RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

PIERRE LESCANNE

Modèles non déterministes de types abstraits

RAIRO. Informatique théorique, tome 16, nº 3 (1982), p. 225-244
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1982__16_3_225_0>

© AFCET, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 16, n° 3, 1982, p. 225 à 244)

MODÈLES NON DÉTERMINISTES DE TYPES ABSTRAITS (*)

par Pierre LESCANNE [1]

Communiqué par J. F. PERROT

Abstract. — *The identities which are stable for power extensions of heterogeneous algebras are characterized by linearity and regularity properties. These results are used to study nondeterministic models of abstract data types and the identities they satisfy. They constitute an adequate framework for the study of algebraic sets in heterogeneous algebras.*

Résumé. — *Les identités stables pour les extensions ensemblistes d'algèbres hétérogènes sont caractérisées à l'aide des propriétés de linéarité et de régularité. On applique cela aux modèles non déterministes de types abstraits et aux identités qu'ils satisfont et on définit les variétés d'algèbres stables pour les extensions ensemblistes. Elles constituent un cadre adéquat pour l'étude des ensembles algébriques dans des algèbres hétérogènes.*

1. INTRODUCTION

Classiquement, les modèles de types abstraits ne comportent que des opérations déterministes, autrement dit, des opérations qui à un uple de valeurs font correspondre au plus une valeur. Supposons que nous voulions accepter des modèles où certaines des opérations puissent être non déterministes, c'est-à-dire où certaines opérations, quand elles sont appliquées à un uple de valeurs, puissent rendre une ou plusieurs valeurs ou même pas du tout. C'est le cas par exemple des itérateurs en CLU [19]. Ainsi, puisque certaines opérations peuvent produire un ensemble de résultats et du fait que les opérations sont amenées à se composer, il faut étudier comment se comportent les structures algébriques et les identités, quand on passe des opérations définies sur les uples d'éléments aux opérations définies sur les uples d'ensembles. Ce genre de modèles de types abstraits ou si l'on préfère d'implantations de types abstraits avec opérations non déterministes, intervient particulièrement dans les bases de données, où les requêtes sont souvent des opérations non déterministes, de la forme « un des... »

[1] Centre de Recherche en Informatique de Nancy, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy, France et Laboratory for Computer Science, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts 02139, U.S.A.

(*) Reçu en juin 1980, revisé en novembre 1981.

© AFCET-Bordas-Dunod

ou « choisir ». L'objectif de cet article est de caractériser les axiomes licites dans les types abstraits admettant de tels modèles non déterministes. Cette caractérisation se fait à l'aide des propriétés de *linéarité* (c'est-à-dire au plus une occurrence de chaque variable dans chaque membre) et de *régularité* (c'est-à-dire mêmes ensembles de variables dans chaque membre). Ces propriétés qui s'énoncent bien dans le cas des algèbres homogènes (*cf.* par exemple [5]) demandent d'être approfondies dans le cas des algèbres hétérogènes.

Une autre motivation pour cette étude peut être toute différente. On peut, en effet, vouloir faire sur les algèbres hétérogènes une théorie similaire à la théorie des langages sur le monoïde libre, c'est-à-dire pouvoir définir des ensembles algébriques, plus petits points fixes d'un système d'équations. L'auteur [17] a montré l'intérêt d'une telle approche notamment pour étudier les langages ou ensembles de mots, l'ensemble de tous les mots étant muni de différentes structures algébriques. Pour fonder une telle théorie, il faut être capable d'étendre les opérations à l'ensemble des parties, et s'assurer que ces extensions vérifient les mêmes identités, comme c'est le cas dans les monoïdes. Il y aura ainsi des classes d'algèbres dans lesquelles l'extension sera possible et d'autres où elle ne le sera pas. Nous esquissons dans la section 7, les premiers éléments d'une théorie des ensembles algébriques dans les algèbres hétérogènes.

Dans [3], Benson a distingué deux façons d'envisager les « choix » des valeurs des paramètres dans le calcul des fonctions récursives non déterministes, à savoir le *choix à l'appel* ou le *choix à l'exécution*. Il signale que ces deux méthodes donnent en général des résultats différents, qui dépendent des règles d'évaluation de l'arbre de calcul, autrement dit des axiomes du type abstrait dans lequel on travaille. Dans cet article, nous donnons des propriétés de ces axiomes pour lesquels ces deux méthodes de calcul donnent les mêmes résultats.

2. ÉTUDE D'EXEMPLES

Avant de passer à des résultats théoriques, nous allons citer quelques exemples et étudier la manière de « calculer » sur les ensembles de parties.

2.1. Les groupes

Considérons les groupes définis comme un type abstrait (*fig.* 1). Soit $\mathfrak{G} = \langle G; \bullet, {}^{-1}, E \rangle$ un groupe. Posons :

$$H \overline{\bullet} K = \{ h \bullet k \mid h \in H \text{ et } k \in K \},$$

$$\overline{E} = \{ E \},$$

$$H^{\overline{-1}} = \{ h^{-1} \mid h \in H \},$$

On sait que $\langle \mathscr{P}(G); \overline{\bullet}, \overline{^{-1}}, \overline{E} \rangle$ et $\langle \mathscr{P}(G) - \{\emptyset\}; \overline{\bullet}, \overline{^{-1}}, \overline{E} \rangle$ ne sont pas des groupes si $G \neq \{E\}$. Certes $\overline{\bullet}$ est associative et $\overline{E}$ est bien un élément neutre de $\overline{\bullet}$, mais on sait que si H est le support d'un sous-groupe non-trivial de $\mathfrak{C}$ alors :

$$H \overline{\bullet} H^{\overline{-1}} = H \neq \{E\} = \overline{E}.$$

Comme nous le verrons plus loin, l'équation $x \bullet x^{-1} = = x$ entre dans un cadre général d'équations qui ne se conservent pas par extension à l'ensemble des parties, en effet, elles contiennent deux occurrences de x alors que, pour pouvoir se conserver elle devrait n'en avoir qu'une. Par contre, les deux premières équations s'étendent bien à l'ensemble des parties et font de $\langle \mathscr{P}(G); \overline{\bullet}, \overline{E} \rangle$ et $\langle \mathscr{P}(G) - \{\emptyset\}; \overline{\bullet}, \overline{E} \rangle$ un monoïde.

2.2. Les algèbres linéaires et les listes à double entrée

Dans [17], l'auteur a étudié un type abstrait, autrement dit une variété d'algèbres hétérogènes, appelées algèbres linéaires. Ces algèbres interviennent dans l'étude des langages linéaires d'où elles tirent leur nom. Ici nous proposons deux axiomatisations : l'une formalise les algèbres avec opérations unaires que nous appelons algèbres linéaires, l'autre constitue la spécification du type abstrait *file à double entrée* ou *deque*, pour *double-ended-queue* comme le nomme Knuth [16] (nous proposons de l'orthographier *deux-queues*). Elles seront présentées ensemble car elles ont des similitudes. Notons que ces algèbres linéaires n'ont aucun rapport avec l'étude des espaces vectoriels, mais plutôt avec le concept de linéarité telle que les théoriciens des langages l'utilisent. Ce concept se rapproche de celui que nous utilisons plus loin et que nous avons emprunté à la littérature sur les extensions ensemblistes d'algèbres et sur les systèmes de réécriture, mais il a un contenu légèrement différent : en théorie des langages la linéarité signifie qu'il y a une occurrence unique d'une variable au plus, dans les autres théories elle signifie qu'il y a une occurrence au plus de chaque variable. Ceci étant précisé, les algèbres linéaires ont été choisies afin de montrer un exemple très simple, sur lequel notre théorie peut s'appliquer.

Figure 1. — Les groupes comme un type abstrait.

Type *Groupe* :
  Opérations :
    Groupe • *Groupe* → *Groupe*,
    Groupe^{-1} → *Groupe*,
    E → *Groupe*.
  Axiomes:
    $(x \bullet y) \bullet z = = x \bullet (y \bullet z)$,
    $E \bullet x = = x$,
    $x^{-1} \bullet x = = E$.

2.2.1. *Les algèbres linéaires*

Les algèbres linéaires sont des algèbres munies d'une constante ou opération nullaire notée VIDE, de ν opérations unaires notées A, B, . . . , et de ν opéra-tions unaires, associées aux précédentes, notées $\overline{A}$, $\overline{B}$, . . . , avec les axiomes suivants :

$$A(\mathrm{VID}) = = \overline{A}(\mathrm{VID}),$$

pour tous les opérateurs A et :

$$A(\overline{B}(x)) = = \overline{B}(A(x)),$$

pour toutes les combinaisons d'opérations A et B. Les premières équations ne contiennent pas de variables, les secondes contiennent une occurrence de x dans chaque membre. Ainsi, comme nous le prouverons, l'extension d'une algèbre linéaire à l'ensemble de ses parties est encore une algèbre linéaire.

2.2.2. *Les listes à double entrée*

Ici les opérations sont constituées d'un symbole nullaire,

$$\mathrm{VID} \rightarrow \textit{Deux-queues}$$

d'une opération externe à gauche,

$$\textit{Alph} \circ \textit{Deux-queues} \rightarrow \textit{Deux-queues},$$

et d'une opération externe à droite,

$$\textit{Deux-queues} \bullet \textit{Alph} \rightarrow \textit{Deux-queues}.$$

On y adjoint des observateurs

$$\mathrm{GAUCHE}\ (\text{Deux-queues}) \rightarrow \mathrm{Alph},$$

$$\mathrm{DROITE}\ (\textit{Deux-queues}) \rightarrow \textit{Alph}.$$

Les axiomes affirment, d'une part, l'équivalence des opérations externes à droite et à gauche sur VID :

$$a \circ \mathrm{VID} = = \mathrm{VID} \bullet a,$$

d'autre part une forme d'associativité sur les opérations à droite et à gauche,

$$a \circ (x \bullet b) = = (a \circ x) \bullet b,$$

et les propriétés des observateurs,

$$\mathrm{GAUCHE}\ (a \circ x) = = a,$$

$$\mathrm{DROITE}\ (x \bullet b) = = b.$$

On remarquera que les identités ne contiennent qu'une occurrence de chaque variable au plus dans chaque membre, ainsi les identités sont-elles dites linéaires. D'après les équations, on s'aperçoit que l'ordre d'application des opérations est indifférent, une notation :

$$a_1 \circ a_2 \ldots a_n \circ x \bullet b_1 \bullet b_2 \ldots b_m,$$

sans parenthèses en rend bien compte.

2.3. La conditionnelle

Une conditionnelle sur un ensemble est une fonction : SI *Bool* ALORS *Base* SINON *Base* → *Base* qui vérifie les équations :

$$\text{SI VRAI ALORS } x \text{ SINON } y = = x,$$
$$\text{SI FAUX ALORS } x \text{ ALORS } y = = y.$$

On remarquera que si l'on étend la conditionnelle sur les parties de l'ensemble par :

$$\text{Si } b \text{ ALORS } X \text{ SINON } Y \equiv \{ \text{ SI } b \text{ ALORS } x \text{ SINON } y \mid x \in X,\ y \in Y \},$$

les équations ne sont valables que si X et Y ne sont pas vides. En effet, pour Y vide, on a d'une part, par la première identité,

$$\text{SI VRAI ALORS } X \text{ SINON } Y = X,$$

et d'autre part, par la définition de l'extension ensembliste.

$$\text{SI VRAI ALORS } X \text{ SINON } Y = \{ x \mid x \in X,\ y \in \emptyset \} = \emptyset,$$

ce qui est contradictoire.

2.4. Les ensembles

Soit $\mathfrak{E}$ une algèbre du type *ENS*[*Alph*, *Bool*], c'est-à-dire vérifiant les équations de la figure 2. On montrera dans la suite que $\mathfrak{E}'$ est un modèle des mêmes équations, où $\mathfrak{E}'$ est caractérisée par :

$$\mathrm{Ens}_{\mathfrak{E}'} = \mathscr{P}(\mathrm{Ens}_{\mathfrak{E}}) - \{ \emptyset \},$$
$$\mathrm{Alph}_{\mathfrak{E}'} = \mathrm{Alph}_{\mathfrak{E}}$$

et :

$$\mathrm{Bool}_{\mathfrak{E}'} = \mathscr{P}(\mathrm{Bool}_{\mathfrak{E}'}) - \{ \emptyset \}.$$

Figure 2

Type *Ens*[*Alph*] où *Alph* a une opération EQ(*Alph*, *Alph*) :

Opérations :

VIDE → *Ens*,
AJ(*Ens*, *Alph*) → *Ens*,
PR?(*Ens*, *Alph*) → *Bool*.

Axiomes :

PR?(VIDE, *a*) = = FAUX
PR?(AJ(*e*, *a*), *b*) = = SI EQ(*a*, *b*) ALORS VRAI SINON PR?(*e*, *b*)

De plus, les opérations sont définies par :

$\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}'} \equiv \{\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}}\}$,

$\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(E, x) \equiv \{\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}}(e, x) \mid e \in E\}$,

$\mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}'} \equiv \{\mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}}\}$,

$\mathrm{FAUX}_{\mathfrak{E}'} \equiv \{\mathrm{FAUX}_{\mathfrak{E}}\}$,

Si B ALORS X SINON $Y_{\mathfrak{E}'} \equiv \{\text{Si } b \textit{ ALORS } x \text{ SINON } y_{\mathfrak{E}} \mid b \in B, x \in X, y \in Y\}$,

$\mathrm{EQ}_{\mathfrak{E}'} \equiv \mathrm{EQ}_{\mathfrak{E}}$.

Dans l'algèbre initiale (ou une autre) considérons l'ensemble algébrique L des éléments non vide qui ne contiennent qu'un élément donné de $\mathrm{Alph}_{\mathfrak{E}}$ disons A. L est solution de l'équation :

$$L = \mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}'}\,\mathrm{A}) \cup \mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A}), \qquad (\star)$$

autrement dit tout élément de L contient A, en effet utilisons l'équation ($\star$), pour faire un raisonnement point fixe, et les identités pour faire les raisonnements intermédiaires. D'après l'équation :

$$\mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A}) = \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}[\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(\{\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}}\}, \mathrm{A}) \cup \mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A})],$$

et par la définition de l'extension ensembliste,

$$= \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(\{\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}}\}, \mathrm{A}), \mathrm{A}) \cup \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A}), \mathrm{A})$$

par l'équation de PR ?,

$$= \mathrm{SI}\ \mathrm{EQ}_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{A}, \mathrm{A})\ \mathrm{ALORS}\ \mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}'}\ \mathrm{SINON}\ \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(\{\mathrm{VIDE}_{\mathfrak{E}}\}, \mathrm{A})$$

$$\cup\ \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A}), \mathrm{A})$$

or évidemment $\mathrm{EQ}_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}'}$ donc :

$$= \{\mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}}\} \cup \mathrm{PR}\ ?_{\mathfrak{E}'}(\mathrm{AJ}_{\mathfrak{E}'}(L, \mathrm{A}), \mathrm{A})$$

et, comme on n'a utilisé aucune propriété de VIDE, par un calcul exactement similaire au précédent, on obtient :

$$= \{ \mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}} \} \cup \{ \mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}} \} = \{ \mathrm{VRAI}_{\mathfrak{E}} \}.$$

En fait, les équations se comportent bien vis-à-vis de la sorte Ens, la suite de l'exemple montre qu'il n'en est pas de même vis-à-vis de la sorte Alph. Supposons maintenant qu'on introduise une opération non déterministe CHOISIR (*Ens*) → *Alph*. Calculons PR ? (CHOISIR (e, e)) où e = AJ (AJ (VIDE, A), B). Si on fait la preuve en examinant toutes les valeurs possibles de CHOISIR (e), c'est-à-dire A et B, on obtient VRAI. Mais si tout d'abord on réduit

PR ? (CHOISIR (e), e)

en :

SI EQ (EXT (e), B) ALORS VRAI SINON PR ? (AJ (VIDE, A), CHOISIR (e))

et si l'on admet, comme l'y autorise la sémantique de l'appel par choix à l'exécution que nous avons choisie, que CHOISIR (e) n'a pas partout la même valeur dans cette équation, on peut obtenir VRAI ou FAUX. Cela nous conduit directement à étudier les extensions ensemblistes puisque CHOISIR est une opération de Ens → $\mathscr{P}$(Alph).

3. EQUATIONS ET EXTENSIONS

3.1. Équations linéaires et équations linéaires et régulières

Les groupes, les algèbres linéaires, les conditionnelles et les ensembles permettent d'examiner trois familles d'équations. La première est celle des équations *linéaires* dont le paradigme est l'équation de la conditionnelle :

SI VRAI ALORS x SINON $y = = x$.

Elle ne contient qu'une occurrence au plus de chaque variable dans chaque membre, ici x et y seulement à gauche et x à droite.

La deuxième famille est celle des équations *linéaires et régulières* représentée par l'équation :

$$(x \bullet y) \bullet z = = x \bullet (y \bullet z).$$

Ces équations sont linéaires et l'ensemble des variables qui apparaissent à gauche (ici $\{x, y, z\}$) est identique à celui des variables qui apparaissent à droite.

La troisième famille est constituée des autres équations. Leur modèle est l'équation des groupes :

$$x^{-1} \bullet x = = e.$$

Les premières équations s'étendent par passage à l'ensemble des parties non vides, les secondes s'étendent par passage à l'ensemble des parties y compris la vide, les troisièmes ne s'étendent pas en général.

3.2. Présentation informelle des résultats sur les extensions

Tout d'abord, nous définirons les **C** T-extensions qui sont des extensions, à l'ensemble des parties non vides, des opérations des algèbres; ces extensions ne se font pas sur toutes les sortes, mais seulement sur quelques unes qui forment l'ensemble T. Les **P** T-extensions sont des extensions à l'ensemble des parties y compris la partie vide. On aurait pu sous l'hypothèse que T et T′ soient disjoints, définir des **C** T-**P** T′-extensions; cela aurait alourdi inutilement les définitions sans que des exemples en justifient l'introduction. Dans la suite de cet article nous examinons comment des identités vraies dans une algèbre $\mathfrak{A}$ s'étendent à sa **C** T-extension et à sa **P** T-extension. Ces conditions sont :

1. une identité sur $\mathfrak{A}$ est vérifiée sur **C** T $\mathfrak{A}$, si elle est T-linéaire, c'est-à-dire si toute variable de sorte dans T apparaît au plus une fois dans chaque membre.

2. une identité sur $\mathfrak{A}$ est vérifiée sur **P** T **A** si elle est T-linéaire et T-régulière, c'est-à-dire si toute variable qui apparaît dans un membre apparaît une et une seule fois dans l'autre.

Ensuite, nous définissons le concept de système d'équations. Cela nous amène à la notion de plus petit point fixe ou de solution.

4. C-EXTENSION ET P-EXTENSION D'UNE ALGÈBRE

4.1. Ensembles stables de sortes

Soit $\mathfrak{A}$ une F-algèbre hétérogène [2] dont l'ensemble des descripteurs de sortes est S.

DÉFINITION 1 : Une partie T de S est dite F-stable (ou stable s'il n'y a pas d'ambiguité sur F) si pour toute opération $f \in$ F de profil $So_1, \ldots, So_n \to So$, $So \in$ T implique que pour tout $i \in [1 \ldots n]$, $So_i \in$ T. ■

Autrement dit les éléments de So dans T ne sont obtenus qu'à partir d'éléments de So dans T et d'une opération f.

Exemple 1 : Si F est l'ensemble { VID, ∘, •, GAUCHE, DROITE } des algèbres linéaires, seuls les ensembles { *Alph*, *Lin* } et $\emptyset$ sont stables.

Exemple 2 : Dans *Ens*[*Alph*], les ensembles $\emptyset$, $\{ Alph \}$ et $\{ Ens, Bool, Alph \}$ sont stables.

Ensemble 3 : Dans les algèbres homogènes, où il n'y a qu'une seule sorte *So*, $\{ So \}$ et $\emptyset$ sont stables.

4.2. P-extension d'une algèbre

DÉFINITION 2 : Soit $\mathfrak{A}$ une algèbre avec S comme ensemble de descripteurs de sortes et F comme ensemble d'opérations, soit T un ensemble tel que S − T soit F-stable. On appelle **PT**-*extension* une algèbre notée **PT**$\mathfrak{A}$ dont l'ensemble des sortes est :

$$So_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}} = So_{\mathfrak{A}} \qquad \text{si} \quad So \notin \mathrm{T}$$
$$So_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}} = \mathscr{P}(So_{\mathfrak{A}}) \qquad \text{si} \quad So \in \mathrm{T}$$

et l'ensemble des opérations est défini ainsi : pour toute opération f : $So_1, \ldots, So_n \to So$,

$$\mathrm{f}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n) = \{ \mathrm{f}_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) \mid So_i \notin \mathrm{T} \Rightarrow x_i = X_i \text{ et } So_i \in \mathrm{T} \Rightarrow x_i \in X_i \}. \quad \blacksquare$$

Puisque S − T est stable, on remarque que si $\mathrm{f}(So_1, \ldots, So_n) \to So$ avec $So \notin \mathrm{T}$ alors $\mathrm{f}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n) \in So_{\mathfrak{A}}$, ce qui montre que la définition est correcte vis-à-vis des sortes S − T.

Exemple 4 : Dans la section 2.4, $\mathfrak{E}$ est une **P**$\{ Ens, Bool \}$-extension de $\mathfrak{E}$; en effet $\mathrm{S} - \{ Ens, Bool \} = \{ Alph \}$ est stable.

Remarque 1 : Si $\mathrm{T} = \emptyset$, la **PT**-extension obtenue est une fausse extension puisqu'aucune sorte n'est étendue. Dorénavant le lecteur pourra s'imaginer T non vide.

Remarque 2 : On remarque que $\mathrm{f}(X_1, \ldots, X_n) = \emptyset$ si et seulement si il existe $i \in [1 \ldots n]$ tel que $So_i \in \mathrm{T}$ et $X_i = \emptyset$. Cette remarque permet d'introduire la définition 3.

4.3. C-extension d'une algèbre

DÉFINITION 3 : Si S − T est stable, une **CT**-*Extension* de l'algèbre $\mathfrak{A}$ est une algèbre hétérogène **CT**$\mathfrak{A}$ dont les sortes sont :

$$So_{\mathrm{CT}\mathfrak{A}} = So_{\mathfrak{A}} \qquad \text{si} \quad So \notin \mathrm{T}$$
$$So_{\mathrm{CT}\mathfrak{A}} = \mathscr{P}(So_{\mathfrak{A}}) - \{ \emptyset \} \qquad \text{si} \quad So \in \mathrm{T}$$

et où f est défini comme dans les **PT**-extensions, compte-tenu de la remarque 2 ci-dessus, cela est bien correct. ■

Remarque 3, *Convention de notation* : Quand w appartient à $P(F, X_\omega)$ c'est-à-dire que w est un terme sur F et $X_\omega = \{ X_{\omega, s} \mid s \in S \}$ (les notations sont empruntés à Gratzer [12]) w sera plus souvent noté $w(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_1, \ldots, x_n$ appartiennent à $\bigcup_{s \in S} X_{\omega, s}$. Dans la suite, nous conviendrons que S est l'ensemble des sortes, T le sous-ensemble de S sur lequel se fait l'extension et que tout mot w sera noté $w(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$, avec $x_1, \ldots, x_m$ tous différents appartenant à $\bigcup_{s \in T} X_{\omega, s}$ et $y_1, \ldots, y_p$ tous différents appartenant à $\bigcup_{s \notin T} X_{\omega, s}$.

5. PROLONGEMENT DES IDENTITÉS ET VARIÉTÉS C-STABLES

Le problème qui se pose est le suivant : si $\underline{E}$ est une famille d'identités, si $\mathfrak{A}$ est une algèbre hétérogène totale modèle de $\underline{E}$, dans quel cas $CT\mathfrak{A}$ est-elle un modèle de $\underline{E}$? Dans la section suivante on se posera la même question pour les **P**-extensions. Pour cela, nous avons besoin de définir la linéarité dans le cas des algèbres hétérogènes. Auparavant, nous allons définir le concept de nombre d'occurrences comme un morphisme d'algèbres.

DÉFINITION 4, *Nombre d'occurrences* : Soit $\mathfrak{P}(F, X_\omega)$ l'algèbre hétérogène libre des termes sur F et X_ω, considérons l'algèbre $\mathfrak{R} = \langle N, F_\mathfrak{R} \rangle$ définie ainsi $N = (\mathbf{N})_{s \in S}$ où **N** est l'ensemble des entiers naturels, et si $f(So_1, \ldots, So_n) \to So$ alors $f_\mathfrak{R}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, par conséquent, si $g(\ ) \to So$ alors $g_\mathfrak{R} = 0$. Les applications $\sigma_i^s(X_{\omega, s}) \to \mathbf{N}$ telle que $\sigma_i^s(x_i^s) = 1$ et $\sigma_i^s(x_j^s) = 0$ si $i \neq j$ se prolongent en un unique morphisme oc : $\mathfrak{P}(F, X_\omega) \to \mathfrak{R}$. $oc_i^s(w)$ s'appelle le *nombre d'occurrences* de x_i^s dans w. ■

DÉFINITION 5, *Linéarité* : Un mot est T-*linéaire* si pour tout $i \in \mathbf{N}$ et pour tout $s \in T$, $oc_i^s(w) \leq 1$, autrement dit chaque variable de $X_{\omega, s}$, où $s \in T$, a au plus une occurrence dans w. ■

DÉFINITION 6 : Une identité est T-*linéaire* si v et w sont T-linéaires ■

Exemple 5, *Cas du type abstrait Ens* [*Alph*] : Considérons l'identité,

$$PR\,?(AJ(e, a), b) = = SI\ EQ(a, b)\ \text{ALORS VRAI SINON}\ PR\,?(e, b)$$

elle est T-linéaire si T ne contient pas *Alph*, en effet *b* apparaît deux fois dans le membre droit. ■

Le *support* d'un mot est l'ensemble des variables efficaces de ce mot, c'est-à-dire l'ensemble des variables qui apparaissent dans la décomposition du mot en ses opérations élémentaires,

$$\Gamma(\mathrm{w}) = \{ \mathrm{x} \in \bigcup_{s \in \mathrm{S}} X_{\omega, s} \mid \mathrm{oc}_i^s(\mathrm{w}) > 0 \}.$$

Remarque 4 : Si l'on écrit w $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p\}$ on suppose que $\Gamma(\mathrm{w}) \subseteq \{ x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p \}$.

DÉFINITION 7, *Complexité d'un mot comme un morphisme d'algèbres* : La complexité d'un mot est défini en terme d'un unique morphisme vers une algèbre particulière. Considérons l'algèbre $\mathfrak{C} = \langle \mathrm{C}, \mathrm{F}_{\mathfrak{C}} \rangle$ où $\mathrm{C} = (\mathbf{N})_{s \in \mathrm{S}}$ et pour chaque $f_{\mathfrak{C}}(x_1, \ldots, x_n) = 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$. Soit $c_s : X_{\omega, s} \to \mathbf{N}$ tel que $c_s(x) = 0$ pour $x \in X_{\omega, s}$, alors l'unique morphisme de $\mathfrak{P}(\mathrm{F}, X_\omega)$ vers $\mathfrak{C}$ prolongeant c est noté comp. comp(w) s'appelle la *complexité* de w, son utilisation est fondamentale dans les preuves par récurrence. ■

LEMME 1 : *Si* $\mathrm{w} = \mathrm{f}(\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_n) \in \mathrm{P}(\mathrm{F}, X_\omega)$ *et si* w *est* T-*linéaire alors* $k \neq h$ *impliquent*

$$\Gamma(\mathrm{w}_k) \cap \Gamma(\mathrm{w}_k) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s} = \emptyset.$$

Démonstration : évidente. ■

LEMME 2 : *Si* S' *est* F-*stable, si* w *appartient aux termes de* $\mathrm{s}_{\mathfrak{P}(\mathrm{F}, X_\omega)}$ *pour* $\mathrm{s}' \in \mathrm{S}'$ *alors* $\Gamma(\mathrm{w})$ *est inclus dans* $\bigcup_{s \in \mathrm{S}'} X_{\omega, s}$.

Démonstration : évidente. ■

PROPOSITION 1 : *Si* w *est* T-*linéaire alors*

$$\begin{aligned} &\mathrm{w}_{\mathrm{CT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) \\ &= \{ \mathrm{w}_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \mid \forall i \in [1 \ldots n], x_i \in X_i \} \end{aligned}$$

Démonstration : Si comp(w) = 0 et $\mathrm{w} = x_i^s$ alors dans l'algèbre $\mathbf{CT}\mathfrak{A}$, $\mathrm{w}_{\mathrm{CT}\mathfrak{A}}$ représente la i-ième projection proj_i^s sur la sorte $\mathfrak{A}_s$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathrm{w}_{\mathrm{CT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) &= X_j \\ &= \{ \mathrm{proj}_i^s(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) \mid \forall i \in [1 \ldots n], x_i \in X_i \} \end{aligned}$$

(où $x_j = x_i^s = \mathrm{proj}_i^s(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$). La deuxième égalité provient du fait que X_i n'est pas vide.

Si comp(w) > 0 et $w = f(w_1, \ldots, w_m)$, montrons que si z appartient au membre gauche, il appartient au membre droit et réciproquement. En effet,

$$z \in w_{CT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p)$$

si et seulement si

$$z \in f_{CT\mathfrak{A}}(w_{CT\mathfrak{A},1}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p), \ldots, w_{CT\mathfrak{A},m}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p)$$

si et seulement si

$$\exists (z_1, \ldots, z_m), \quad z = f_{\mathfrak{A}}(z_1, \ldots, z_m)$$

et

$$\forall i \in [1 \ldots m]\, z_i \in w_{CT\mathfrak{A},i}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p).$$

Par l'hypothèse de récurrence cela est équivalent à

$$\exists (z_1, \ldots, z_m), \quad z = f_{\mathfrak{A}}(z_1, \ldots, z_m) \quad \text{et} \quad \forall i \in [1 \ldots m],$$
$$\exists (x_1, \ldots, x_n), \quad z_i = w_{\mathfrak{A},i}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$
$$\text{et} \quad \forall j \in [1 \ldots n], \quad x_j \in X_j.$$

Puisque w est T-linéaire, d'après le lemme 1, si k est différent de h et si une variable x_j apparaît dans w_k, elle n'apparaît pas dans w_h, autrement dit on peut intervertir $\forall \in i[1 \ldots m]$ et $\exists (x_1, \ldots, x_n)$, c'est-à-dire que chaque choix de x_j n'est fait qu'une fois pour toutes les composantes, il est donc indépendant de la composante i de f. La dernière assertion ci-dessus est équivalente à

$$\exists (z_1, \ldots, z_m), \quad z = f_{\mathfrak{A}}(z_1, \ldots, z_m) \quad \text{et} \quad \exists (x_1, \ldots, x_n),$$
$$\forall i \in [1 \ldots m], \quad z_i = w_{\mathfrak{A},i}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$
$$\text{et} \quad \forall j \in [1 \ldots n], \quad x_j \in X_j$$

qui est équivalente à

$$\exists (x_1, \ldots, x_n), \quad \exists (z_1, \ldots, z_m), \quad z = f_{\mathfrak{A}}(z_1, \ldots, z_m)$$
$$\text{et}$$
$$\forall i \in [1 \ldots m]\, z_i = w_{\mathfrak{A},i}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p) \quad \text{et} \quad \forall j \in [1, \ldots, n], \quad x_j \in X_j$$

qui est équivalente à

$$\exists (x_1, \ldots, x_n), \quad z = w_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \quad \text{et} \quad \forall j \in [1, \ldots, n], \quad x_j \in X_j$$

c'est-à-dire

$$z \in \{ w_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \mid \forall j \in [1 \ldots n], x_j \in X_j \}. \quad \blacksquare$$

La proposition 1 est liée aux propriétés de confluence [14] ou de Church Rosser [22]. Si w est T-linéaire, la valeur de w dans $\mathbf{CT}\mathfrak{A}$ est indépendante de la manière dont on la calcule, qu'on calcule cette valeur en parallèle, point par point, et qu'on fasse la réunion des résultats obtenus ou qu'on calcule cette valeur sur les ensembles, on trouve le même résultat. En d'autres termes aussi, elle établit sous quelle condition le choix à l'appel coïncide avec le choix à l'exécution au sens de Benson. Comme le remarque Shafaat [23] dans le cas des algèbres homogènes, elle est à la base des résultats qui vont suivre sur les variétés C-stables.

THÉORÈME 1 : *Si* $v == w$ *est une identité* T-*linéaire, si* $v_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{A}}$ *alors* $v_{CT_{\mathfrak{A}}} = w_{CT_{\mathfrak{A}}}$.

Démonstration : D'après la proposition 1,

$$v_{CT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = \{ v_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p \mid x_i \in X_i \text{ pour } i \in [1 \ldots n] \}$$

et

$$w_{CT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = \{ w_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots x_n; y_1, \ldots, y_p \mid x_i \in X_i \text{ pour } i \in [1 \ldots n] \}$$

et puisque pour chaque $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$v_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = w_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p)$$

alors

$$v_{CT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = w_{CT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p). \quad \blacksquare$$

DÉFINITION 8 : Une variété **V** d'algèbres hétérogène est **CT**-stable si pour toute algèbre $\mathfrak{A}$ de **V**, $\mathbf{CT}\mathfrak{A}$ est une algèbre de **V**. ■

COROLLAIRE : *Soit* $\underline{E}$ *une famille d'identités* T-*linéaires alors la variété des algèbres modèles de* $\underline{E}$ *est* **CT**-*stable.*

Démonstration : Soit $\mathfrak{A}$ un modèle de $\underline{E}$, alors pour toute identité $v == w$ de $\underline{E}$ on a $v_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{A}}$ donc puisque l'identité est linéaire $v_{CT\mathfrak{A}} = w_{CT\mathfrak{A}}$ donc $\mathbf{CT}\mathfrak{A}$ est un modèle de $\underline{E}$. ■

6. VARIÉTÉS P-STABLES

Nous étudions dans ce paragraphe, le problème du prolongement des identités d'une algèbre, à la **P**-extension.

PROPOSITION 2 : *Si* w *est* T-*linéaire et si* $\Gamma(\mathrm{w}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *alors :*

$$\mathrm{w}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = \{\mathrm{w}\ (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \mid \forall i \in [1 \ldots n],\ x_i \in X_i\}.$$

Démonstration : Si pour tout $i \in [1 \ldots n]$ $X_i \neq \emptyset$, alors le résultat est vrai, d'après la proposition 1. Si l'un des X_i est vide, le deuxième membre de l'égalité est vide. Il reste à montrer qu'alors $\mathrm{w}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p)$ est vide. En effet par récurrence, si $\mathrm{w} = x_i^s$ alors $n = 1$ et $X_1 = \emptyset$ ainsi $\mathrm{w}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(X_1; \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = X_1 = \emptyset$. Si $\mathrm{comp}(\mathrm{w}) > 0$, alors $\mathrm{w} = \mathrm{f}(\mathrm{w}_1, \ldots, \mathrm{w}_m)$ et $\Gamma(\mathrm{w}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s} = \bigcup_{j=1}^{m} \Gamma(\mathrm{w}_j) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s}$. Soit j tel que $x_i \in \Gamma(\mathrm{w}_j)$ alors w_j se met sous la forme $\mathrm{w}_j(x'_1, \ldots, x'_q; y_1, \ldots, y_p)$ où $\{x'_1, \ldots, x'_q\} = \Gamma(\mathrm{w}_j) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s}$ alors $\mathrm{w}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}, j}$ prend la valeur $\emptyset$ sur les valeurs $X'_1, \ldots, X'_q$ qui sont des composantes du vecteur $X_1, \ldots, X_n$ et ainsi $\mathrm{f}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(\ldots, w_j(X'_1, \ldots, X'_q; y_1, \ldots, y_p), \ldots) = \emptyset$. ■

Nous définissons la régularité dans le cas des algèbres hétérogènes.

DÉFINITION 9 : Une identité $\mathrm{v} = = \mathrm{w}$ est T-régulière si $\Gamma(\mathrm{v}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s} = \Gamma(\mathrm{w}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s}$.

Exemple 6 : L'équation PR ?(VIDE, e) = = FAUX n'est pas $\{Alph\}$-régulière.

THÉORÈME 2 : Si $\mathrm{v} = \mathrm{w}$ est une identité T-linéaire et T-régulière et si $\mathrm{v}_{\mathfrak{A}} = \mathrm{w}_{\mathfrak{A}}$ alors $\mathrm{v}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}} = \mathrm{w}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}$.

Démonstration : Puisque $\Gamma(\mathrm{v}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s} = \Gamma(\mathrm{w}) \cap \bigcup_{s \in \mathrm{T}} X_{\omega, s}$, d'après la proposition 2,

$$\mathrm{v}_{\mathrm{PT}\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = \{\mathrm{v}_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \mid x_i \in X_i \text{ pour } i \in [1 \ldots n]\}$$

et de même pour w

$$w_{PT\mathfrak{A}}(X_1, \ldots, X_n; y_1, \ldots, y_p) = \{ w_{\mathfrak{A}}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) \mid x_i \in X_i \text{ pour } i \in [1 \ldots n] \}$$

ainsi puisque $v_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{A}}$ on a $v_{PT\mathfrak{A}} = w_{PT\mathfrak{A}}$. ■

DÉFINITION 10 : Une variété **V** est **PT**-stable si pour toute algèbre $\mathfrak{A}$ de **V**, **PT** $\mathfrak{A}$ appartient à **V**.

COROLLAIRE : *Si* $\underline{E}$ *est une famille d'identités* T-*linéaires et* T-*régulières alors la variété des algèbres modèles de* $\underline{E}$ *est* **PT**-*stable.*

7. LES ENSEMBLES ALGÉBRIQUES

Dans ce paragraphe, nous nous placerons dans une variété **CT**-stable, notée **V**. Soit $\mathbf{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un sous-ensemble fini de $\bigcup_{s \in T} X_{\omega, s}$. Un système d'équations est une application E qui à chaque variable x_i fait correspondre un ensemble fini de polynômes ou classes d'équivalence de termes, noté $E[x_i]$, et inclus dans $P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_s$, c'est-à-dire dans l'ensemble des termes de la sorte s, si x_i appartient à $X_{\omega, s}$ (pour être cohérent nous devrions la noter $s_{\mathfrak{P}(\mathbf{V}, \mathbf{X})}$).

Exemple 7 : Dans la variété des algèbres linéaires,

$$x = A(A(\overline{B}(x))) \cup A(A(B(\mathrm{VID})))$$

est une équation, remarquons que cette équation est exactement la même par exemple que

$$x = A(\overline{B}(A(x))) \cup \overline{B}(A(\overline{A}(\mathrm{VID})))$$

compte tenu des identités des algèbres linéaires. ■

L'extension de E en une application $\mathop{\times}_{k=1}^{n} CTP(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk} \to \mathop{\times}_{k=1}^{n} CTP(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$, où sk est la sorte de x_k, se fait en deux temps. Dans un premier temps, on applique la liberté de l'algèbre $\mathfrak{P}(\mathbf{V}, \mathbf{X})$ pour étendre E en un unique morphisme d'algèbres hétérogènes de $\mathfrak{P}(\mathbf{V}, \mathbf{X})$ vers $\mathbf{CT}\mathfrak{P}(\mathbf{V}, \mathbf{X})$ [2, 18], c'est-à-dire en une famille d'applications qui conservent la structure d'algèbre hétérogène,

$$E_s : \quad P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_s \to \mathscr{P}(P(\mathbf{V}, \mathbf{X}))_s - \{\emptyset\}$$

pour $s \in T$, puis on étend E_s en

$$CTE_s : \quad \mathscr{P}(P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_s) - \{\emptyset\} \to \mathscr{P}(P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_s) - \{\emptyset\}$$

pour $s \in T$. Dans un second temps, on utilise $\mathbf{CTE}_s$ pour définir l'application E :

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathrm{CTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk} \to \mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathrm{CTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}.$$

Un point fixe de E est un n-uple d'ensembles $Y=(Y_1, \ldots, Y_n)$, tel que $Y=E(Y)$.

PROPOSITION 3 : E *est une application* $\cup$*-continue de* $\mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathrm{CTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$ *dans* $\mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathrm{CTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$.

Démonstration : La définition de E_s par $E_s(Y_1, \ldots, Y_n)=\bigcup E_s(\{y_1\}, \ldots, \{y_n\})$, (la réunion étant prise sur les y_i appartenant à Y_i), fait naturellement de E une fonction $\cup$-continue. ■

7.1. Solution dans le cas des variétés P-stables

Dans le cas où la variété est **P**-stable, on fait la même construction que plus haut en remplaçant les **C** par des **P**, E s'étend de $\mathop{\times}_{k=1}^{n} \mathrm{CTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$ dans lui-même. Ainsi $E(\emptyset, \ldots, \emptyset)$ a un sens et en itérant cette application on obtient la suite $(\emptyset, \ldots, \emptyset) \subseteq \ldots \subseteq E^j(\emptyset, \ldots, \emptyset) \subseteq \ldots$ qui converge et a pour borne supérieure ou réunion le plus petit point fixe de l'équation $Y=E(Y)$.

Exemple 10 : Dans le type *Ens*[*Nat*], l'équation $L=\mathrm{AJ}(\mathrm{VID}, \mathrm{SU.SU.ZERO}) \cup \mathrm{AJ}(L, \mathrm{SU.SU.ZERO})$ peut-être construit par itération à partir de $\emptyset$, $L_0=\emptyset$, $L_1=\{\mathrm{AJ}(\mathrm{VID}, \mathrm{SU.SU.ZERO}\}$, $L_2=\{\mathrm{AJ}(\mathrm{VID}, \mathrm{SU.SU.ZERO}), \mathrm{AJ}(\mathrm{AJ}(\mathrm{VID}, \mathrm{SU.SU.ZERO}), \mathrm{SU.SU.ZERO})\}$, etc.

7.2. Solution d'un système C-acceptable dans les variétés C-stables

Puisque la variété est **C**-stable, E ne s'étend pas forcément à $\emptyset$, ainsi la construction du plus petit point fixe ne peut débuter sur $\emptyset$. Mais nous allons imposer à E une propriété que vérifie la plupart des systèmes d'équations couramment utilisés.

DÉFINITION 11 : Un système est **C**-acceptable si pour chacune de ses variables x, $E[x_i] \cap P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{si}$ est non vide. ■

Autrement dit tous les membres droits contiennent des constantes. Notons B_i d'ensembles des $E[x_i] \cap P(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{si}$ et B le n-uple, $(B_1, \ldots, B_n)$.

LEMME 4 : *Pour tout* n-*uple* Y *dans* $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \mathbf{PTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$, *on a* $E(Y) \supseteqq B$.

Démonstration : Elle découle directement de la définition de B. ■

LEMME 5 : *Si* Y *est un point fixe de* $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \mathbf{PTP}(\mathbf{V}, \mathbf{X})_{sk}$, $Y \supseteqq B$.

Démonstration : Si Y est un point fixe $Y \supseteqq E(Y)$ or d'après le lemme 4, $E(Y) \supseteqq B$. ■

On itère E sur B et on obtient la proposition suivante :

PROPOSITION 4 : $\bigcup\limits_{n \geqq 0} E^n(B)$ *est le plus petit point fixe de* E.

Démonstration : Notons que si Y est un point fixe, $\bigcup\limits_{n \geqq 0} E^n(B) \subseteqq Y$, en effet, d'après le lemme 4, $B \supseteqq Y$ et donc par récurrence si $E^n(B) \subseteqq Y$ alors $E^{n+1}(B) \subseteqq E(Y) \subseteqq Y$ et donc la réunion des E^n est incluse dans Y. Réciproquement par continuité de E, on voit que $E(\bigcup\limits_{n \geqq 0} E^n(B)) = \bigcup\limits_{n \geqq 1} E^n(B)$, or d'après le lemme 4, $\bigcup\limits_{n \geqq 0} E^n(B) \supseteqq B$, donc $\bigcup\limits_{n \geqq 1} E^n(B) = \bigcup\limits_{n \geqq 0} E^n(B)$. ■

8. BIBLIOGRAPHIE ET CONCLUSION

Le calcul sur les parties d'un groupe, appelées complexes, remonte au début du siècle. Van der Waerden, par exemple, les utilise pour introduire les classes de congruences et les sous-groupes distingués dans son livre *Moderne Algebra* [25]. Tous les travaux sur les extensions ensemblistes que nous allons citer portent sur les algèbres homogènes, aucune étude n'ayant été faite sur les algèbres hétérogènes. Le plus ancien article, à notre connaissance, sur les **P**-extensions dans une algèbre quelconque est du à Gautam en 1957 [10]. Fuchs [8, 9] pose le problème de l'extension des équations à des algèbres ordonnées. L'étude la plus complète concernant la stabilité des identités est certainement celle de Bleichner, Schneider et Wilson [5] qui prolonge celle faite en [4]. Les **C**-extensions apparaissent comme le cas où l'algèbre à étendre est trivialement ordonnée, mais les techniques de démonstration ne sont pas fondamentalement différentes. Wand dans sa thèse [26] caractérise, indépendamment des autres travaux, les

variétés **C**-stables et **P**-stables. Shafaat [23] quant à lui, expose une réciproque assez forte du corollaire du théorème 2 sous la forme suivante : « Si une variété **P**-stable est une famille de modèles d'un ensemble d'équations Σ, elle est une famille de modèle d'un sous-ensemble de Σ d'équations linéaires et régulières » Courcelle et Raoult [7] et Goguen, Thatcher, Wagner et Wright [11] s'intéressent aux problèmes de continuité et de complétion pour un ordre quelconque compatible avec les opérations de l'algèbre, sans prendre en compte les identités. Il est intéressant de constater que la linéarité apparaît dès que l'on veut prouver des propriétés de confluence dans les réécritures parallèles [14], en effet ce que nous faisons apparaît assez fortement lié à ce genre d'approche. Benson [3] fait une étude et une classification des passages de paramètres dans les calculs non déterministes. C'est l'une des meilleures synthèses sur le sujet. Sur les types abstraits non déterministes, nous citerons pour mémoire les travaux de Subrahmanyam [24] et Kapur [15]. L'étude de Marchand [20] peut être considérée comme une application des ensembles algébriques tels que nous les définissons. Cet article est une reprise d'un des chapitres de la thèse de l'auteur [18].

En temps que méthode de passage de paramètres. Benson récuse le choix à l'exécution, c'est-à-dire le calcul sur les parties d'une algèbre, il le considère non intuitif et s'adresse aux concepteurs de langages de programmation non déterministes pour qu'ils évitent de l'implanter. En effet, imaginons un seul instant la surprise du programmeur si lors d'un appel de l'itérateur « éléments » d'un tableau, en CLU, par exemple,

```
for i : int in array [T] $ elements (M) do
        if i mod 2=0 then M[i] :=M[i]+1 end
end
```

les différentes occurrences de la variable produite (ici i) pouvaient correspondre à des valeurs différentes. Nous considérons que l'idéal serait de se placer, dans des types abstraits où choix à l'appel et choix à l'exécution coïncident. Mais ce n'est pas toujours possible. Aussi dans notre conclusion, nous voudrions nous adresser, quant à nous, aux concepteurs de types abstraits non déterministes, afin qu'ils sachent que parfois, les deux méthodes de passages de paramètres ne donnent pas les mêmes résultats. Il semble alors indispensable qu'ils vérifient s'ils ne sont pas dans cette situation. Si c'est le cas, il faut qu'ils connaissent quel type de passage de paramètres leur langage implante et qu'ils considèrent avec circonspection les preuves fondées sur des raisonnements équationnels.

BIBLIOGRAPHIE

1. G. BIRKOFF, *On the Structure of Abstract Algebras*, Proc. Cambridge Phil. Soc.,vol. 31, 1935, p. 433-454.
2. G. BIRKOFF et J. D. LIPSON, *Heterogeneous Algebras*, Journal of Combinatorial Theory, vol. 8, 1970, p. 115-133.
3. D. BENSON, *Parameter Passing in Nondeterministic Recursive Programs*, J. Comput. System Sc., vol. 19, 1979, p. 50-62.
4. M. N. BLEICHNER et M. SCHNEIDER, *Completion of Partially Ordered Set and Universal Algebras*, Acta Math. Acad Sc. Hungaricae, vol. 17, 1966, p. 271-301.
5. M. N. BLEICHNER, M. SCHNEIDER et R. L. WILSON, *Permanence on Identities on Algebras*, Algebra Universalis, vol. 3, 1973, p. 75-93.
6. P. M. COHN, *Universal Algebra*, HARPER and ROW, éd., New York, 1965.
7. B. COURCELLE et J. C. RAOULT, *Completions of Ordered Magmas*, Fundamenta Informaticae, vol. III.1, 1980, p. 105-116.
8. L. FUCHS, *On Partially Ordered Algebras I*, Colloquium Math., vol. 14, 1966, p. 115-130.
9. L. FUCHS, *On Partially Ordered Algebras II*, Acta Univ. Szegediensis, vol. 26,1965, p. 34-41.
10. N. D. GAUTAM, *The Validity of Complex Algebras*, Arch. Math. Logik Grundlagenforsh., vol. 3, 1957, p. 117-127.
11. J. A. GOGUEN, J. W. THATCHER, E. G. WAGNER et J. B. WRIGHT, *Initial Algebra Semantics and Continuous Algebras*, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 24, 1977, p. 68-85.
12. G. GRATZER, *Universal Algebra*, Van Nostrand, 1968.
13. J. V. GUTTAG. E. HOROWITZ et D. R. MUSSER, *Abstract Data Types and Software Validation*, Comm. Assoc. Comput. Mach., vol. 21, 1978, p. 1048-1064.
14. G. HUET, *Confluent Reduction: Abstract Properties and Applications to Term Rewriting Systems*, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 27, 1980, p. 797-821.
15. D. KAPUR, *Toward a Theory for Abstract Data Types*, Massachusetts Institute of Technology, Ph. D. Thesis, May 1980, MIT/LCS/TR-237.
16. D. E. KNUTH, *The Art of Computer Programming*, vol. 1: *Fundamental Algorithms*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1968.
17. P. LESCANNE, *Algèbres de mots et Algèbre Universelle*, Colloque A.F.C.E.T-S.M.F., tome II, 1978, p. 147-156.
18. P. LESCANNE, *Étude algébrique et relationnelle des types abstraits et de leurs représentations*, Thèse d'État, Institut National Polytechnique de Lorraine, Centre de Recherche en Informatique de Nancy, C.R.I.N. 79-T-059, 1979.
19. B. LISKOV, R. ATKINSON, T. BLOOM, E. MOSS, J. G. SCHAFFERT, R. SCHEIFLER et A. SNYDER, *CLU Reference Manual*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 114, 1981.
20. P. MARCHAND, *Langages d'Arbres, Langages dans les Algèbres Libres*, Thèse d'État, Université de Nancy 1, Centre de Recherche en Informatique de Nancy, C.R.I.N. 81-T-030, 1981.
21. R. S. PIERCE, *Introduction to the Theory of Abstract Algebras*, Holt, Rinehart and Wilson, 1968.
22. B. K. ROSEN, *Tree-Manipulation Systems and Church-Rosser Theorems*, J. Assoc. Comput. Mach., vol. 20, 1973, p. 160-187.

23. A. SHAFAAT, *On Varieties Closed under the Construction of Power Algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., vol. 11, 1974, p. 213-218.

24. P. A. SUBRAHMANYAM, *Nondeterminism in Abstract Data Types*, 8th Int. Coll. on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science, vol. 115, 1981, p. 148-164.

25. B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, Springer Verlag, Berlin, 1930.

26. M. WAND: *Mathematical Foundations of Formal Languages Theory*, MAC TR-108, Massachusetts Institute of Technology, Project MAC, Cambridge, Massachusetts, 1973.