RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

MICHEL CARVALLO

Sur la minimisation d'une expression représentant une famille de fonctions booléennes

RAIRO. Informatique théorique, tome 19, nº 4 (1985), p. 331-336
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1985__19_4_331_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 19, n° 4, 1985, p. 331 à 336)

SUR LA MINIMISATION D'UNE EXPRESSION REPRÉSENTANT UNE FAMILLE DE FONCTIONS BOOLÉENNES (*)

par Michel CARVALLO [1]

Communiqué par J.-E. PIN

Résumé. — *Sur les formes générales à paramètres indépendants d'une famille donnée d'expressions booléennes.*

Abstract. — *On the general forms with independant parameters of a given family of Boolean expressions.*

I. INTRODUCTION

Soit $\mathcal{F}=\{f_1, \ldots, f_N\}$ une famille de fonctions booléennes; en vue de certaines applications, il peut être intéressant d'en donner une représentation sous forme d'une formule unique mais dépendant de paramètres booléens supplémentaires, de façon qu'en parcourant l'ensemble de leurs valeurs, on parcourt la famille des fonctions.

II. FORMULATION DU PROBLÈME

En symboles, et sans perte de généralité, le problème revient à trouver une fonction booléenne φ de $n+p$ variables $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)$ telle qu'à chaque affectation des u_i corresponde l'une des fonctions f_j et réciproquement. (n représente le nombre maximum des variables des f_j et p le nombre de paramètres.)

(*) Reçu février 1984, révisé février 1985.
[1] Professeur à l'Université de Bretagne occidentale, Laboratoire de Logique appliquée, Université de Bretagne occidentale, 6, avenue Le Gorgeu, 29287 Brest Cedex.

Si l'on cherche une fonction φ aussi compacte que possible, selon certains critères, on est donc ramené à *un problème de minimisation de fonctions booléennes.*

Dans cette note, nous montrons que le problème ci-dessus admet une solution optimale avec $p=[\mathrm{Log}_2 N]$, si le critère retenu est le nombre de paramètres.

A. Inégalité $p \geqq [\mathrm{Log}_2 N]$

Celle-ci est immédiate puisque le problème consiste à « coder » la famille $\mathscr{F}$ et que p états binaires décrivent au plus un ensemble de 2^p éléments et qu'ainsi $N \leqq 2^p$.

B. Inégalité $p \leqq [\mathrm{Log}_2 N]$

Il est tout aussi évident que, puisque p états binaires permettent effectivement de décrire 2^p éléments, p états permettent *a fortiori* d'en décrire N tel que $N \leqq 2^p$.

III. MISE EN ŒUVRE D'UN ALGORITHME

Ce qui précède s'applique évidemment à *toute famille d'ensembles* mais dans la suite nous exploitons effectivement la nature de $\mathscr{F}$, famille de *fonctions booléennes.*

Nous considérons une fonction booléenne de n variables, comme l'ensemble des points de l'hypercube $\mathscr{Q}_n$ en lesquels elle prend la valeur 1 où $\mathscr{Q}_n$ est l'hypercube de dimension n.

On peut ainsi représenter $\mathscr{F}$ par une « matrice d'incidence » $\mathscr{I}$ de N lignes et 2^n colonnes.

Soient alors :

— $\mathscr{F}'$ une famille déduite de $\mathscr{F}$ en répétant certains de ses éléments afin que $\mathscr{F}'$ possède 2^p éléments et $\mathscr{I}'$ la matrice correspondante;

— $\mathscr{X}$ le vecteur colonne de longueur 2^n des 2^n points de $\mathscr{Q}_n$ (chacun de ces points s'écrit comme le produit des n variables complémentées ou non, ce qui permet de le considérer comme une fonction booléenne);

— $\mathscr{P}$ le vecteur associé de même aux p paramètres.

Les lignes de la matrice $\mathscr{I}\mathscr{X}$ sont les éléments f_j de $\mathscr{F}$.

De façon évidente on peut choisir :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p) = \mathscr{P}^t \mathscr{I} \mathscr{X} \qquad \text{avec} \quad \mathscr{P}^t = \text{transposé de } \mathscr{P},$$

si $N=2^p$ *et* $\varphi(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_p)=\mathscr{P}^t \mathscr{I}' \mathscr{X}$, si $N<2^p$.

IV. EXEMPLES

1. $N=2$

Soit la famille des deux opérateurs de Schaeffer :

$$f_1 = x \mid y = \bar{x} + \bar{y},$$
$$f_2 = x \downarrow y = \bar{x}\,\bar{y}.$$

On a :

$$\mathscr{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ x & \bar{y} \\ \bar{x} & y \\ \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{P} = \begin{bmatrix} u \\ \bar{u} \end{bmatrix}.$$

On a donc :

$$\varphi = [u \quad \bar{u}] \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathscr{X},$$
$$\varphi = [0 \quad u \quad u \quad u \quad 1]\, \mathscr{X},$$
$$\varphi(x, y, u) = u(x\bar{y} + \bar{x}y) + \bar{x}\bar{y},$$

ou sous forme simplifiée :

$$\varphi(x, y, u) = u\,(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{x}\bar{y}.$$

Ce résultat était prévisible car dans le cas $N=2$, on a manifestement :

$$\varphi = uf_1 + \bar{u}f_2$$

et si $f_2 \leqq f_1$ (cas de l'exemple), $\varphi = uf_1 + f_2$.

2. $N=4$

Cherchons la forme générale des fonctions booléennes associatives à deux variables effectives, on a [2] :

$$\begin{aligned} f_1 &= x + y, \\ f_2 &= x\bar{y} + \bar{x}y, \\ f_3 &= xy + \bar{x}\bar{y}, \\ f_4 &= xy, \end{aligned} \qquad \mathscr{X} = \begin{bmatrix} x & y \\ x & \bar{y} \\ \bar{x} & y \\ \bar{x} & \bar{y} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathscr{P} = \begin{bmatrix} u & v \\ u & \bar{v} \\ \bar{u} & v \\ \bar{u} & \bar{v} \end{bmatrix}$$

donc :

$$\varphi\ (x,\ y,\ u,\ v)=[\bar{u}+v,\ u,\ u,\ \bar{u}\ v]\ \mathscr{X}.$$

Tous les monômes du développement de φ sont premiers, nous avons obtenu d'emblée une forme normale première :

$$\varphi\ (x,\ y,\ u,\ v)=x\ y\ \bar{u}+x\ y\ v+x\ \bar{y}\ u+\bar{x}\ y\ u+\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{u}\ v$$

($x y v$ peut être remplacé par $x u v$ ou $y u v$, les autres monômes sont « centraux » [1]).

3. $N<2^p$

Cherchons la forme générale des fonctions booléennes transitives à deux variables effectives [1].

$N=7$, $p=3$, on a :

$$\begin{aligned} f_1&=x\,y,\\ f_2&=x\,\bar{y},\\ f_3&=x+\bar{y},\\ f_4&=x\,y+\bar{x}\,\bar{y},\\ f_5&=\bar{x}+y,\\ f_6&=\bar{x}\,y,\\ f_7&=\bar{x}\,\bar{y}, \end{aligned}\qquad \mathscr{P}=\begin{bmatrix} u & v & w\\ u & v & \bar{w}\\ u & \bar{v} & w\\ u & \bar{v} & \bar{w}\\ \bar{u} & v & w\\ \bar{u} & v & \bar{w}\\ \bar{u} & \bar{v} & w\\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \end{bmatrix},$$

$$\mathscr{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\qquad \mathscr{I}'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\mathscr{I}'$ a été choisie à partir de $\mathscr{I}$ par répétition de la ligne médiane 1001.

Nous obtenons, après simplification de $\mathscr{P}^t\,\mathscr{I}'$, la forme normale disjonctive :

$$\varphi=[u\ w+u\ \bar{v}+\bar{u}\ v,\ u\ v\ \bar{w}+u\ \bar{v}\ w,\ \bar{u}\ v\ \bar{w}+\bar{u}\ \bar{v}\ w,\ \bar{u}\ \bar{w}+u\ \bar{v}+\bar{u}\ v]\ \mathscr{X},$$

ou encore après utilisation de la méthode de Quine, [3, 4], une forme normale première minimale :

$$\varphi(x, y, u, v, w) = \underline{\bar{x}\, y\, \bar{u}\, \bar{v}\, w} + \underline{x\, \bar{y}\, u\, v\, \bar{w}} + x\, y\, v\, w + \underline{x\, y\, u\, \bar{v}}$$
$$+ x\, u\, \bar{v}\, w + y\, \bar{u}\, v\, \bar{w} + \bar{x}\, \bar{y}\, u\, \bar{v} + \underline{\bar{x}\, \bar{y}\, \bar{u}\, v} + \bar{x}\, \bar{y}\, \bar{v}\, \bar{w}.$$

Nous avons souligné les implicants premiers centraux [1].

V. PROBLÈMES POSÉS PAR CETTE ÉTUDE

L'écriture de $\varphi = \mathscr{P}^t \mathscr{I} \mathscr{X}$ laisse deux degrés de liberté :

– le choix de l'ordre retenu pour les f_j;

– le choix des fonctions à répéter pour passer de $\mathscr{I}$ à $\mathscr{I}'$.

Fixons l'écriture de $\mathscr{X}$ et $\mathscr{P}$ conformément aux exemples cités.

1. Cas $N = 2^p$

Seul nous intéresse l'ordre des f_j, c'est-à-dire l'ordre des lignes de $\mathscr{I}$. Nous cherchons à simplifier l'écriture de $\mathscr{P}^t \mathscr{I}$, il existe $N!$ expressions de $\mathscr{I}$. On peut raisonnablement se fixer des critères de simplicité tels que : écriture de $\mathscr{P}^t \mathscr{I}$ comportant le minimum de lettres (exemple IV. 1) ou le minimum de négations, ou respectant la symétrie du problème proposé. C'est ce dernier critère que nous avons voulu respecter dans l'exemple (IV. 2), il se trouve que les deux autres critères sont aussi respectés par ce choix. D'une façon générale, hormis le cas de symétrie, la recherche de la « meilleure » écriture de φ demande l'étude exhaustive des $N!$ permutations des lignes de $\mathscr{I}$.

2. Cas $N < 2^p$

Si l'on veut éviter l'étude exhaustive, on peut choisir de répéter dans $\mathscr{I}'$ les lignes de $\mathscr{I}$ comportant le nombre maximal de 0, mais cette méthode, si elle simplifie le calcul, ne simplifie pas nécessairement la forme canonique. Dans l'exemple (IV. 3) nous avons d'abord respecté la symétrie du problème dans l'ordre des f_j puis nous avons conservé le caractère de symétrie en répétant la ligne médiane f_4.

Dans les exemples traités, nous avons choisi les matrices $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$ de façon que les éléments symétriques par rapport aux centres des matrices soient tous deux à deux, complémentaires (IV. 1; IV. 2) ou égaux (IV. 3), ce qui réduit le nombre de choix. Ainsi $\mathscr{I}'$ est parfaitement déterminée à partir de $\mathscr{I}$ dans (IV. 3).

VI. CONCLUSION

Le choix de la solution optimale par rapport à des critères précis n'est pas *a priori* déterminé, on peut toutefois tenir compte de la symétrie éventuelle des données ou alléger les calculs par le choix de $\mathscr{I}'$ à grand nombre de zéros. Selon l'application en vue, on peut préférer la forme canonique où la matrice des paramètres est simplifiée ou la forme normale première à $n+p$ variables la plus courte.

La simplicité de l'algorithme suivi de la recherche classique des formes normales premières des solutions, méthode de Quine [3, 4], laisse prévoir un traitement possible par ordinateur.

Une fois les matrices $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$ choisies, il est inutile de simplifier $\mathscr{P}^t \mathscr{I}'$, il convient au contraire pour employer la méthode de Quine de conserver l'écriture complète matricielle [1].

Mais la forme canonique la plus simple $\mathscr{P}^t \mathscr{I}' \mathscr{X}$ n'aboutit pas nécessairement à la forme normale première φ la plus courte.

En résumé, dans l'état actuel de notre recherche de $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_p)$, nous obtenons successivement :

1. la minimisation du nombre p de paramètres;

2. l'allègement éventuel du calcul d'une forme canonique par un bon choix de $\mathscr{I}$ et $\mathscr{I}'$;

3. la minimisation de l'écriture de la forme normale correspondant à cette forme canonique.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Carvallo, *Monographie des treillis et algèbre de Boole*, Gauthier Villars, Paris, 1962, 2e éd., 1966.
2. M. Carvallo, *Principes et applications de l'analyse booléenne*, Gauthier Villars, Paris, 1965, 2e éd., 1970.
3. R. Faure, A. Kaufmann et M. Denis Papin, *Cours de calcul booléen*, Albin Michel, Paris, 1963.
4. J. Kuntzmann, *Algèbre de Boole*, Dunod, Paris, 1965.