayé de regrouper dans les pages qui suivent, toutes ont en commun une *approche scientifique rigoureuse* du fait musical, mais il se peut que l'analogie s'arrête là. En particulier, toutes ne font pas nécessairement appel à un véritable appareil mathématique : si, par exemple, Balzano (*cf.* § 5) utilise un théorème de la théorie des groupes pour décrire la gamme diatonique, en revanche, Lerdahl (*cf.* § 2) s'interdit tout vocabulaire mathématique superflu dans l'énoncé de ses règles de grammaire : « Nous avons choisi d'établir nos règles en anglais ordinaire » ([Lerdahl 1983], p. 53). Indépendamment des mathématiques, le caractère scientifique des démarches envisagées peut venir d'un rapprochement avec des disciplines comme l'informatique, la linguistique, ou la psychologie. Quant à la question placée en titre de cette première partie, il est bien certain qu'on ne prétend pas y répondre complètement. On souhaite seulement montrer ici, par les exemples présentés, qu'il est possible d'approcher le fait musical d'une manière scientifique et rigoureuse, et que, si cette attitude a ses limites, elle permet aussi parfois de déceler certaines propriétés du langage musical inaccessibles avec les moyens de la théorie musicale traditionnelle. De plus, on signalera, pour chaque compte rendu, l'apport que pourrait représenter le formalisme qui a été développé dans la suite de ce travail (à paraître) ([2]).

1. La musique atonale théorisée par Allen Forte. Les péripéties du théorème de l'hexacorde généralisé

Historiquement, la musique sérielle a été le point de départ d'une approche formalisée de la musique. Quelques articles récents dans les revues *Perspectives*

([2]) Note : Parmi les théories présentées ici, certaines s'intéressent à la musique comme *organisation d'objets sonores dans le temps*, c'est-à-dire d'une certaine façon, à des séquences de symboles; leur cadre abstrait est un *monoïde libre* A^*. Pour d'autres, l'étude se porte sur des objets musicaux *indépendamment* de toute organisation dans le temps (construction de gammes par exemple); il s'agit alors d'étudier des structures possibles sur l'*alphabet* A *lui-même*.

of new-music ou *In theory only* ([Cherbin 1986], [Hoover 1984], etc.) témoignent d'une recherche actuelle sur les possibilités de la composition avec douze sons. L'un des ouvrages majeurs dans ce domaine est celui d'Allen Forte *The structure of atonal music* ([Forte 1973]).

L'exposé de Forte commence par identifier la gamme chromatique à l'ensemble des entiers modulo 12 : $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} = \{0, 1, 2, \ldots, 11\}$ avec la correspondance $0 =$ do, $1 =$ do ♯, $2 =$ ré, etc. Des agrégats sonores ou des motifs musicaux sont des parties de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Sur $\mathscr{P}(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$, on définit une relation d'équivalence : X est équivalent à Y si X et Y ne diffèrent que par une *transposition* ($Y = \{x + t \mid x \in X\}$), ou par *inversion* ($Y = \{12 - x \mid x \in X\}$). Les éléments de l'ensemble quotient de $\mathscr{P}(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})$ par cette relation déquivalence sont appelés des *familles de notes* (pitch-class set, en anglais).

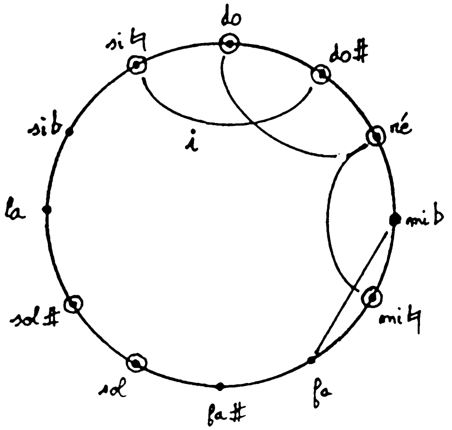
Exemple : [0, 2, 3, 6] est le sous-ensemble contenant do, ré, mi *b*, et fa ♯. Le sous-ensemble [2, 4, 5, 8], c'est-à-dire ré, mi, fa, la *b*, représente la même famille de notes que le précédent, car il s'en déduit par transposition en ajoutant 2 à chaque élément.

On peut définir aussi le *complément* d'une famille de notes : si X est un sous-ensemble de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ représentant cette famille de notes, le complément sera la famille de notes associée au complémentaire de X dans $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$. Cette définition est bien consistante, car si deux sous-ensembles de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ sont équivalents par transposition ou inversion, leurs complémentaires le sont aussi.

On définit ensuite l'*intervalle* entre deux éléments x, y de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, par $|x-y|$, où les deux barres verticales désignent celui des nombres $x-y$ et $y-x$ qui se trouve compris entre 0 et 6. Pour un sous-ensemble X de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, on définit le *contenu intervallique* de X est une suite de six nombres entre crochets $[n_1\ n_2\ n_3\ n_4\ n_5\ n_6]$ indiquant dans l'ordre les nombres d'occurence des six intervalles 1, 2, 2, 4, 5, 6 dans X. On peut voir assez facilement que si deux sous-ensembles de $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ sont équivalents par transposition ou inversion, leurs vecteurs intervalliques sont identiques, et qu'il est donc légitime de parler du *vecteur intervallique d'une famille de notes*.

Pour obtenir le vecteur intervallique du complément $\bar{S}$ d'une famille de notes, à partir de celui de la famille S, on ajoute à chaque composante la différence card $\bar{S}$ − card S. Cette propriété est connue sous le nom de *théorème de l'hexacorde généralisé* ([Forte 1973, p. 77). Dans l'exemple ci-dessous, $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ est représenté par un cadran d'horloge. Il y a trois occurences de $i = 2$ dans S, et une seule dans $\bar{S}$.

Exemple :



$S=[0,1,2,4,7,8,11]$

$\bar{S}=[3,5,6,9,10]$

différence entre
les nombres
d'éléments:
7-5=2

vecteur
intervallique:

[4 3 4 4 4 2]

[2 1 2 2 2 1]

différence entre
les nombres
d'occurences
d'une seconde
majeure: 3-1=2

Figure 1

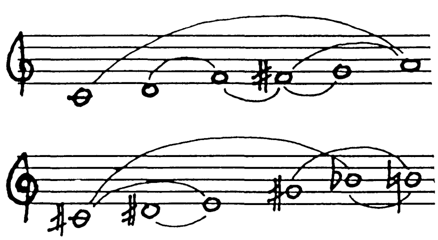
Dans le cas particulier où S a six éléments, son complément en a six aussi, et on a le théorème dit *de Milton Babbitt :*

THÉORÈME : *Une famille de six notes et son complément définissent exactement les mêmes intervalles.*

Exemple :

S
[0,2,5,6,7,9]

$\bar{S}$
[1,3,4,8,10,11]



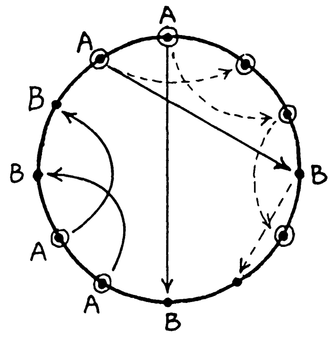
trois 3ces mineures
deux 2ndes mineures

trois 3ces mineures
deux 2ndes mineures

Figure 2

Essayons de montrer la raison de cette propriété par une construction simple. (On en donnera plus loin un contenu mathématique précis). On oriente sur le cadran d'horloge les segments marquant les intervalles, par une flèche dans le sens des aiguilles d'une montre, certains points de S et $\bar{S}$ se trouvant ainsi associés à l'extrémité d'arrivée d'une flèche (do ♯, ré et mi pour S, fa seulement pour $\bar{S}$, dans l'exemple ci-dessus). On appelle A l'ensemble des points de S restants (signalés par la lettre A dans le dessin ci-dessous). De même, B l'ensemble des points de $\bar{S}$ restants. Remarquons que la différence entre card S et le nombre d'occurences de l'intervalle considéré dans S est égal au nombre d'éléments de A, et de même pour $\bar{S}$ et B. De telle sorte que la propriété étudiée ne fait qu'exprimer l'égalité card $A=$ card B. Pour la vérifier, on établit une correspondance un à un, entre éléments de A et éléments de B. A partir de chaque élément a de A, on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre par sauts de i graduations (i est l'intervalle considéré), et on associe à a le premier élément de B que l'on rencontre. On constate alors que cette opération, répétée pour tout élément a de A, épuise tous les éléments de B.

Sur le dessin ci-dessous, les flèches pointillées arrondies représentent les occurences de i dans S, les flèches pointillées rectilignes les occurences de i dans $\bar{S}$, et les flèches en gras la correspondance établie ci-dessus :



card A=4=card B

Figure 3

Forte ne donne pas de justification de ce théorème. En 1974, Éric Regener en propose une démonstration dans un article de *Perspective of new-music, On Allen Forte's theory of chords* [Regener 1974] : « Le théorème de l'hexacorde de Babbitt est central dans la théorie de Forte. Une démonstration de ce théorème n'est pas très difficile à exprimer dans des termes simples (comme on va le voir), et il est désolant que Forte ne fasse pas le moindre effort dans ce sens ». En 1977, dans la revue *Journal of music theory*, David Lewin publie *Forte's interval vector, my interval function and Regener's commun-note function* [Lewin 1977]. Il y propose de nouvelles approches du formalisme. En 1983, dans *Perspectives of new-music*, Howard J. Wilcox revient au théorème avec l'article *Group table and the generalized hexachord theorem* [Wilcox 1983]. Il donne une nouvelle démonstration avec l'argument astucieux suivant : dans la table d'addition d'un groupe, chaque élément figure une seule fois par ligne et par colonne, et cette propriété reste vraie même si l'on change l'ordre des éléments.

La démonstration de Regener s'appuie sur une formule simple de cardinaux :

$$\operatorname{card}(\bar{X} \cap \bar{Y}) = \operatorname{card} E - \operatorname{card} X - \operatorname{card} Y + \operatorname{card}(X \cap Y)$$

où X, $Y \in E$ fini et $\bar{X}$, $\bar{Y}$ les complémentaires. Il fait aussi remarquer que si i est un intervalle (un entier entre 1 et 6), le nombre d'occurences de i dans X est égal au nombre d'éléments communs à X et $t(X)$ (*cf.* [Forte 1973], p. 30). On peut alors conclure, avec $Y = t(X)$.

Nous proposons la formulation plus générale suivante :

Proposition : *Soit E un ensemble quelconque, fini ou infini, et σ une permutation d'*ordre fini *sur E. Alors pour toute partie X de E, dont le complémentaire est $\bar{X}$:*

$$X \cap \sigma(\bar{X}) \text{ est en bijection avec } \bar{X} \cap \sigma(X)$$

Démonstration : Rappelons qu'une permutation est d'ordre fini s'il existe un entier n tel que $\sigma^n = \mathrm{Id}$, application identique. Le sous-groupe du groupe des permutations de E engendré par σ est alors : $S = \{\sigma^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ et il ne contient qu'un nombre fini d'éléments distincts.

Comme dans la construction précédente sur le cadran de l'horloge, posons $A = X \cap \sigma(\bar{X})$ et $B = \bar{X} \cap \sigma(X)$. Trois points sont à démontrer :

1. l'orbite de tout élément a de A sous l'action de S rencontre B :

Soit $\Omega(a) = \{\sigma^n(a) \mid n \in \mathbf{N}\}$ l'orbite de a.

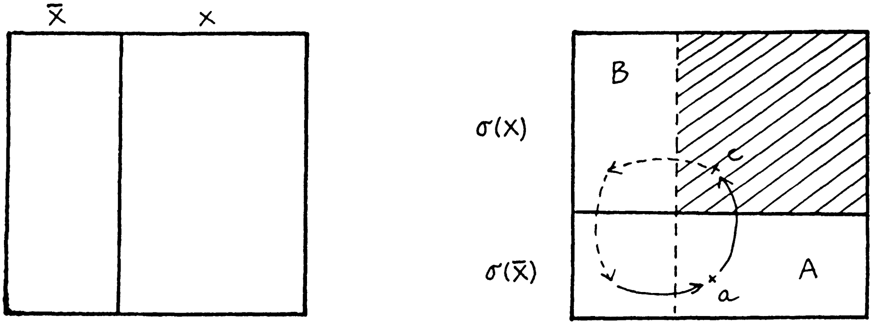


Figure 4

Soit $c = \sigma(a) \in \sigma(X)$. Si $c \in B$, on a bien $\Omega(a) \cap B \neq \varnothing$. Si par contre $c \notin B$, c'est-à-dire $c \in \sigma(X) \cap X$ (partie hachurée dans la figure ci-contre), on ne peut avoir, pour tout entier p, $\sigma^p(c) \in \sigma(X) \cap X$, car $c \in \Omega(a)$ donc $a \in \Omega(c)$. Donc il existe un entier p tel que $\sigma^p(c) \in \sigma(X) \cap \bar{X} = B$, donc $\Omega(a) \cap B \neq \varnothing$.

On pose alors pour tout a de A : $n = \inf\{k \in \mathbf{N} \mid \sigma^k(a) \in B\}$ et on définit ainsi une application, notée μ, de A dans B :

$$\mu(a) = \sigma^n(a)$$

2. μ est surjective :

Soit $b \in B$. On a $\sigma^{-1}(b) \notin B$, car $\sigma^{-1}(b) \in X$ et l'on pose $d=\sigma^{-1}(b)$. Pour des raisons de symétrie entre A et B, on a : $\Omega(b) \cap A \neq \emptyset$, donc $\Omega(d) \cap A \neq \emptyset$. Soit alors p le plus petit entier tel que $\sigma^{-p}(d) \in A$. On voit alors que pour $a=\sigma^{-p}(d)$, $b=\mu(a)$, donc μ est surjective.

3. μ est injective :

Supposons $\mu(a)=\mu(a')$. Alors il existe p et q, plus petits entiers tels que : $\sigma^{p}(a)=\mu(a)=b \in B$ et $\sigma^{q}(a')=\mu(a')=b \in B$. Supposons par exemple $p \geqq q$. Alors $\sigma^{p-q}(a)=a'$. Mais $\sigma(a) \in \sigma(X)$, donc $\sigma(a) \notin A$, et par ailleurs, $p-q<p$, donc $\sigma^{p-q}(a) \notin B$, donc $\sigma^{p-q}(a) \in \sigma(X) \cap X$, ce qui est contradictoire avec $\sigma^{p-q}(a)=a' \in A$. La contradiction ne peut être levée qu'avec $p=q$, donc $a=a'$, et μ est injective.

On a ainsi construit une bijection μ entre A et B, ce qui démontre la proposition. ■

On peut vérifier par un contre-exemple la nécessité de l'hypothèse (σ permutation d'ordre fini) :

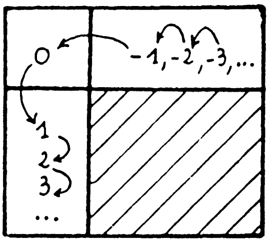


Figure 5

$E=\mathbf{Z}$, ensemble des entiers relatifs, σ l'application qui à x associe $x+1$, et $X=\mathbf{N}$ ensemble des nombres naturels 0, 1, 2, 3, ... Alors $B=\{0\}$ contient un élément, mais A est vide (partie hachurée).

La question reste bien entendue ouverte de savoir s'il est utile pour un compositeur de manipuler des ensembles infinis. Nous espérons avoir montré ici qu'une étude mathématique permet d'élucider quelques points confus. Donnons enfin un exemple musical [Forte 1973] :

Exemple : Le Sacre du Printemps, de Stravinsky (cf. *fig.* 6)

L'ensemble des notes qui apparaissent dans le premier accord est : $X=\{$fa, fa♯, la *b*, la, do$\}$, que l'on écrit [5, 6, 8, 9, 0]. On remarque que cet accord est répété à la troisième mesure, avec deux notes de plus dans l'aigu : mi et mi *b*, de telle sorte que le contenu de cette troisième mesure est : $Y=\{$mi *b*, mi, fa, fa♯, la *b*, la, do$\}$, que l'on écrit [3, 4, 5, 6, 8, 9, 0]. On peut alors dire que X est inclus dans Y. Si l'on cherche le complémentaire $\bar{X}$ de X dans

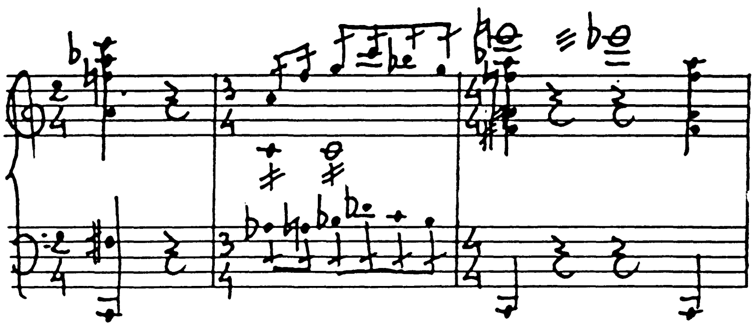


Figure 6

Z/12Z, on obtient : [1, 2, 3, 4, 7, 10, 11]. En remplaçant chaque élément par son inverse et en réordonnant, on obtient : [1, 2, 5, 8, 9, 10, 11], puis en ajoutant 7 modulo 12 à chaque élément et en réordonnant à nouveau, on trouve : [3, 4, 5, 6, 8, 9, 0], c'est-à-dire exactement Y. Donc X définit exactement la même famille de notes que Y. On arrive à cet étrange paradoxe qu'une *famille de notes peut être contenue dans son complément*...

Dans cet exemple, on a implicitement admis qu'il était légitime de regrouper, dans un sous-ensemble X, les notes du premier accord, puis dans un sous-ensemble Y, les notes de la troisième mesure. Cette *segmentation* est évoquée par [Forte 1973] à la page 83 : « Alors que cette procédure est rarement problématique dans la musique tonale, grâce à la présence d'éléments morphologiques familiers (harmonies, contrepoint, ...), elle pose souvent des difficultés dans les œuvres atonales ». Nous allons maintenant présenter la théorie de Lerdahl et Jackendoff, qui s'intéresse aux problèmes de segmentation.

2. La théorie générative de la musique tonale : Fred Lerdahl et Ray Jackendoff

Le problème du découpage d'une séquence musicale en unités ne peut manquer de rappeler les *représentations parenthétiques* de la linguistique de Chomsky [Chomsky 1968]. En 1979, dans *Computer music journal,* Curtis Roads faisait un bilan des approches linguistiques de la théorie musicale, sous le titre : *Grammars as representations for music* (travaux de Ruwet, Nattiez, Laske, Smoliar, Moorer, Winograd, Lerdahl-Jackendoff, et Roads lui-même). La théorie de Lerdahl et Jackendoff paraît en 1983, sous le titre : *A generative theorie of tonal music.*

Le principe de la théorie de Lerdahl et Jackendoff est d'associer à toute séquence musicale du langage tonal, quatre types de constructions formelles (essentiellement des arbres) interagissant entre elles. Les quatre constructions se font dans l'ordre suivant : *organisation des groupements* (« phrases musicales »), *organisation métrique* (« temps forts et temps faibles »), *réduction par porté temporelle* (« (notes de passage », « broderies », au voisinage des « notes réelles »), *réduction par prolongation* (positions stables : « états fondamentaux » - positions instables : « renversements », « modulation aux tons éloignés »). Il arrive que les deux organisations rythmiques (groupement et métrique) parviennent à des résultats différents dans la segmentation de la séquence musicale : on dit alors qu'elles sont *déphasées;* quand ce sont les deux réductions (par portée temporelle et par prolongation) qui divergent, on dit qu'elles sont *non-congruentes.* Pour parvenir à ces quatre constructions, les auteurs proposent principalement deux types de règles : des *règles obligatoires*, qui déterminent l'allure générale de l'arbre (éviter certains croisements de branches), et des *règles de préférence*, qui concernent plus directement la séquence musicale elle-même. Les principes généraux gouvernant ces règles de préférence sont d'origines diverses. Pour l'organisation des groupements, elles rappellent certaines études de Ruwet. Par exemple, la règle numérotée GPR6 dans [Lerdahl 1983] : « Lorsque deux segments ou plus, peuvent être considérés comme parallèles, ils occupent de préférence des positions identiques dans les groupements », est proche parente de cette règle de Ruwet : « On considère comme des unités de niveau I les séquences qui sont répétées intégralement, soit immédiatement après leur première émission, soit après l'intervention d'autres segments » (énoncée dans [Nattiez 1975], p. 246). Dans l'application des règles de préférence, deux cas peuvent se produire : ou bien elles se renforcent pour parvenir à la même construction, ou elles ne sont pas compatibles et on a conflit, donc ambiguïté (à rattacher aux cas déjà vus de déphasage, ou de non-congruence). Ce n'est pas l'un des moindres mérites de Lerdahl et Jackendoff, que d'avoir pu ainsi révéler certains rapports dialectiques sous-jacents à une séquence musicale.

A propos du thème de la *Sonate pour piano en la majeur K*331, de Mozart, les auteurs écrivent : « Un exemple d'un passage particulièrement non-congruent est le thème de la sonate K 331 » [Lerdahl 1983, p. 123), et ils ajoutent : « Les passages congruents semblent relativement directs et carrés; les passages non-congruents ont une qualité plus complexe, plus élastique ». Il y a, en particulier, une différence considérable entre l'importance accordée à l'accord de tonique I (quatrième mesure, premier temps), dans la réduction par portée temporelle, et dans la réduction par prolongation. Graphiquement : dans le premier cas, cet accord se rattache au même nœud de l'arbre que l'accord de dominante V qui le suit; dans le second cas, il se rattache au même nœud de l'arbre que le premier accord de la première mesure (cf. *fig.* 7 et 8) !

Rappelons les conventions :

arbre par portée temporelle :

portée temporelle (un compromis entre l'organisation des groupements et l'organisation métrique)

e1 e2 $e\,1$ est plus important que $e\,2$

arbre par prolongation :

e1 e2 $e\,1$ est plus stable que $e\,2$ (tension)

e1 e2 $e\,1$ est plus instable que $e\,2$ (détente)

Des gradations sont possibles, indiquées aux nœuds :

, presque une prolongation stable (ni tension, ni détente);

, stabilisation ou déstabilisation plus marquée;

, variation nette dans le sens d'une tension ou d'une détente.

Exemple : Sonate pour piano en la majeur $K\,331$, de Mozart

Réduction par portée temporelle ([Lerdahl 1983], p. 227) :

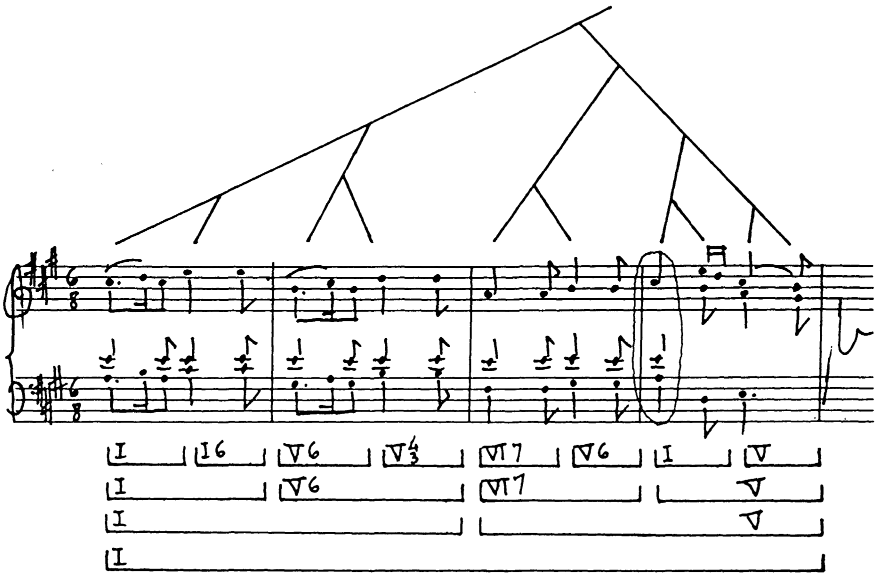


Figure 7

Réduction par prolongation (*idem*, p. 231) :

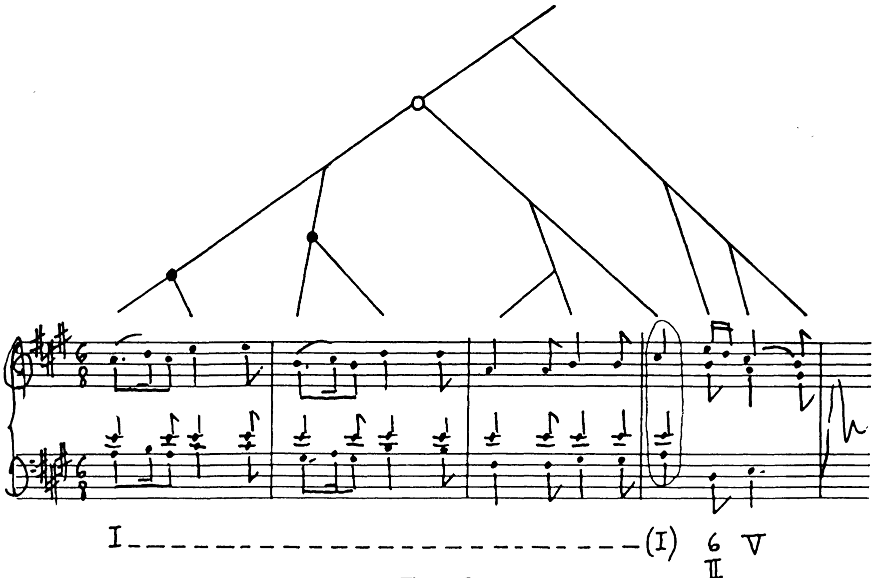


Figure 8

Les auteurs ont précisé eux-mêmes les limites de leur théorie. En particulier, ils négligent consciemment l'aspect contrapunctique : « Nous sommes conduits à une représentation excessivement verticale de l'expérience musicale » ([Lerdahl 1983], p. 116). Dans un rapport de recherche récent de l'I.R.C.A.M. [Lerdahl 1986], Lerdahl et Potard font une proposition formelle : « La bonne solution est de représenter les relations contrapunctiques par un arbre unique qui devient multiple aux niveaux appropriés » (p. 24). Cette proposition n'a pas encore fait l'objet de développements théoriques. Le formalisme que nous proposerons dans la seconde partie de cet article pourrait apporter des solutions inédites au problème, puisqu'on y définit une loi de composition correspondant à la superposition de séquences musicales. Un autre point de vue est celui de Patrick Greussay, qui sera décrit dans le paragraphe suivant.

3. Le point de vue de l'intelligence artificielle : M. Minsky, P. Greussay

« Le problème reste ouvert de savoir s'il faut rechercher dans une œuvre, la confirmation de l'utilisation de catégories générales, ou au contraire en caractériser le plus précisément possible les éléments individuels » ([Greussay 1973], p. 35). Patrick Greussay penche pour la seconde hypothèse. Essayons de présenter son point de vue d'une manière imagée. Faire l'analyse d'une pièce musicale, c'est mettre certains symboles de la partition en relation les uns avec les autres. Pour une partition écrite avec n symboles, il y a $2^{n \times n}$ relations possibles. Ainsi, pour la *Sarabande* de la 1re *Suite française* de J. S. Bach, $n = 534$ (signes d'expression non compris). Il y a donc plusieurs milliards de milliards d'analyses possibles de cette pièce, toutes tendances analytiques confondues ! Par rapport à un idiome musical donné, certaines de ces relations sont absurdes ou inutiles, d'autres au contraire sont pertinentes. On peut alors mesurer la qualité d'une pièce de musique par le nombre de relations pertinentes qu'elle autorise, par rapport à un idiome musical donné.

Pour déterminer ces relations, Patrick Greussay a recours à des modèles inspirés de l'informatique. La superposition dans le temps de séquences musicales peut être décrite comme le déroulement de deux processus en parallèle. Dans [Greussay 1973], p. 112, il illustre cette idée avec un organum à deux voix de l'École de Compostelle (environ 1 125) : « On a ici un cas où les différentes voix ont des parties distinctes, mais où le contrôle d'une des deux voix est influencé par l'autre ». Cependant, ces caractères généraux de l'écritures polyphonique intéressent moins Greussay que l'étude de caractères spécifiques d'*une œuvre particulière*. Dans son analyse d'une pièce de Beethoven ([Greussay 1985]), il imagine des *agents mentaux* qui réagissent à la séquence musicale (essentiellement aux intervalles), et dialoguent entre eux pour construire une configuration d'intervalles caractéristique de la pièce.

La 20e *Variation Diabelli*, de Beethoven, commence par une quarte descendante, suivie d'une seconde majeure ascendante. Les agents de Greussay sont

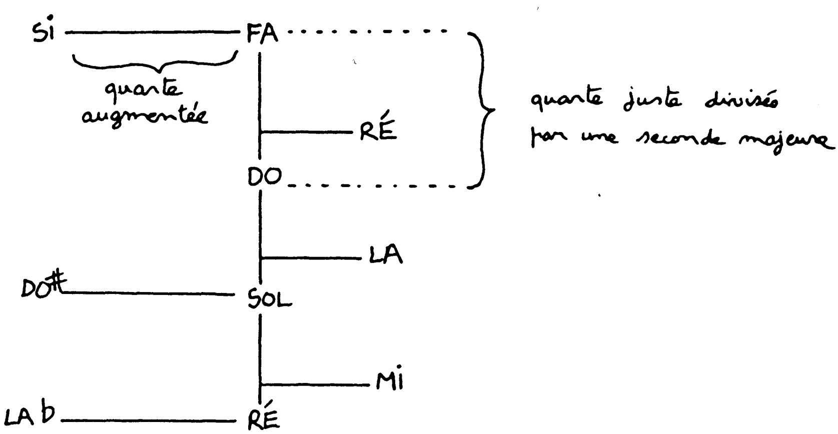


Figure 9

par exemple : NOTEUR qui reçoit les notes et les envoie à INTERVALLEUR, qui les constitue en intervalles qu'il communique à CONFIGURATEUR, qui s'efforce de découvrir des régularités de configuration, etc. Ainsi pour Greussay, les cinq premières mesures visent à établir une configuration abstraite d'intervalles (un graphe), que les trois mesures suivantes ne feront que renforcer.

Remarquons que l'intérêt de l'analyse baisse sensiblement de la mesure 5 à la mesure 8, puisque tous les points du graphe sont déjà placés. Pourquoi alors ne pas indiquer que cette 20^e *Variation Diabelli* est un *canon*? Dans cette étude sur les intervalles, un agent DÉTECTEUR-DE-CANON aurait paru légitime. Il aurait expliqué le relatif piétinement des mesures 5 à 8 : la voix canonique rattrape la voix principale pour s'associer à elle dans le motif conjoint qui débute mesure 9. Bien sûr, l'écriture canonique est traitée très librement. Chez J. S. Bach, on est fasciné par la rigueur avec laquelle les canons sont menés de la première à la dernière note. Ici, le fait caractéristique est que le « compositeur reprend à son compte en le modifiant considérablement un outil traditionnel de composition (ici la notion d'intervalle) » ([Greussay 1973], p. 30). Pourtant, ce qui justifie l'existence de cette 20^e variation, en dernière analyse, c'est bien l'écriture canonique.

Exemple : 20^e *Variation Diabelli*, de Beethoven (*fig.* 10).

Cette distinction entre catégories générales (variation canonique) et pièce particulière (20^e *Variation Diabelli*) se rattache au problème de la légitimité des approches mathématiques en musique. Marvin Minsky écrit [Minsky 1985] : « A l'aide de la description informatique, on peut en dire davantage, mais on prouve moins. Pourtant la perte est moins considérable que beaucoup ne le croient; pour commencer, les Mathématiques elles-mêmes n'ont jamais *pu prouver* grand-chose dans ces domaines complexes. Les théorèmes nous disent habituellement des vérités complexes sur des choses simples ». Il est certain que les objets mathématiques (ensembles, fonctions, vecteurs, ...) n'ont été créés que pour désigner des catégories générales. Les démonstrations mathématiques ne font qu'établir un certain degré de *généralité* d'une proposition. Si l'on s'intéresse à une œuvre particulière, cette approche est inadéquate. Pourtant, entre la catégorie très générale qu'est la musique tonale, étudiée par Lerdahl, et la catégorie très particulière qu'est l'œuvre, étudiée par Greussay, il doit être possible de se livrer à une analyse assez fine de détail, tout en conservant un certain degré de généralité. Rappelons la pyramide

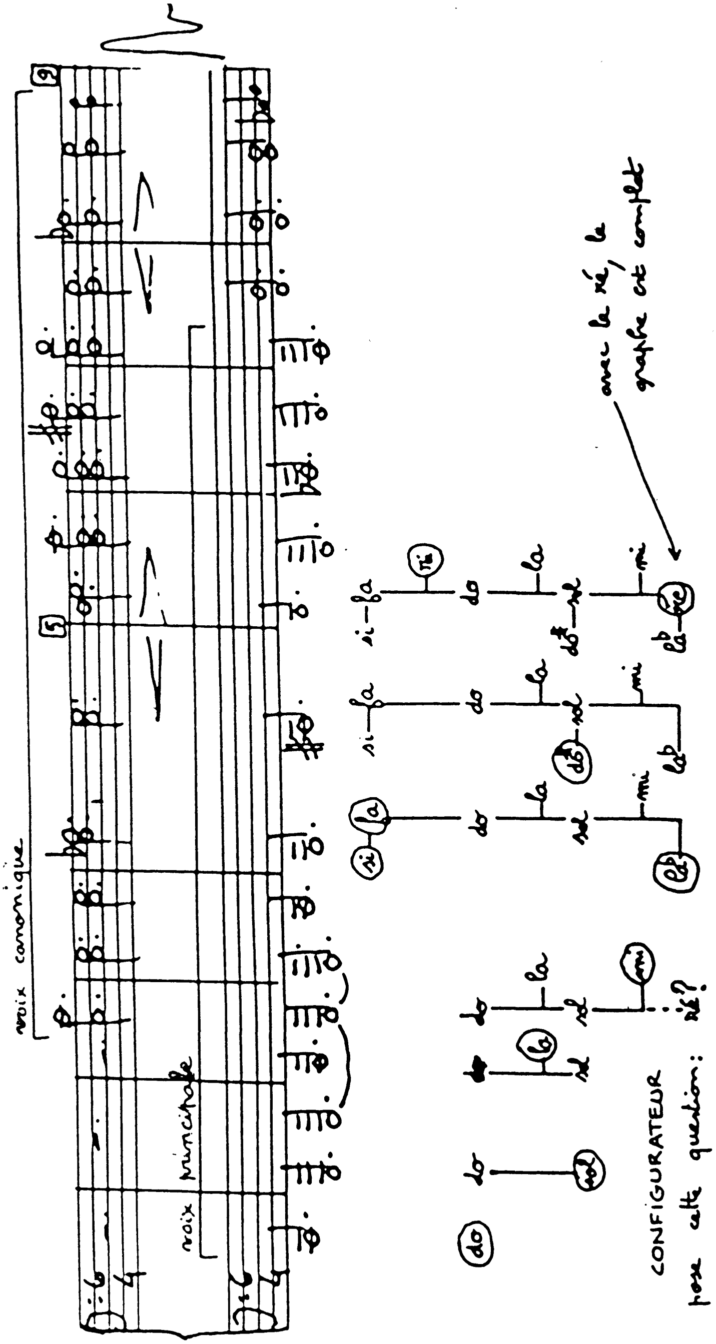

voix canonique
voix principale
avec le ré, le graphe est complet
CONFIGURATEUR
pose cette question : ré ?

Figure 10

décrite par Nattiez ([Nattiez 1975], p. 83) :

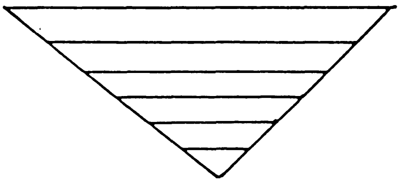


Figure 11

Les traités d'harmonie ont traditionnellement pour objet l'étude des principes élémentaires qui gouvernent le système tonal. C'est à cette étude que les travaux de Pierre Barbaud tentent d'apporter la rigueur d'une méthode algorithmique.

4. Musicus mecanicus : les travaux de Pierre Barbaud

Dans *Ludus margaritis vitreis* ([Barbaud 1976], p. 3), Pierre Barbaud écrit : « Je soupçonne en effet que le confort qu'on ressent à l'audition d'un discours de type tonal est d'ordre logico-arithmétique ». Il y a certainement *une part* de cohérence logique dans le discours tonal. On verra dans le paragraphe suivant une étude de Balzano qui fonde la cohérence de la gamme diatonique sur trois propriétés des groupes cycliques. Mais que dire des rapports dialectiques et des ambiguïtés décelés par Lerdahl (*cf.* § 2), sans parler des proliférations d'analyses pertinentes que laisse entrevoir Greussay ? Il semble bien qu'en musique, les propriétés intéressantes soient les *propriétés indécidables.* Pourtant, même s'il existe un domaine de la musique inaccessible à l'analyse rationnelle, rien n'empêche de s'intéresser à la partie algorithmique de l'élaboration musicale. Beaucoup de tentatives de contrôler par ordinateur l'organisation d'événements sonores ont déjà été faites, la première étant la suite *Illiac* de Lejaren Hiller, en 1956 (*cf.* aussi [Hiller 1978]). Dans [Greussay 1973], p. 121 et 63, on trouve la description d'une méthode automatique d'harmonisation empruntée à Kemeny. Plus récemment, un article de *Computer music journal* [Newcomb 1985] décrit le programme LASSO, qui peut corriger des exercices de contrepoint.

Dès les années 60 ([Barbaud 1965] et [Barbaud 1968]), Pierre Barbaud avait essayé de dégager les bases théoriques de cette approche. Il s'intéresse en particulier aux séquences d'accords que l'on juge traditionnellement correctes dans l'harmonie classique. Dans une tonalité donnée, désignons par des chiffres romains les six accords parfaits que l'on peut construire sur chacun des degrés de la gamme, excepté la sensible (en DO majeur : I = { do, mi, sol }, II = { ré, fa, la }, etc.). Une séquence harmonique est alors un mot sur l'alphabet {I, II, III, IV, V, VI}. Les transitions seront données par un *automate fini.* Voici un exemple très simplifié (Barbaud 1965], p. 15) :

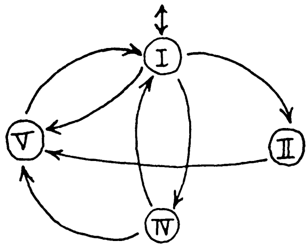


Figure 12

La séquence I V I IV I II V I est reconnue par l'automate. On peut ensuite envisager les modulations, par exemple d'un ton principal au ton de sa sous-dominante (DO majeur à FA majeur). L'accord I de DO étant égal au V de FA, on peut utiliser ces deux accords comme pivots ([Barbaud 1965], p. 16) :

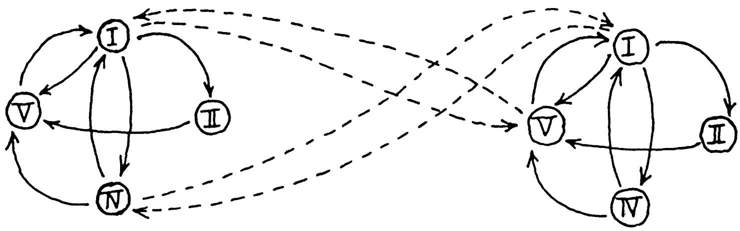


Figure 13

On peut obtenir ainsi un automate à 5 472 états (programmes ALGOM 3 et 4). Ayant construit un moyen de reconnaître les séquences d'accords correctes, il reste à en faire une véritable polyphonie. Pour tous les accords, il faut donc attribuer chaque note à l'une des voies de la polyphonie. Barbaud propose une règle très simple pour cette opération (« règle des indices », [Barbaud 1968], p. 51), dans le cas d'accords tous à l'état fondamental et dans la même tonalité, la polyphonie étant à quatre voix, et la fondamentale étant doublée (les deux notes restantes sont la quinte et la tierce). Si l'on enchaîne les degrés X et Y, la basse est imposée (états fondamentaux), et les trois autres parties sont définies selon deux cas :

1. l'intervalle de X à Y est ascendant, au plus égal à la quarte. Alors :
   la fondamentale de X est suivie de la quinte de Y
   la tierce de X est suivie de la fondamentale de Y

la quinte de X est suivie de la tierce de Y

2. l'intervalle de X à Y est descendant, au plus égal à la quarte (ce qui, avec 1 épuise tous les cas, par renversement). Alors :

la fondamentale de X est suivie de la tierce de Y

la tierce de X est suivie de la quinte de Y

la quinte de X est suivie de la fondamentale

Exemple : Les enchaînements à partir de II, en DO majeur, s'écrivent (pour une position donnée du II) :

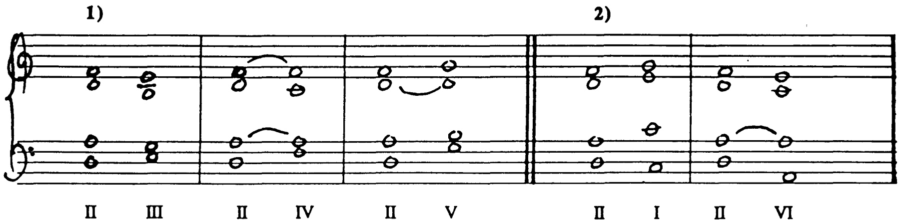


Figure 14

et de même à partir des autres positions possibles du II.

Les automates proposés ci-dessus n'étaient pas déterministes. Plusieurs accords pouvaient s'enchaîner à un même accord. Pourtant, tous ces enchaînements ne sont pas également appréciés : « Les traités d'harmonie sanctionnent habituellement les arcs [de l'automate] au moyen de trois adjectifs : « bon », « passable », « mauvais », se fondant sur des critères quelquefois bien définis, mais le plus souvent arbitraires » ([Barbaud 1968], p. 56). Pour traduire ces jugements de valeurs, Barbaud a recours aux probabilités. Il remplace la matrice booléenne de transition de l'automate, par une matrice stochastique. Si un enchaînement est jugé meilleur qu'un autre, on lui attribue une probabilité plus forte d'apparition. Si deux enchaînements sont équivalents, on les tire au hasard, avec la même probabilité. « Nous pouvons ainsi espérer, en modifiant la matrice stochastique correspondant aux probabilités d'apparition des éléments de notre univers harmonique, canaliser le hasard vers des « habitudes », des « tics », peut-être vers un certain style harmonique » ([Barbaud 1965], p. 9). Mais l'introduction des probabilités peut aussi être regardée comme une limite imposée à la théorie. Si un enchaînement est jugé meilleur qu'un autre, c'est peut être parce que les mécanismes de la polyphonie, verticaux et horizontaux, se contrôlent d'une manière plus subtile. Quant aux enchaînements équiprobables, plutôt que de les tirer au hasard, on pourrait les regrouper et s'intéresser alors à l'*ensemble des séquences jugées bonnes.* Dans ce sens, le formalisme qui sera proposé dans la suite de cet article pourrait apparaître comme un prolongement direct de l'approche de Pierre Barbaud.

Par ailleurs, il faudrait aussi remonter plus loin que les enchaînements harmoniques de base, et s'intéresser à l'organisation même de la tonalité. Barbaud, de même que Xenakis dans *Musique formelle* ([Xenakis 1963], p. 190), avait pressenti l'intérêt que pouvait avoir la théorie des groupes pour décrire la tonalité ([Barbaud 1968], p. 73) : « Si l'on a souvent expliqué telle ou telle habitude de la musique classique par l'agrément plus ou moins grand qu'elle procure à l'oreille, il est bon de se rendre compte qu'elle est conditionnée aussi, et sans doute plus, par la structure du groupe $\mathbf{Z}/12\,\mathbf{Z}$ plongé, bien malgré lui, et à son corps défendant, dans le phénomène de la résonnance ». Mais ce n'est qu'en 1980 qu'une explicitation du mécanisme algébrique de la tonalité a été proposée, dans un article de Gerald J. Balzano.

5. La construction d'échelles et la théorie des groupes : Balzano

L'étude de Balzano se trouve résumée dans son article *The group theoretic description of* 12*-fold and microtonal pitch system*, paru dans *Computer music journal* [Balzano 1980]. Les intervalles du total chromatique forment le groupe cyclique $\mathbf{Z}/12\,\mathbf{Z}$, noté C_{12}. Il utilise entre autre, un théorème du chapitre *Groupes abéliens de type fini* de la théorie des groupes :

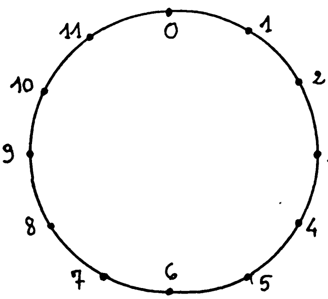
THÉORÈME : *Soient* $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *des entiers* $\geqq 2$ *et premiers entre eux deux à deux. Alors :*

$$C_{r_1} \times C_{r_2} \ldots \times C_{r_n} \textit{ est isomorphe à } C_{r_1 r_2 \ldots r_n}.$$

Il développe les propriétés de C_{12} selon les trois points :

1. • l'échelle chromatique est représentée par le groupe cyclique $C_{12} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ qui est engendré par 1.

Cette remarque précise que tout intervalle peut-être obtenu en additionnant des secondes mineures.



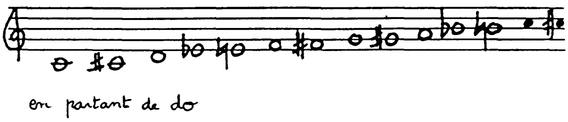


Figure 15

2. • il existe dans C_{12} un autre générateur distinct de 1, à savoir 7 (sans compter les inverses 11 et 5).

• la *gamme diatonique* est obtenue par ce second générateur, avec sept itérations : 5, 0, 7, $2\times 7, \ldots, 5\times 7$ et l'on a : $7\times 7=1$ dans C_{12} (*propriété de l'armure*)

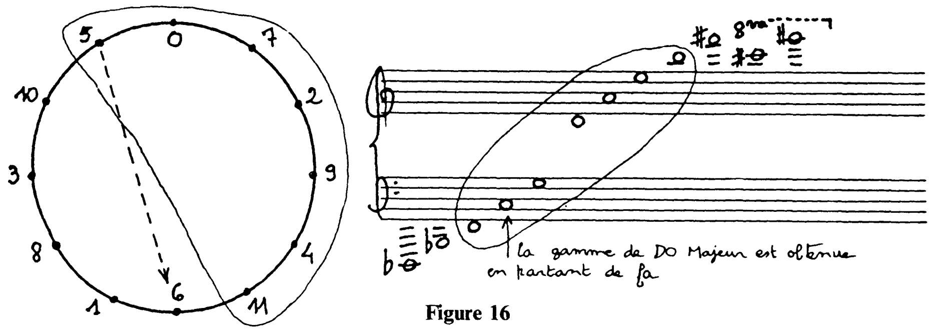


Figure 16

La quinte est le seul intervalle avec la seconde mineure (et les renversements : septième majeure et quarte) qui puisse engendrer tous les autres par itération. De plus, la gamme diatonique est obtenue par six quintes conjointes. Enfin, si l'on transpose la gamme diatonique d'une quinte, une seule note change, et elle est modifiée d'un demi-ton. (De DO majeur à SOL majeur, le fa devient fa♯.) Cette dernière remarque est fondamentale, car elle donne le système des *armures* en musique tonale.

3. • le groupe C_{12} est isomorphe au produit de deux de ses sous-groupes :

$$C_{12}\approx C_3\times C_4$$

(*cf.* théorème cité au début);

• la gamme diatonique est obtenue dans $C_3\times C_4$ par un *escalier*, c'est-à-dire une suite du type (a, b), $(a+1, b)$, $(a+1, b+1)$, qui part d'un point et y revient : (2, 2), (3, 2), (3, 3), (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2).

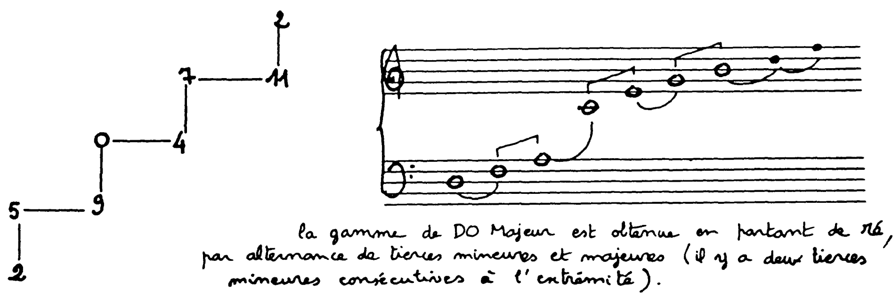


Figure 17

Cette remarque précise le fait que tout intervalle peut être obtenu comme combinaison de tierces mineures et majeures, ce qui est naturel puisqu'une tierce mineure et une tierce majeure donnent une quinte qui engendre elle-même le total chromatique. De plus, la gamme diatonique peut être obtenue par alternance de tierces, ce qui donne tous les degrés harmoniques de la gamme : trois majeurs, trois mineurs, un diminué (les deux tierces mineures consécutives).

Après cette étude, Balzano raisonne par conditions nécessaires : y a-t-il d'autres groupes cycliques C_n distincts de C_{12}, ayant les mêmes propriétés ?

C'est la propriété de l'escalier qui donne la première condition. Dans le produit $C_p \times C_q$, on retombe au même point en alternant des décalages dans C_p et dans C_q, avec un décalage de plus dans C_p. Il est donc nécessaire que $p=q+1$.

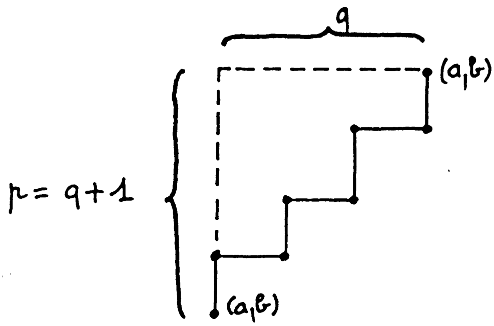


Figure 18

Or, deux entiers consécutifs k et $k+1$ sont toujours premiers entre eux. On peut en effet écrire $(k+1)-k=1$, qui est l'identité de Bezout et qui prouve que d divisant k et $k+1$ est nécessairement égal à 1. Le théorème rappelé initialement donne alors : $C_{k(k+1)} \approx C_k \times C_{k+1}$. D'où la condition nécessaire sur C_n: $n=k(k+1)$, ce qui autorise C_6 $(6=2\times 3)$, C_{12} $(12=3\times 4)$, C_{20} $(20=4\times 5)$, C_{30} $(30=5\times 6)$, etc.

Le nombre de degrés obtenus pour la gamme diatonique est alors : $k+(k+1)=2k+1$.

La valeur du générateur p qui détermine la gamme diatonique est donnée par la propriété de l'« armure » : $(2k+1).p\equiv 1$ $[n]$, où $n=k(k+1)$. On peut vérifier alors que p vaut $2k+1$. En effet,

$$(2k+1)(2k+1)=4k^2+4k+1=4.k(k+1)+1\equiv 1\,[n].$$

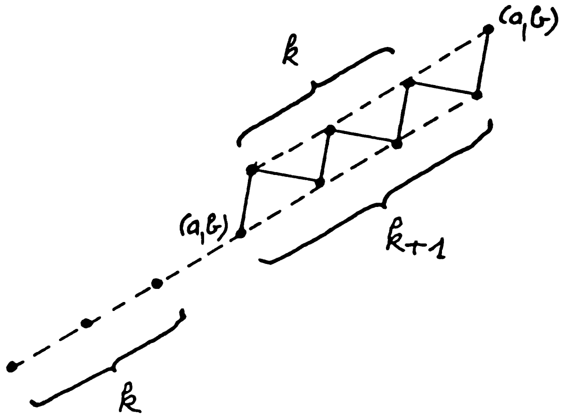


Figure 19

Cette propriété montre de surcroît que si $n = k(k+1)$, alors $2k+1$ est générateur de C_n, car 1 peut être obtenu en itérant $2k+1$. (Notons cependant que pour $k=2$, c'est-à-dire $n=6$, $2k+1$ n'est que l'inverse de 1.) Toutes les conditions sont donc remplies, et l'on peut énoncer :

THÉORÈME : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe cyclique C_n contienne une gamme diatonique est :*

$$n = k(k+1), \qquad \textit{où} \quad k \textit{ entier} \geqq 3$$

Ceci autorise les groupes C_{12}, C_{20}, C_{30}, C_{42}, C_{64}, etc. Si le système tonal fondé sur la gamme diatonique s'est révélé tellement séduisant, c'est certainement par les propriétés du groupe cyclique C_{12} dévoilées par Balzano. Mais il y a là un curieux hasard de l'histoire. En effet, le choix du nombre 12 pour diviser l'octave, ne tient pas aux propriétés du groupe cyclique C_{12}, mais bien plutôt aux *réduites* du réel Log 3/Log 2. On sait qu'à partir d'une fréquence f, $2f$ donne l'*octave*, et $3f$ donne la *quinte redoublée* (une quinte ajoutée à une octave). Par ailleurs, le système tempéré fait l'approximation selon laquelle douze quintes non-redoublées diffèrent peu de sept octaves, c'est-à-dire que 12 quintes *redoublées* diffèrent peu de $7+12=19$ octaves. Ceci s'écrit : $3^{12} \cong 2^{19}$, ou encore : $\mathrm{Log}\,3/\mathrm{Log}\,2 \cong 19/12$. Le nombre Log 3/Log 2 est irrationnel, mais un moyen de l'approcher par une suite de rationnels est de calculer ses réduites ([3]). On trouve :

$$1, \quad 2, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{8}{5}, \quad \frac{19}{12}, \quad \frac{65}{41}, \quad \frac{84}{53}, \quad \frac{485}{306}, \quad \text{etc.}$$

On voit figurer l'approximation du système tempéré traditionnel (19/12), mais d'autres apparaissent : C_{41}, C_{53}, C_{306}, . . . Curieusement, le calcul des réduites semble avoir plus inspirer les théoriciens de la musique que la notion de groupe, car dès la fin du XVII^e siècle, Holder et Mercator divisent l'octave en 53 parties égales, et au XIX^e siècle, Janko propose la division en 41 parties égales.

6. Actualité du crible d'Eratosthène : une organisation « en-temps » (A. Riotte, le Projet n° 5 de la Recherche musicale à l'I.R.C.A.M.)

Le travail de Balzano portait sur l'organisation des éléments musicaux indépendamment du temps. Dès les années 60, Xenakis distinguait les natures « en-temps » et « hors-temps » de la musique : « Sa nature en-temps est la relation de sa nature hors-temps avec le temps » [Xenabis b]. Dans *Formalisation des structures musicales* [Riotte 1979], André Riotte propose une analyse d'une pièce de Stravinsky qui vise à établir certains principes généraux de l'organisation de la musique dans le temps.

Il s'agit d'étudier la partie de premier violon de la 1^re *Pièce pour quator à cordes.* Retenons surtout l'analyse rythmique. Un trait caractéristique de cette ligne mélodique est une sorte de *périodicité évitée.* De nombreux indices amèneraient à penser qu'elle est périodique (faible ambitus, répétition de motifs et de cellules rythmiques), mais en même temps, on ne saurait déterminer la période, car les accents sont déplacés, certains éléments sont inversés, transformés, etc. Riotte a montré que rythmiquement, cette mélodie se ramenait à deux formules rythmiques périodiques (sans compter l'anacrouse), qui se chevauchent et se masquent mutuellement. (Ce type de rapports rappelle les conflits entre règles de préférence de la théorie de Lerdahl, *cf.* paragraphe 2. Du relatif inconfort causé par le musicien qui nous fait hésiter entre plusieurs représentations mentales de la séquence sonore, nait une partie du

([3]) Note : Pour calculer les réduites d'un réel r, on calcule ses parties entières et décimales : $r = E_1 + D_1$; puis $D_1 = 1/r_1$, où $r_1 > 1$, et à nouveau : $r_1 = E_2 + D_2$, etc. Les réduites de r sont : E_1, $E_1 + (1/E_2)$, $E_1 + (1/E_2 + (1/E_3))$, etc.

plaisir musical.) On n'obtient l'analyse suivante ([Riotte 1979], p. 318) :

Exemple : 1re pièce pour quator à cordes, de Stravinsky (cf. *fig.* 20)

Le Projet n° 5 de la Recherche musicale à l'I.R.C.A.M. s'est inspiré de cette analyse de Riotte pour créer « un modèle qui permet d'élaborer à partir de séquences périodiques discrètes de pulsations, par combinaisons d'opérateurs, des fragments polyrythmiques très complexes dont l'utilisateur contrôle *la cohérence et l'interaction verticale* » [Assayag 1986]. On sait que le crible d'Eratosthène permet de trouver tous les nombres premiers inférieurs à n : on calcule la partie entière e de $\sqrt{n}$, et on raye tous les multiples de 2, de 3, . . ., de e; les nombres restants sont premiers. De telle sorte qu'une succession notoirement apériodique (les nombres premiers) est obtenue comme complémentaire d'une union de successions périodiques. C'est l'idée qui sous-tend le projet cité plus haut. Donnons les définitions précises ([Assayag 1984], p. 5) :

DÉFINITIONS : « Nous désignons par *crible* une suite croissante d'entiers positifs, et par *domaine criblable* un ensemble totalement ordonné; l'application d'un crible à un domaine criblable consiste alors à numéroter ce dernier et à ramener l'ensemble de ses éléments dont les numéros rencontrent ceux du crible.

On définit le *crible simple de degré i*, $C(i)$, comme la suite arithmétique de valeur initiale 0 et de raison i : $C(i)=(0, i, 2i, 3i, \ldots, ni, \ldots)$ ».

Les cribles considérés sont ceux qu'on obtient à partir des cribles simples par les opérations :

- ensemblistes : union intersection, complémentaire;
- fonctionnel : composition de cribles $C_1 \circ C_2$;
- externes : décalage C/p (on ajoute p à tous les éléments de C);

bornage $C\,[i\ldots j]$ (on se limite aux éléments compris entre i et j).

La construction d'un objet rythmique se fait à partir d'une *mère*, c'est-à-dire une suite de mesures contenant des pulsations régulières (par exemple : des triples croches dans une mesure à 3/4, puis des sextolets de doubles dans une mesure à 2/4, etc.). « L'application d'un crible à une mère consiste à numéroter les impulsions de la mère, à relever celles dont les numéros rencontrent les éléments du crible, puis à lier ces dernières à toutes celles qui les suivent » ([Assayag 1984], p. 7).

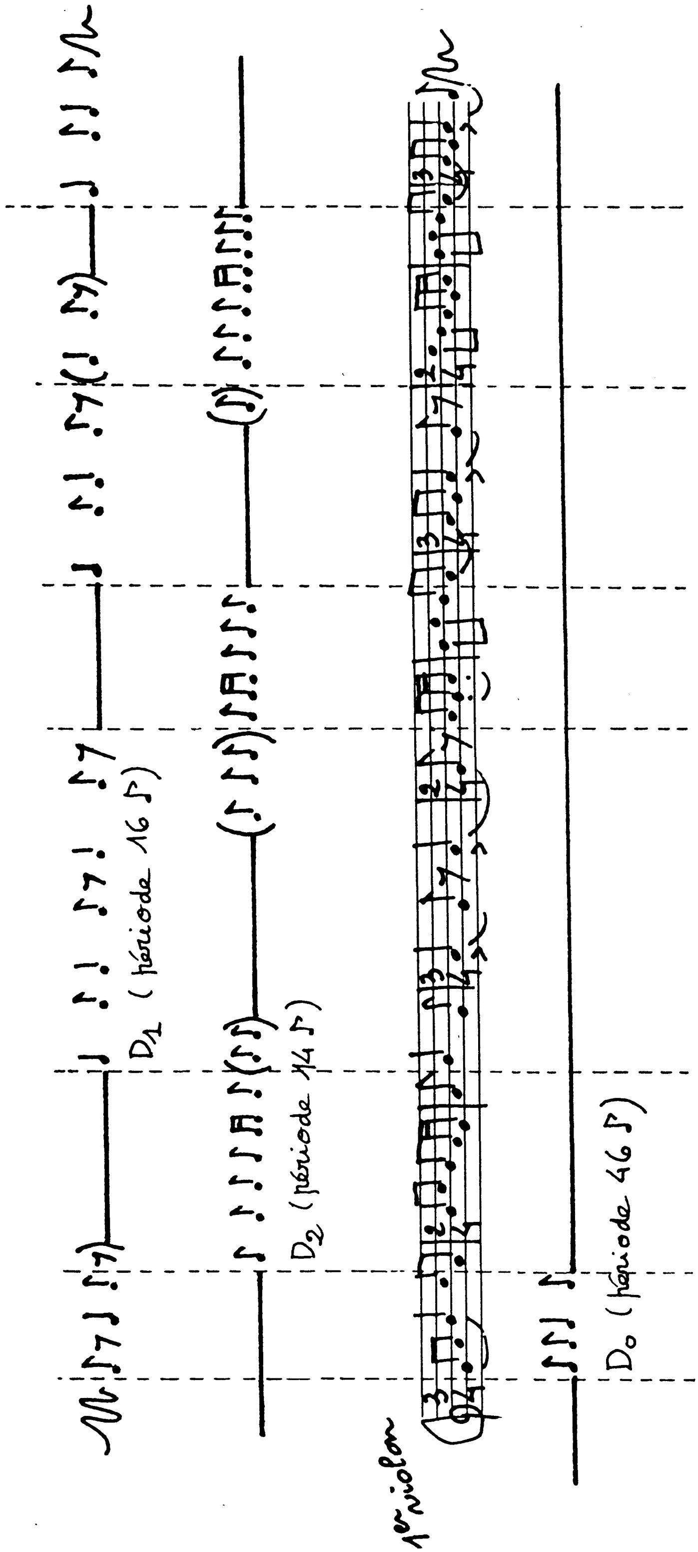


Figure 20

Exemple : On note i le crible $C(i)$, et $+$ l'union. Soit le crible $(7+4+5)$ et la mère proposée figure 21 (*cf.* p. 366).

Là encore, un point de vue mathématique peut être adopté avec profit. Par exemple, on a quelque formules simples sur les cribles;

$$C(p) \cap C(q) = C(\mathrm{ppcm}(p, q))$$

$$C(p) \cup C(q) \subset C(\mathrm{pqcd}(p, q)) \text{ et } C(\mathrm{pgcd}(p, q))$$

est le plus petit crible simple contenant $C(p) \cup C(q)$

$$\overline{C(i)} = \bigcup_{k=1}^{i-1} C(i)/k$$

$$C(p) \circ C(q) = C(pq)$$

etc.

D'une manière plus générale, tout crible obtenu à partir des cribles simples est *périodique* à partir d'un certain rang.

L'approche du Projet n° 5 de la Recherche musicale à l'I.R.C.A.M. distingue nettement l'organisation rythmique (*cf.* ci-dessus) et l'organisation du matériau musical (« hors-temps », selon l'expression de Xenakis). Le problème reste entier d'associer ensuite les événements musicaux, aux impulsions rythmiques qui ont été sélectionnées. On peut souhaiter réunir les deux points de vue. Par ailleurs, ces questions de formalisation des séquences musicales se posent de manière incontournable lorsque l'on s'intéresse au graphisme musical par ordinateur. Dans leur rapport *I.R.C.A.M. Activité de la Recherche Mai* 1986 [Assayag 1986], Gérard Assayag et Dan Timis évoquent leur travail sur une approche informatique de l'écriture musicale en distinguant trois niveaux : la surface graphique finale (matrice de points, ...), la description abstraite préliminaire de la partition (espacement relatif des notes, nombre de notes par groupes ligaturés, ...) les manipulations et l'utilisation de la partition (extraction d'un passage, transposition, ...). Ils précisent : « Le manque d'outil véritablement souple à cet égard nous a amenés à débuter à l'I.R.C.A.M. une étude sur les conditions logicielles nécessaires à l'élaboration d'un outil très général ». Le formalisme qu'on va introduire ci-après pourrait apporter une contribution originale à cette question.

7. Point de départ d'une nouvelle proposition théorique

Le point de vue qui va être adopté dans la seconde partie de cet article (à paraître) est délibérément formel, afin de permettre les manipulations

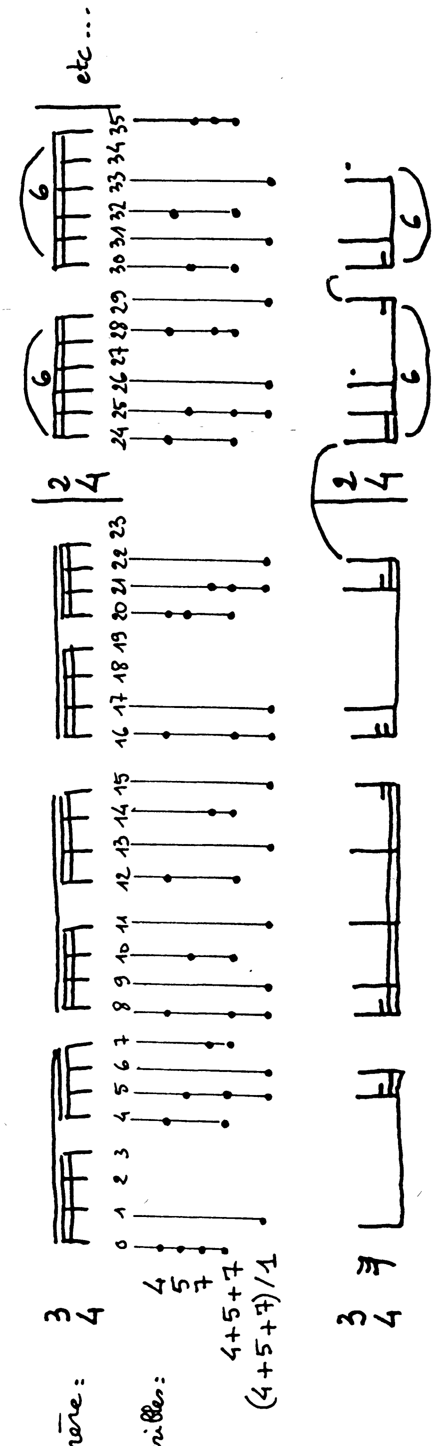


Figure 21

algébriques traditionnelles. Prenons par exemple le raisonnement d'algèbre élémentaire suivant : si l'on cherche un nombre qui, multiplié par a, donne b, on l'appelle x et on écrit $ax=b$; un calcul simple établit ensuite que x est le résultat de la division de b par a. On donne donc des définitions équivalentes des objets qu'on manipule, dont certaines sont plus explicites que d'autres. Il se trouve qu'en musique les problèmes d'organisation du matériau musical sont souvent posés en termes de contraintes, mais la question de la résolution n'a jamais été abordée de façon systématique.

La conversation avec Dan Timis qui a débuté le stage dont cet article est le compte rendu, avait permis d'aborder le phénomène musical de la manière suivante.

1. Une musique est une application de l'ensemble des dates $T \subset \mathbf{R}$ dans un ensemble $E : t \rightarrow \varphi(t)$.

Exemple : Un glissando de trombone

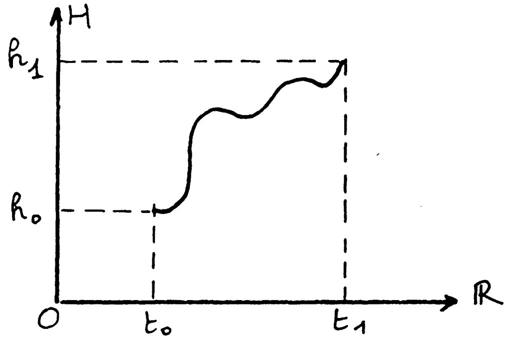


Figure 22

2. Hypothèse restrictive : pour le compositeur, comme pour l'interprète ou le mélomane, seule une quantité *dénombrable* d'événements, dans le flot sonore, ont un sens. Il existe E_1 et T_1 parties dénombrables de E et T, telles que l'on puisse se ramener à la restriction φ_1 de φ, de T_1 dans E_1. « C'est cette discrétisation généralisée qui rendra possible la sémiologie musicale formelle, de la même façon qu'elle permet la structuration mathématique du langage » ([Nattiez 1975], p. 115). En ce qui concerne le glissando de trombone, seules nous intéressent sa hauteur de départ, sa hauteur d'arrivée, et son allure générale. La musique considérée devient alors une famille dénombrable M de couples (t, e) de $T_1 \times E_1$.

Ordonnons M suivant les valeurs croissantes de t : (t_1, a) (t_2, b)... Remplaçons alors la valeur de t_2, date d'occurence de b, par la valeur de l'intervalle de temps qui sépare b de a. M devient un mot du monoïde A^* sur l'alphabet $A = T_1 \times E_1$.

Pour deux événements simultanés, on aura l'égalité :

$$(t, a)\ (0, b) = (t, b)\ (0, a).$$

qui est une forme de commutation partielle.

3. Nouvelle hypothèse restrictive : les valeurs irrationnelles de T_1 sont irréalisables, et de plus, on ne considère qu'un nombre fini d'éléments dans T_1 et E_1.

Comme T_1 est inclus dans $\mathbf{Q}$, et T_1 fini, il existe un dénominateur commun à tous ses éléments :

$$\exists n \in \mathbf{N} \mid T_1 \subset 1/n.\mathbf{N}$$

Écrivons alors :

$$\begin{array}{cccc} (0, a)(t, b) = & a & \varnothing\varnothing \ldots b & \\ \downarrow & \text{durée } 1/n & & \\ t = k/n & & \xrightarrow{\qquad\qquad} & k \text{ fois la durée } 1/n \end{array}$$

avec un symbole de prolongation $\varnothing$, en convenant que la lecture d'un symbole correspond à la durée minimale $1/n$. Puis écrivons ensuite, pour des événements simultanés :

$$(0, a)(0, b)(t, c) = \{a, b\}\varnothing\varnothing\varnothing \ldots c$$

c'est-à-dire qu'on considère le monoïde A^* où $A = \mathscr{P}(E_1)$ ensemble des parties de E_1.

4. Quand dans une musique, il y a des sons simultanés, ils émanent de plusieurs sources sonores. Pour spécifier l'appartenance des sons à telle ou telle source, on introduit l'alphabet : $A = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ (c'est le point de vue de Pierre Barbaud). Remarquons que dans 3, puisque E_1 est fini de cardinal n, on peut toujours constituer n voix :

$$\{a, b, c\}\ \{c\}\ \{b\} = (a, b, c)\ (c, \varnothing, \varnothing)\ (b, \varnothing, \varnothing).$$

La suite de ce travail (seconde partie, à paraître) essaie de développer le formalisme issu de 3, c'est-à-dire l'étude du monoïde libre A^* ou A est l'ensemble des parties d'un ensemble d'événements sonores $E : A = \mathscr{P}(E)$. On ne propose pas ici des analyses d'œuvres, considérant qu'elles ne pourraient intervenir qu'une fois le modèle théorique suffisamment développé. Précisons un détail technique : une note de musique est déterminée par *deux événements*, son début et sa fin. Plusieurs représentations sont possibles :

- associer à chaque note deux symboles, x (son début) et $\bar{x}$ (sa fin); ainsi $xw\bar{x}$ indique que x se prolonge pendant la durée de w;
- associer à un symbole de début de note x, un symbole de *prolongation de note* x'; on écrira alors :

$$\underset{w}{\underbrace{xx'x'x'\ldots x'}}$$

Lorsque ces questions de transcription seront sans difficultés, on se contentera de la notation musicale traditionnelle.

Le cadre algébrique étudié voudrait traduire la double organisation de la musique, verticale et horizontale : « Il y a tout de même, entre musique et langage, cette différence fondamentale que le langage ne permet pas, au contraire des musiques polyphoniques, de succession d'unités simultanées » ([Nattiez 1975], p. 195). On introduit donc, en plus de la concaténation usuelle, une opération de superposition de séquences musicales.

En l'absence d'hypothèses supplémentaires inspirées par l'intuition musicale, l'exposé risque de tourner court. Mais la méthode à suivre serait d'introduire petit-à-peitt les hypothèses musicales, et à chaque étape de faire l'inventaire complet des conséquences qu'on peut en tirer. Cette approche pourrait renouveler l'analyse traditionnelle, qui se contente de chercher les propriétés à tâtons, à partir d'hypothèses mal définies.

BIBLIOGRAPHIE

PREMIÈRE PARTIE :

1. U. J. Aalbersberg et G. Rozenberg, *Theory of Traces*, Université de Leiden, Netherland, 1985.
2. E. Amiot, G. Assayag, C. Malherbe et A. Riotte, *Duration Structure Generation and Recognition in Musical Writinf*, I.C.M.C. 86.
3. [Assayag 1984] G. Assayag et C. Malherbe, *Manipulation et représentation d'objets musicaux*, I.C.M.C. 84.
4. [Assayag 1986] G. Assayag, G. Buquet, M. Castellengo, J. Kergomard, C. Malherbe, A. Riotte et D. Timis, *Instruments, modèles, écritures*, I.R.C.A.M., 1986.
5. [Balzano 1980] G. J. Balzano, *The Group-Theoretic Description of 12-Fold and Microtonal Pitch Systems*, dans la revue Computer music journal, vol. 4, n° 4, 1980.
6. B. S. Brook, *Musicology and the Computer*, *Musicology 1966-2000: a Practical Program*, American Musicological Society, 1966.

7. [Barbaud 1965] P. BARBAUD, *Introduction à la composition musicale automatique,* Dunod, Paris, 1965.
8. [Barbaud 1968] P. BARBAUD, *La musique discipline scientifique,* Dunod, Paris, 1968.
9. [Barbaud 1976] P. BARBAUD, *Ludus margaritis vitreis,* I.R.I.A., 1976.
10. P. BARBAUD, *Vis teriblis sonorum,* I.R.I.A., 1976.
11. P. BARBAUD, *Res musica,* support du cours Informatique et musique, I.R.I.A., 1977.
12. M. Y. CHEN, *Toward a Grammar of Singing: Tune-Text Association in Gregorian Chant,* dans la revue Music perception, vol. 1, 1984.
13. [Cherlin 1986] M. CHERLIN, *Alphonce's Invariance Matrix and Lewin's Inversionnal Clock: a New Approach Toward Reading Pitch-Class Matrices,* dans la revue In theory only, vol. 19, n° 2 et 3, 1986.
14. C. CHOFFRUT, *Free Partially Commutative Monoids,* L.I.T.P., 1986.
15. [Chomsky 1968] N. CHOMSKY, *Le langage et la pensée,* Payot, 1968.
16. R. CHRISMAN, *Describing Structural Aspects of Pitch-Sets Using Successive-Interval Arrays,* dans la revue Journal of music theory, vol. 21, n° 1, 1984.
17. T. CLARK, *Pitch Set Pedagogy Through Constructive Experiments, with Comments on Basic Atonal Theory,* in In theory only, vol. 8, n° 1, 1984.
18. R. CORI et D. PERRIN, *Automates et commutations partielles,* dans R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 19, n° 1, 1985.
19. R. CORI, *Partially Abelien Monoids,* G.R.E.C.O., 1986.
20. C. DUBOC, *Commutations dans les monoïdes libres : un cadre théorique pour l'étude du parallélisme,* L.I.T.P., 1986.
21. R. DUISBERG, *On the Role of Affect in Artificial Intelligence and Music,* dans la revue Perspective of new-music, vol. 23, n° 1, 1984.
22. [Forte 1973] A. FORTE, *The Structure of Atonal Music,* Yale University, 1973.
23. [Greussay 1973] P. GREUSSAY, *Modèles de description symbolique en analyse musicale,* Thèse, Université de Paris-VIII, 1973.
24. [Greussay 1985] P. GREUSSAY, *Exposition ou exploration : graphes beethoveniens,* dans Qui, quand, comment ? La recherche musicale, I.R.C.A.M., 1985.
25. L. HILLER, *Phrase Generation in Computer Music Composition,* University of New York, 1978.
26. S. R. HOLTZMAN, *Using Generative Grammar for Composition,* in Computer music journal, vol. 5, n° 1, 1981.
27. O. E. LASKE, *In Search of a Generative Grammar For Music,* in Perspectives of new-music, 1974.
28. [Lerdahl 1983] F. LERDAHL et R. JACKENDOFF, *A Generative Theory of Tonal Music,* M.I.T., 1983.
29. [Lerdahl 1985] F. LERDAHL, *Théorie générative de la musique et composition musicale,* in Quoi, quand, comment ? La recherche musicale, I.R.C.A.M., 1985.
30. [Lerdahl 1986] F. LERDAHL et Y. POTARD, *La composition assistée par ordinateur,* Rapport I.R.C.A.M., 1986.
31. D. LEWIN, *A Label-Free Development for 12-Pitch-Class Systems,* in Journal of music theory, vol. 21, n° 1, 1977.
32. [Lewin 1977] D. LEWIN, *Forte's Interval Vector, My Interval Function, Regener's Commun-Note Function,* in Journal of music theory, vol. 21, n° 2, 1977.

33. D. Lewin, *On Generalized Intervals and Transpositions*, in Journal of music theory, vol. 24, n° 2, 1980.
34. D. Lewin, *Transformational Techniques in Atonal and Other Music Theories*, in Perspectives of new-music, vol. 21, n^{os} 2 et 3, 1983.
35. C. Malherbe, G. Assayag et M. Castellengo, *Functional Integration of Complex Instrumental Sounds in Musical Writing*, I.C.M.C. 85.
36. A. W. Mead, *Pedagogically Speaking: Manifestations of Pitch-Class Order*, in On theory only, vol. 8, n° 1, 1984.
37. R. Morris, *Combinatorially Without the Aggregate*, in Perspectives of new-music, vol. 21, n^{os} 1 et 2, 1983.
38. [Minsky 1985] M. Minsky, *Musique, sens, pensée*, dans Quoi, quand, comment ? La recherche musicale, I.R.C.A.M., 1985.
39. [Nattiez 1975] J. J. Nattiez, *Fondements d'une sémiologie de la musique*, 10/18, 1975.
40. [Newcomb 1980] S. R. Newcomb, *LASSO: an Intelligent Computer Based Tutorial in Sixteenth-Century Counterpoint*, in Computer music journal, vol. 9, n° 4, 1985.
41. D. Perrin, *Words Over a Partially Commutative Alphabet*, L.I.T.P., 1985.
42. J. Rahn, *Basic Atonal Theory*, Longman, 1980.
43. [Regener 1974] E. Regener, *On Allen Forte's Theory of Chords*, in Perspectives of new-music, 1974.
44. [Riotte 1979] A. Riotte, *Formalisation des structures musicales*, Université de Paris-VIII, 1979.
45. [Roads 1979] C. Roads, *Grammars as Representations for Music*, in Computer music journal, vol. 3, n° 1, 1979.
46. N. Ruwet, *Introduction à la grammaire générative*, Plon, 1967.
47. J. L. Snell, *Musical Grammars and Computer Analysis: A Review*, in Perspectives of new-music, vol. 23, n° 2, 1985.
48. M. Stanfield, *Some Exchange Operations in Twelve-Tone Theory: Part one*, in Perspectives of new-music, vol. 23, n° 1, 1981.
49. D. Starr, *Derivation and Polyphony*, in Perspectives of new-music, vol. 23, n° 1, 1984.
50. [Wilcox 1983] H. J. Wilcox, *Group Tables and the Generalized Hexachord Theorem*, in Perspectives of new-music, vol. 21, n^{os} 1 et 2, 1983.
51. [Xenakis 1963] I. Xenakis, *Musique formelle*, Stock, 1963.
52. [Xenakis b] I. Xenakis, pochette du disque : *Metastasis, Pithoprakta, Eonta*, Le chant du monde, LDX-A-83 68.