RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE ET APPLICATIONS

MICHEL LATTEUX

Sur les ensembles linéaires

RAIRO. Informatique théorique et applications, tome 21, nº 1 (1987), p. 33-40

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1987__21_1_33_0>

Informatique théorique et Applications/Theoretical Informatics and Applications
(vol. 21, n° 1, 1987, p. 33 à 40)

SUR LES ENSEMBLES LINÉAIRES (*)

par Michel LATTEUX (1)

Communiqué par J. E. PIN

Résumé. – *Nous démontrons que tout ensemble linéaire ayant G comme ensemble de périodes est une union finie disjointe d'ensembles linéaires dont les périodes appartiennent à G.*

Abstract. – *We prove that any linear set with G as the set of periods is a finite union of disjoint linear sets with sets of periods included in G.*

I. INTRODUCTION

Un des résultats de base concernant les langages algébriques est le Théorème de Parik [8, 9] qui énonce que tout langage algébrique est commutativement équivalent à un langage rationnel. En d'autres termes, l'image d'un langage algébrique par la fonction de Parikh est un ensemble semi-linéaire, c'est-à-dire une union finie d'ensembles linéaires. L'étude de ces ensembles a, depuis, permis d'obtenir plusieurs résultats concernant les langages algébriques bornés [3, 7] et les langages algébriques commutatifs [1, 6].

Une des difficultés dans l'étude des ensembles semi-linéaires est qu'il n'existe pas de décomposition canonique d'un semi-linéaire en union de linéaires. Cependant, il existe un résultat remarquable sur les semi-linéaires : tout semi-linéaire est une union finie disjointe d'ensembles linéaires simples [2, 5]. La preuve de cette propriété utilise un lemme de Ginsburg et Spanier [4] établissant que pour tout $x \in \mathbb{N}^k$ et tout ensemble fini $G = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset \mathbb{N}^k$,

(*) Reçu juillet 1984, révisé juillet 1986.
(1) Université de Lille-I, C.N.R.S. U.A. 369, U.F.R., I.E.E.A., Informatique, 59655 Villeneuve-d'Ascq, France.

l'ensemble linéaire

$$x+G^{\oplus}=\left\{x+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i/\lambda_i\in\mathbb{N}\right\}$$

peut s'écrire $\bigcup_{j=1}^{s}(x_j+G_j^{\oplus})$ où chaque G_j est un ensemble d'éléments linéairement indépendant, inclus dans G. C'est ce lemme que nous allons préciser ici en montrant que l'union peut être prise disjointe. Un intérêt de ce résultat est qu'il implique presque immédiatement, à l'aide de la caractérisation des langages algébriques bornés ambigus ([3], théorème 6.2.1), que tout langage algébrique borné est une union finie de langages algébriques non ambigus et qu'il est, donc, d'ambiguïté bornée.

II. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Rappelons, d'abord, quelques notations usuelles. Les ensembles des entiers positifs ou nuls et des entiers relatifs seront désignés respectivement par $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ et pour $k\in\mathbb{N}$, $0^{(k)}$ désignera l'élément nul de $\mathbb{N}^k$.

Pour A, $B\subseteq\mathbb{Z}^k$, posons $A\setminus B=\{a\in A/a\notin B\}$ et $A+B=\{a+b/a\in A,\ b\in B\}$. Si $A=\{x\}$, nous écrirons $x+B$ à la place de $\{x\}+B$.

L'ensemble $\mathbb{Z}^k$ est partiellement ordonné par la relation d'ordre définie par : $y\leqq z$ si et seulement si $z\in y+\mathbb{N}^k$, c'est-à-dire si aucune composante de y n'est supérieure à la composante correspondante de z. Un élément $x\in A\subseteq\mathbb{N}^k$ est minimal dans A s'il n'existe pas dans A d'élément $y<x$, c'est-à-dire vérifiant $y\leqq x$ et $y\neq x$. Nous utiliserons à plusieurs reprises le résultat suivant :

LEMME DE DICKSON : *Toute partie de* $\mathbb{N}^k$ *ne contient qu'un nombre fini d'éléments minimaux.*

Donnons, maintenant, une définition des ensembles linéaires. Pour $B=\{b_1,\ \ldots,\ b_n\}\subseteq\mathbb{Z}^k$, posons

$$B^{\oplus}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i b_i/\lambda_i\in\mathbb{N}\right\}.$$

Alors, une partie L de $\mathbb{N}^k$ est un ensemble linéaire (simple) s'il existe $x\in\mathbb{N}^k$ et un ensemble fini $B\subseteq\mathbb{N}^k$ (d'éléments linéairement indépendants) tels que

$L=x+B^{\oplus}$. Enfin, nous dirons que S est un ensemble linéaire simple déduit de G, où G est une partie finie de $\mathbb{N}^k$, s'il existe $y\in\mathbb{N}^k$ et un ensemble d'éléments linéairement indépendants, $D\subseteq G$ tels que $S=y+D^{\oplus}$.

III. RÉSULTATS

Le but de cette section est d'établir que tout ensemble linéaire, $x+G^{\oplus}$, est une union finie disjointe d'ensembles linéaires simples déduits de G. En fait, nous allons prouver une propriété un peu plus générale :

PROPOSITION 1: *Soient F, G, deux ensembles finis de $\mathbb{N}^k$ et $L=F+G^{\oplus}$. Alors, L est une union finie disjointe de linéaires simples déduits de G.*

Pour la preuve de cette proposition, nous utiliserons les notations suivantes :

Pour toute partie finie G de $\mathbb{N}^k$, $LS(G)$ désignera l'ensemble des linéaires simples déduits de G et $SLS(G)$, l'ensemble des unions finies disjointes d'éléments de $LS(G)$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, $V=\{v_1, \ldots, v_n\}$ désignera la base canonique de $\mathbb{N}^n$, c'est-à-dire que $\forall i\in[1, n]$, $v_i=(v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$ avec $\forall j\in[1, n]$, $v_{i,j}=1$ si $i=j$, 0 sinon. Alors $V^{\oplus}=\mathbb{N}^n$ et on peut établir :

LEMME 2 : *Soient $n\in\mathbb{N}$, $L=E+V^{\oplus}$, l'idéal engendré par la partie finie $E\subseteq\mathbb{N}^n$ et L' une union finie disjointe de linéaires simples déduits de V. Alors, $L'\setminus L$ est aussi une union finie disjointe de linéaires simples déduits de V.*

Preuve : Raisonnons par récurrence sur le nombre d'éléments de E. Si $E=\emptyset$, alors $L=\emptyset$ et $L'\setminus L=L'\in SLS(V)$.

Dans le cas contraire $E=\{y\}\cup E'$ avec $E'=E\setminus\{y\}$ et $y=(y_1, \ldots, y_n)$. Puisque $L'\setminus L=(L'\setminus(y+V^{\oplus}))\setminus(E'+V^{\oplus})$, il suffit, d'après l'hypothèse de récurrence, d'établir que $L'\setminus(y+V^{\oplus})\in SLS(V)$. Clairement, on peut supposer que $L'\in LS(V)$, c'est-à-dire que $L'=x+B^{\oplus}$ avec $x=(x_1, \ldots, x_n)$ et $B\subseteq V$. S'il existe $i\in[1, n]$ tel que $x_i<y_i$ et $v_i\notin B$, alors $(x+B^{\oplus})\setminus(y+V^{\oplus})=x+B^{\oplus}\in SLS(V)$. Nous pouvons donc supposer que, pour tout $i\in[1, n]$, $x_i<y_i$ implique $v_i\in B$. Pour $i\in[1, n]$, posons $y'_i=\sup(x_i, y_i)$. Alors, il est facile de vérifier l'égalité

$$(x+B^{\oplus})\setminus(y+V^{\oplus})=\bigcup_{i=1}^{n}(F_i+B_i^{\oplus})$$

où $B_i=B\setminus\{v_i\}\subseteq B\subseteq V$ et

$$F_i=\{(y'_1, \ldots, y'_{i-1}, z, x_{i+1}, \ldots, x_n)/x_i\leqq z<y_i\}.$$

De plus, par construction, $\bigcup_{i=1}^{n} (F_i + B_i^{\oplus}) \in SLS(B) \subseteqq SLS(V)$, d'où le résultat. □

Ce lemme peut être généralisé :

LEMME 3 : *Soient k un entier positif, F, G deux ensembles finis de $\mathbb{N}^k$, $L = F + G^{\oplus}$ et L' une union finie disjointe de linéaires simples déduits de G. Alors, $L' \setminus L$ est aussi une union finie disjointe de linéaires simples déduits de G.*

Preuve : Démontrons, d'abord, cette propriété dans le cas où $L' \in LS(G)$. Alors, il existe $x \in \mathbb{N}^k$ et $H = \{h_1, \ldots, h_n\} \subseteqq G$ tels que $L' = x + H^{\oplus}$ avec $h_1, \ldots, h_n$ linéairement indépendants. L'application φ de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}^k$, définie par $\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i$, est donc injective. Posons $L_1 = L \cap L'$. Comme $H \subseteqq G$, $L_1 = L_1 + H^{\oplus}$ et comme $L_1 \subseteqq L' = x + H^{\oplus}$, on peut poser $L_1 = x + L_1'$ avec $L_1' \subseteqq H^{\oplus}$ et $L_1' = L_1' + \mathrm{H}^{\oplus}$. Alors, $L' \setminus L = L' \setminus L_1 = x + (H^{\oplus} \setminus L_1')$. Clairement, il suffit de montrer que $H^{\oplus} \setminus L_1' \in SLS(G)$. Comme $H^{\oplus} \setminus L_1' = \varphi(\varphi^{-1}(H^{\oplus} \setminus L_1'))$ et que φ est injective, il reste à établir que

$$\varphi^{-1}(H^{\oplus} \setminus L_1') = \varphi^{-1}(H^{\oplus}) \setminus \varphi^{-1}(L_1') = \mathbb{N}^n \setminus \varphi^{-1}(L_1') \in SLS(V).$$

Comme $L_2 = \varphi^{-1}(L_1') = L_2 + \mathbb{N}^n$, on obtient $L_2 = E + \mathbb{N}^n$ où E est l'ensemble fini des éléments minimaux de L_2. D'après le lemme 2, $\mathbb{N}^n \setminus (E + \mathbb{N}^n) = V^{\oplus} \setminus (E + V^{\oplus}) \in SLS(V)$, ce qui implique que $L' \setminus L \in SLS(G)$.

Maintenant, si $L' \in SLS(G)$, $L' = \bigcup_{i=1}^{m} L_i'$ où l'union est disjointe et où chaque $L_i' \in LS(G)$. Alors, $L' \setminus L$ est l'union disjointe des $L_i' \setminus L$, ce qui entraîne le résultat, puisque nous venons de prouver que chaque $L_i' \setminus L \in LS(G)$. □

Preuve de la Proposition 1 : Nous allons raisonner par récurrence sur Card(G). Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}$, notre hypothèse de récurrence s'écrit : Si Card$(G) < n$, alors, pour tout ensemble fini F, $F + G^{\oplus} \in SLS(G)$.

Clairement, cette hypothèse est vérifiée pour $n = 1$. Prenons $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ avec $n \geqq 1$ et montrons, d'abord, que $G^{\oplus} \in SLS(G)$.

Considérons l'application linéaire φ de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{Z}_k$ définie par : $\forall i \in [1, n]$, $\varphi(v_i) = g_i$ et une partie du noyau de φ,

$$S = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n / \varphi(\lambda) = 0^{(k)} \text{ et } \lambda_n \geqq 1\}.$$

Clairement, si $S = \varnothing$, il suffit de montrer la propriété pour $\{g_1, \ldots, g_{n-1}\}^{\oplus}$, ce qui découle de l'hypothèse de récurrence. Supposons, donc, $S \neq \varnothing$ et considérons l'idéal $A=(S+\mathbb{N}^n) \cap \mathbb{N}^n$. Prenons $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ et montrons la propriété :

(1) $\lambda \in A$ si et seulement si il existe $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)$ et $\mu_n<\lambda_n$.

En effet, si $\lambda \in A$, il existe $z=(z_1, \ldots, z_n) \in S$ tel que $\lambda \geqq z$. Donc $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)=\lambda-z \in \mathbb{N}^n$ avec $\mu_n<\lambda_n$ puisque $z_n \geqq 1$ et, comme $\varphi(z)=0^{(k)}$, $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)+\varphi(z)=\varphi(\mu)$.

Réciproquement, s'il existe $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $\varphi(\lambda)=\varphi(\mu)$ avec $\mu_n<\lambda_n$, posons $z=(z_1, \ldots, z_n)=\lambda-\mu$. Alors, $\varphi(z)=\varphi(\lambda)-\varphi(\mu)=0^{(k)}$ et $z_n=\lambda_n-\mu_n \geqq 1$. Donc, $z \in S$ et $\lambda=z+\mu \in A$.

Notons $A_{\min}$, l'ensemble des éléments minimaux de A. Alors, $A_{\min}$ est fini et $A=A_{\min}+\mathbb{N}^n$. Posons

$$t=\sup\{\lambda_n/(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in A_{\min}\}$$

et

$$\pi(A)=\{(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})/\exists\, \lambda_n \text{ tel que } (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in A\}.$$

Montrons la propriété :

$$(2) \qquad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A) \text{ implique } (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, t) \in A.$$

En effet, si $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A)$, il existe λ_n tel que $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n) \in A$ et il existe $a=(a_1, \ldots, a_n) \in A_{\min}$ tel que $\lambda \geqq a$ et, comme $a_n \leqq t$, nous en déduisons que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, t) \in a+\mathbb{N}^n \subseteqq A$.

Posons, maintenant,

$$E=\{0^{(k)}, g_n, \ldots, (t-1) g_n\}, \qquad G'=\{g_1, \ldots, g_{n-1}\},$$
$$L_1=E+G'^{\oplus}=\{\varphi(\mu_1, \ldots, \mu_n)/(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n \text{ et } \mu_n<t\}$$

et

$$L_2=G^{\oplus} \setminus L_1.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $L_1 \in SLS(G)$ et comme $G^{\oplus}=L_1 \cup L_2$ avec $L_1 \cap L_2=\varnothing$, il ne nous reste plus qu'à établir que $L_2 \in SLS(G)$.

Pour cela, montrons d'abord l'égalité :

$$(3) \qquad L_2=\{\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)/\lambda_n \geqq t \text{ et } (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \notin \pi(A)\}.$$

Soit $u=\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_n \geqq t$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \notin \pi(A)$. Supposons que $u \in L_1$. Alors, il existe $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{N}^n$ avec $\mu_n<t \leqq \lambda_n$ tel que $u=\varphi(\mu)$,

ce qui implique, d'après la propriété (1), que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in A$ et donc $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A)$, d'où la contradiction.

Réciproquement, soit $u \in L_2$. Prenons $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \varphi^{-1}(u) \cap \mathbb{N}^n$ avec λ_n minimal. D'après la propriété (1), $\lambda \notin A$. D'autre part, comme $u \notin L_1$, $\lambda_n \geqq t$. Supposons que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A)$. Alors, d'après la propriété (2), $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, t) \in A$ et puisque $\lambda_n \geqq t$, $\lambda \in A$, d'où la contradiction.

Considérons φ', l'application linéaire de $\mathbb{Z}^{n-1}$ dans $\mathbb{Z}^k$ définie par

$$\varphi'(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i g_i.$$

Alors, d'après la propriété (3), $L_2 = tg_n + g_n^{\oplus} + \varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A))$. Nous allons démontrer que $\varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A))$ appartient à $SLS(G')$. Pour cela, désignons par $\pi(A)_{\min}$ l'ensemble des éléments minimaux de $\pi(A)$. Alors, clairement, $\pi(A) = \pi(A)_{\min} + \mathbb{N}^{n-1}$. Posons $L'' = \varphi'(\pi(A)) = F'' + G'^{\oplus}$ avec $F'' = \varphi'(\pi(A)_{\min})$ et démontrons l'égalité :

$$\varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A)) = G'^{\oplus} \setminus L''. \tag{4}$$

Prenons $u = \varphi'(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in G'^{\oplus} \setminus L''$. Comme $u \notin L'' = \varphi'(\pi(A))$,

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \notin \pi(A) \qquad \text{et} \qquad u \in \varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A)).$$

Réciproquement, prenons $u = \varphi'(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ avec

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \notin \pi(A).$$

Supposons que $u \in L''$. Alors, $u = \varphi'(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ avec

$$(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \pi(A)$$

et il existe $\mu_n \geqq 1$ tel que $(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n) \in A$. Comme

$$\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_n) = \varphi'(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) + \mu_n g_n = \varphi(\mu_1, \ldots, \mu_n),$$

nous en déduisons, d'après la propriété (1) que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_n) \in A$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A)$, d'où la contradiction.

Nous pouvons, maintenant, utiliser l'hypothèse de récurrence qui permet d'énoncer que $G'^{\oplus} \in SLS(G')$. Alors, d'après le lemme 3, $G'^{\oplus} \setminus L'' \in SLS(G')$. Donc,

$$\varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A)) = G'^{\oplus} \setminus L'' = \bigcup_{i=1}^{s} L_i''$$

avec $L_i'' \cap L_j'' = \emptyset$ si $i \neq j$ et $L_i'' = x_i'' + G_i''^{\oplus}$ où G_i'' est un ensemble d'éléments linéairement indépendants inclus dans G'. Nous en déduisons que

$$L_2 = tg_n + g_n^{\oplus} + \varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A))$$
$$= tg_n + g_n^{\oplus} + \left(\bigcup_{i=1}^{s} (x_i'' + G_i''^{\oplus})\right) = \bigcup_{i=1}^{s} (x_i' + G_i'^{\oplus})$$

avec $x_i' = x_i'' + tg_n$ et $G_i' = G_i'' \cup \{g_n\}$. Pour achever la démonstration, il nous reste à vérifier que chaque G_i' est un ensemble d'éléments linéairement indépendants et que $(x_i' + G_i'^{\oplus}) \cap (x_j' + G_j'^{\oplus}) = \emptyset$ si $i \neq j$. D'après les propriétés vérifiées par les G_i'', ceci découle immédiatement de la propriété :

(5) Pour tout $u \in L_2$, il existe un et un seul $\lambda_u \in \mathbb{N}$ tel que

$$u - \lambda_u g_n \in \varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A)).$$

Pour établir cette propriété, supposons le contraire. Il existe, alors, $\mu_n, \lambda_n \in \mathbb{N}$ tels que $\mu_n < \lambda_n$ et $u_1 = u - \lambda_n g_n$, $u_2 = u - \mu_n g_n$ appartiennent à $\varphi'(\mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A))$. Donc, il existe

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \qquad (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1} \setminus \pi(A)$$

tels que

$$u_1 = \varphi'(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \qquad \text{et} \qquad u_2 = \varphi'(\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}).$$

Posons $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}, \mu_n)$.

Alors, $\varphi(\lambda) = u = \varphi(\mu)$ et, d'après la propriété (1), $\lambda \in A$, ce qui entraîne $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \pi(A)$, d'où la contradiction.

Nous obtenons, donc, $G^{\oplus} \in SLS(G)$, ce qui entraîne immédiatement que $\forall f \in \mathbb{N}^k$, $f + G^{\oplus} \in SLS(G)$. Il nous reste à établir que $F + G^{\oplus} \in SLS(G)$ pour tout ensemble fini $F \subseteq \mathbb{N}^k$. Pour cela, raisonnons par récurrence sur Card (F). Prenons $F = \{f_1, \ldots, f_m\}$ avec $m > 1$ et posons $F' = \{f_1, \ldots, f_{m-1}\}$. Alors

$$L' = F' + G^{\oplus} \qquad \text{et} \qquad L = f_m + G^{\oplus} \in SLS(G)$$

et, d'après le lemme 3, $L \setminus L' \in SLS(G)$. Donc, $F + G^{\oplus}$, qui est l'union disjointe de $L \setminus L'$ et de L', appartient à $SLS(G)$. □

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Beauquier, M. Blattner et M. Latteux, *On Commutative Context-Free Languages*, J. Comput. and Syst. Sciences, 1985 (à paraître).

2. S. Eilenberg et M. P. Schutzenberger, *Rational Sets in Commutative Monoïds*, J. Algebra, vol. 13, 1969, p. 173-191.
3. S. Ginsburg, *The Mathematical Theory of Context-Free Languages*, McGraw-Hill, New York, 1966.
4. S. Ginsburg et E. H. Spanier, *Bounded Algol-Like Languages*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, 1964, p. 333-368.
5. R. Ito, *Every Semilinear Set is a Finite Union of Disjoint Linear Sets*, J. Comput. and Syst. Sciences, vol. 3, 1969, p. 221-231.
6. J. Kortelainen, *Every Commutative Quasirational Language is Regular*, R.A.I.R.O. Informatique Théorique et Applications, 1985 (à paraître).
7. M. Latteux, *Effacement et langages algébriques*, Actes du Colloque Les Mathématiques de l'Informatique, Paris, 1982, p. 25-34.
8. R. J. Parikh, *Languages Generating Devices*, M.I.T. Res. Lab. Electron. Quart. Prog. Rept., vol. 60, 1961, p. 199-212.
9. R. J. Parikh, *On Context-Free Languages*, J.A.C.M., vol. 13, 1966, p. 570-581.