RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

MARCEL CORI

# Description d'une classe de grammaires de graphes sans circuit

*RAIRO. Informatique théorique*, tome 16, nº 1 (1982), p. 33-49
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1982__16_1_33_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 16, n° 1, 1982, p. 33 à 49)

# DESCRIPTION D'UNE CLASSE DE GRAMMAIRES DE GRAPHES SANS CIRCUIT (*)

par Marcel Cori [1]

Communiqué par M. Nivat

Résumé. — *On présente un nouveau modèle de grammaires de graphes qui ne traite que des graphes sans circuits et qui respecte leur interprétation en termes d'opérateurs issue de considérations métalinguistiques.*

Abstract. — *We present a new type of graph grammars which deals only with acyclic graphs and is compatible with the interpretation of graphs as operators derived from metalinguistic theory.*

## INTRODUCTION

Cet article présente un modèle de grammaires de graphes dont l'objet est la transformation de structures hiérarchiques représentables par des opérateurs. Les grammaires qui sont décrites ont de nombreuses applications, notamment en linguistique et dans les bases de données.

Les grammaires de graphes offrent le grand intérêt de fournir une base théorique quant à la description des manipulations de structures complexes. Cela explique que le domaine qu'elles constituent soit en plein développement (*voir* [9] et plus particulièrement [10] pour une bibliographie complète).

Les premières grammaires de graphes ont été introduites en 1969 par J. L. Pfaltz et A. Rosenfeld [11]. Divers autres modèles ont été proposés, mais l'approche la plus formalisée et la plus générale de ces grammaires est celle développée depuis 1973 [8] par H. Ehrig *et al.*

En ce qui nous concerne, pour les applications que nous mettons en place, le modèle de Ehrig s'est révélé trop général et, par la même, difficilement manipulable. C'est pourquoi nous avons défini un modèle spécifique.

(*) Reçu juin 1980.
(1) Université Paris-VII, Département d'Informatique générale.

En effet, nous ne travaillons que sur des graphes sans circuit, établissant une liaison entre ces graphes et des opérateurs. Aux graphes sans circuit sont associées des applications, d'une manière analogue à [2]. Et *les transformations* définies sur les graphes *préservent la liaison avec les opérateurs.*

Plus précisément, une transformation consiste en une dérivation directe de graphes : partant d'un graphe $G$ donné et appliquant une règle $R$ on forme un graphe résultant $G'$ :

$$G \underset{R}{\Rightarrow} G',$$

en « remplaçant » dans $G$ un sous-graphe $G_1$ par un graphe $G_2$. Le remplacement doit respecter la liaison des graphes avec les opérateurs.

Ce modèle a été décrit formellement et les procédures générales de transformations ont été programmées en APL [5]. Les applications qui sont en cours de réalisation sont les suivantes :

— construction de structures métalinguistiques définies par des transformations : A. Culioli et son équipe représentent de telles structures par des graphes qui sont plus généraux que les arbres mais qui n'ont pas de circuit (*voir* [6]);

— représentation formelle de programmes par des graphes sans circuit en se servant de la liaison avec les opérateurs [4]. On montre ainsi comment certaines répétitions de calculs peuvent être évitées. Cette approche généralise l'utilisation de graphes sans circuit, ou DAGs, dans la résolution de problèmes d'optimisation en compilation (*voir* par exemple [1]);

— interrogation de bases de données : interrogations simples (recherche de sous-graphes) ou complexes (transformations de graphes avant la recherche de sous-graphes). Le travail de [3] utilise à ce sujet les procédures générales de [5].

L'exposé qui suit s'articule ainsi :

1. Explicitation du cadre formel dans lequel on se place, cadre formel qui n'est pas encore vraiment unifié. Cela nécessite l'énoncé d'un certain nombre de notations et de définitions avant de passer à la description proprement dite du modèle.

2. Définition des structures qui sont transformées, structures que nous appelons *S-grillages*.

3. Association d'applications à ces structures en passant par l'intermédiaire d'opérateurs.

4. Définition très précise de ce que sont les sous-structures intéressantes.

5. Description de la dérivation directe et propriété exprimant la conservation de la liaison aux opérateurs par les transformations.

Dans le cadre de cet article, il n'est pas possible de faire figurer explicitement les démonstrations qui se trouvent toutes dans [5].

## 1. PRÉLIMINAIRES

NOTATIONS :

$$A \setminus B = \{ x \in A \mid x \notin B \},$$
$$[n] = \{ 1, \ldots, n \} \quad \text{si} \quad n \neq 0,$$
$$[0] = \emptyset.$$

### 1.1. Graphes sans circuit

1.1.1. Un *graphe* est un couple $\langle X, \gamma \rangle$ où $X$ est un ensemble (de sommets) et $\gamma$ une application :

$$\gamma : \quad X \to \mathscr{P}(X).$$

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des graphes finis.

1.1.2. Soit $x \in X$. L'ensemble $\hat{\gamma}(x)$ des *descendants* de $x$ est défini par :

(i) $x \in \hat{\gamma}(x)$;

(ii) $\forall y \in X, (\exists y' (y \in \gamma(y') \; et \; y' \in \hat{\gamma}(x))) \Rightarrow y \in \hat{\gamma}(x)$;

(iii) tous les éléments de $\hat{\gamma}(x)$ sont ainsi définis.

Si $Y$ est un sous-ensemble de $X$, on note par extension :

$$\hat{\gamma}(Y) = \bigcup_{x \in Y} \hat{\gamma}(x).$$

1.1.3. Un graphe $H = \langle X, \gamma \rangle$ est *sans circuit* si et seulement si :

(i) $\forall x \in X, \; x \notin \gamma(x)$,

(ii) $\forall x, \; y \in X, (x \in \hat{\gamma}(y) \; et \; y \in \hat{\gamma}(x)) \Rightarrow x = y$.

1.1.4. On définit l'ensemble des *sommets initiaux* et l'ensemble des *sommets terminaux* de $H$ par :

$$\mathrm{Ini}(H) = \{ x \in X \mid \forall y \in X, \; x \notin \gamma(y) \},$$
$$\mathrm{Ter}(H) = \{ x \in X \mid \gamma(x) = \emptyset \}.$$

1.1.5. Le *rang* $r(x)$ d'un sommet $x \in X$ de $H$ est la longueur maximale des chemins arrivant en $x$.

Le rang $r(H)$ du graphe sans circuit est le maximum des $r(x)$, $x \in X$.

1.1.6. Toute relation d'ordre peut être représentée précisément par un graphe sans circuit. En effet, à tout ensemble $X$ fini, ordonné par la relation $\alpha$, on associe le graphe sans circuit $H_\alpha = \langle X, \gamma_\alpha \rangle$ tel que $y \in \gamma_\alpha(x)$ si et seulement si :

(i) $x \neq y$;

(ii) $x \alpha y$;

(iii) $\forall y' \neq y, (x \alpha y' \ et \ y' \alpha y) \Rightarrow y' = x$.

### 1.2. Opérateurs-opérations

Nous reprenons le formalisme développé par J. P. Descles [7], formalisme qui tire son origine de la nécessaité de représenter les structures métalinguistiques de [6].

1.2.1. Soit $S$ un ensemble fini non vide. Un *S-schéma* (d'opérateurs) est un couple $\Phi = \langle V, \tau \rangle$ où $V$ est un ensemble fini et $\tau$ une application :

$$\tau : \quad V \to S \times S^*,$$
$$v \mapsto \langle s, \mu \rangle$$

($S^*$ est le monoïde libre sur $S$).

Un élément $\varphi = \langle v, s, \mu \rangle$ de $\Phi$ est un *opérateur simple*, $\langle s, \mu \rangle$ est son *type*.

1.2.2. L'application $\omega : \Phi \to \Phi'$ (où $\Phi = \langle V, \tau \rangle$ et $\Phi' = \langle V', \tau' \rangle$ sont deux $S$-schémas) est un *morphisme de S-schémas* si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \Phi, \quad \tau'[\omega(\varphi)] = \tau(\varphi).$$

1.2.3. Étant donné un $S$-schéma $\Phi$, on se donne une famille d'ensembles $(E^s)_{s \in S}$ indexée sur $S$ et, à tout opérateur simple $\varphi_v = \langle v, s, \mu \rangle \in \Phi$ on associe une *opération* $\varphi_v^*$ qui est une application :

$$\varphi_v^* : \quad \mathop{\times}_{j=1}^{m} E^{\mu_j} \to E^s$$

(avec $\mu = \mu_1 \ldots \mu_m$).

1.2.4. Il a été défini dans [7] l'ensemble $T[\Phi]$ de tous les *multiopérateurs* sur $\Phi$, comme étant un ensemble qui contient notamment tous les opérateurs de $\Phi$ et qui est fermé pour deux opérations : la *greffe* et l'*intrication*.

Un multiopérateur $\varphi$ a un type $\langle \mu, \nu \rangle$ où $\mu = \mu_1 \ldots \mu_m$ et $\nu = \nu_1 \ldots \nu_n$ appartiennent à $S^*$. Si on se donne une famille d'ensembles $(E^s)_{s \in S}$ et une famille d'opérations $(\varphi_v^*)_{v \in V}$, on définit la *multiopération* de multiopérateur $\varphi$ qui est une application :

$$\varphi^* : \quad \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} E^{\nu_i} \to \underset{i=1}{\overset{m}{\times}} E^{\mu_i}.$$

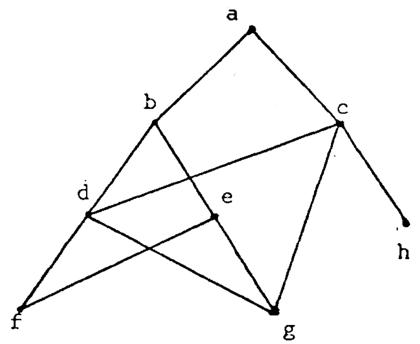
## 2. S-GRILLAGES

**2.1.** Un *grillage* est un triplet $G = \langle X, \theta, \gamma \rangle$ où $X$ est un ensemble fini totalement ordonné par $\theta$ et $\langle X, \gamma \rangle$ un graphe sans circuit.

Les suites des éléments de $\gamma(x)$ (pour tout $x \in X$), de $\mathrm{Ini}(G)$ ou de $\mathrm{Ter}(G)$ sont notées, lorsqu'elles sont ordonnées suivant $\theta$, $\gamma_\theta(x)$, $\mathrm{Ini}_\theta(G)$ ou $\mathrm{Ter}_\theta(G)$.

*Exemple n° 1 :*

G :




Nous représentons l'application $\gamma$ du haut vers le bas et d'ordre $\theta$ de gauche à droite. Ici :

$$\gamma(a) = \{b, c\},$$
$$\gamma(b) = \{d, e\},$$
$$\gamma(c) = \{d, g, h\},$$
$$\gamma(d) = \gamma(e) = \{f, g\},$$
$$\gamma(f) = \gamma(g) = \gamma(h) = \emptyset,$$
$$f \,\theta\, d \,\theta\, b \,\theta\, e \,\theta\, a \,\theta\, g \,\theta\, c \,\theta\, h.$$

**2.2.** L'existence d'un ordre entre sommets a pour but de permettre l'association d'applications aux graphes sans circuits.

Mais le fait que cet ordre soit total ne sert qu'à donner plus de commodité à la définition de structures.

C'est pourquoi, dans une deuxième étape, on définit, sur tout grillage $G = \langle X, \theta, \gamma \rangle$, un *ordre partiel* $\hat{\theta}$ déduit de $\theta$ comme étant la plus petite relation transitive vérifiant :

(i) $(x, x' \in \mathrm{Ini}(G)$ *et* $x \theta x') \Rightarrow x \dot{\theta} x'$;

(ii) $(x, x' \in \mathrm{Ter}(G)$ *et* $x \theta x') \Rightarrow x \dot{\theta} x'$;

(iii) $((\exists y (x, x' \in \gamma(y)))$ *et* $x \theta x') \Rightarrow x \theta x'$.

C'est $\dot{\theta}$ qui sera significatif dans le cadre du rapport avec les opérateurs : à deux graphes qui ne diffèrent que par l'ordre partiel, on fera correspondre le même opérateur typé.

**2.3.** Soient $G = \langle X, \theta, \gamma \rangle$ et $G' = \langle X', \theta', \gamma' \rangle$ deux grillages, $f : X \to X'$ une application.

$f$ est un $\Gamma$-*morphisme* si et seulement si :

(i) $\forall x \in X, \gamma(x) \neq \emptyset \Rightarrow f(\gamma(x)) = \gamma'(f(x))$,

(ii) $\forall x \in X, \gamma(x) = \emptyset \Rightarrow \hat{\gamma}'(f(x)) \cap f(X) = \{f(x)\}$.

$f$ est un $\Omega$-*morphisme* si et seulement si c'est un $\Gamma$-morphisme vérifiant :

(iii) $\forall x, x_1, x_2 \in X, (x_1, x_2 \in \gamma(x)$ *et* $x_1 \theta x_2) \Rightarrow f(x_1) \theta' f(x_2)$;

(iv) $\forall x, y \in X, x, y \in \mathrm{Ter}(G)$ *et* $x \theta y \Rightarrow f(x), f(y) \in \mathrm{Ter}(G')$ *et* $f(x) \theta' f(y)$;

(v) $\forall x, y \in X, x, y \in \mathrm{Ini}(G)$ *et* $x \theta y \Rightarrow f(x), f(y) \in \mathrm{Ini}(G')$ *et* $f(x) \theta' f(y)$;

$f$ est un *morphisme de grillages* si et seulement si c'est un $\Gamma$-morphisme vérifiant :

$$\forall x, y \in X, \qquad x \theta y \quad \Rightarrow \quad f(x) \theta' f(y).$$

Alors que la notion de morphisme de grillages implique la conservation de l'ordre total, les $\Omega$-morphismes ne conservent, dans la structure de grillage, que ce qui est nécessaire à l'association d'applications. Cela explique qu'ils soient liés, par les deux propriétés qui suivent, à l'ordre partiel.

**2.4.** PROPRIÉTÉ : Si $f$ est un $\Omega$-morphisme de $G = \langle X, \theta, \gamma \rangle$ dans $G' = \langle X', \theta', \gamma' \rangle$, on a :

$$\forall x, y \in X, \qquad x \dot{\theta} y \Rightarrow f(x) \dot{\theta}' f(y).$$

*Preuve : Voir* [5], 1.2.4.

**2.5.** PROPRIÉTÉ : Si $f : X \to X'$ est un $\Gamma$-isomorphisme de $G = \langle X, \theta, \gamma \rangle$ sur $G' = \langle X', \theta', \gamma' \rangle$ vérifiant :

$$\forall x, y \in X, \qquad x \dot{\theta} y \quad \Rightarrow \quad f(x) \dot{\theta}' f(y).$$

c'est aussi un $\Omega$-morphisme.

*Preuve* : On montre d'abord que la propriété pour un sommet d'être initial ou terminal est conservée et ensuite on vérifie que l'ordre est conservé dans les cas prévus (*voir* [5] 1.2.5).

**2.6.** Un *S-grillage* (ou grillage sorté sur $S$) est un 4-uple $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ où $\langle X, \theta, \gamma \rangle$ est un grillage et $\sigma : X \to S$ une application.

*Exemple n° 2* : Soit $S = \{\underline{n}, \underline{r}, \underline{r}'\}$ A partir du grillage de l'emple n° 1, on forme un $S$-grillage en définissant l'application $\sigma$ par :

$$\sigma(a) = \sigma(b) = \sigma(d) = \sigma(e) = \sigma(f) = \sigma(g) = \underline{r},$$

$$\sigma(c) = \sigma(h) = \underline{n}.$$

**2.7.** Soient $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ et $G' = \langle X', \theta', \gamma', \sigma' \rangle$ deux *S-grillages*, $f : X \to X'$ une application.

$f$ est un $\Gamma$-morphisme de $S$-grillages (resp. un $\Omega$-morphisme) si et seulement si c'est un $\Gamma$-morphisme (resp. un $\Omega$-morphisme) relativement aux grillages $\langle X, \theta, \gamma \rangle$ et $\langle X', \theta', \gamma' \rangle$.

$f$ est un *$\Sigma$-morphisme* si et seulement si :

$$\forall x \in X, \quad \sigma'(f(x)) = \sigma(x).$$

A partir de là on définit les $\Sigma\Gamma$-morphismes et les $\Sigma\Omega$-morphismes.

$f$ est un *morphisme de S-grillages* si et seulement si c'est un $\Sigma$-morphisme et un morphisme de grillages relativement à $\langle X, \theta, \gamma \rangle$ et $\langle X', \theta', \gamma' \rangle$.

## 3. APPLICATIONS ASSOCIÉES AUX S-GRILLAGES

**3.1.** A tout $S$-grillage $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ on associe le $S$-schéma d'opérateurs $\Phi(G) = \langle V, \tau \rangle$ tel que $V = X \setminus \mathrm{Ter}(G)$ et :

$$\forall x \in V, \quad \tau(x) = \langle \sigma(x), \sigma(x_1) \ldots \sigma(x_q) \rangle$$

[avec $\langle x_1, \ldots, x_q \rangle = \gamma_\theta(x)$].

Soit $(E^{\sigma(x)})_{x \in X}$ une famille d'ensembles. On associe à tout opérateur $\varphi_x = \langle x, \sigma(x), \sigma(x_1) \ldots \sigma(x_q) \rangle$ de $\Phi(G)$ une opération :

$$\varphi_x^* : \quad \mathop{\times}_{i=1}^{q} E^{\sigma(x_i)} \to E^{\sigma(x)}$$

On peut ensuite définir, par induction descendante sur $k\,(r(G) \geqq k \geqq 0)$, l'application de rang $k$ associée à $G$ :

$$f_k : \quad \mathop{\times}_{i=1}^{n} E^{\sigma(z_i)} \to \mathop{\times}_{i=1}^{p} E^{\sigma(x_i)},$$

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \mapsto \langle e''_1, \ldots, e''_p \rangle,$$

où

$$\langle z_1, \ldots, z_n \rangle = \mathrm{Ter}_\theta(G)$$

et $\langle x_1, \ldots, x_p \rangle$est la suite ordonnée selon $\theta$ des éléments de $X$ de rang $k$.

Pour tout $i \in [p]$, $e_i''$ est obtenu comme suit :

– si $x_i = z_j \in \mathrm{Ter}(G)$, $e_i'' = e_j$;

– sinon la suite $\gamma_\theta(x_i) = \langle x_1', \ldots, x_l' \rangle$ est non vide, et on a pu faire correspondre à $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle$ un $l$-uple $\langle e_1', \ldots, e_l' \rangle \in \bigtimes_{j=l}^{l} E^{\sigma(x_j)}$ par l'ensemble des applications $f_{r(G)}, \ldots, f_{k+1}$. On pose :

$$e_i'' = \varphi_{x_i}^*(e_1', \ldots, e_l').$$

L'application $f_0$, encore notée $f_G$, est *l'application associée au S-grillage G* pour une famille donnée d'ensembles et une famille donnée d'opérations. Elle est telle que :

$$f_G : \bigtimes_{i=1}^{n} E^{\sigma(z_i)} \to \bigtimes_{i=1}^{m} E^{\sigma(a_i)}$$

avec $\langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \mathrm{Ini}_\theta(G)$.

*Exemple n° 3* : Nous reprenons le $S$-grillage $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ défini dans les exemples n^os 1 et 2.

A $\sigma(X)$ on associe les ensembles :

$$E^{\underline{n}} = \mathbb{N} \quad \text{(entiers naturels);}$$

$$E^{\underline{r}} = \mathbb{R} \quad \text{(réels).}$$

Afin d'associer une application au $S$-grillage $G$, on définit les opérations suivantes :

$$\varphi_a^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \qquad \langle x, n \rangle \mapsto x^n,$$

$$\varphi_b^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \langle x, y \rangle \mapsto x^* y,$$

$$\varphi_c^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad \langle x, y, n \rangle \mapsto n \quad \text{si } x \geqq y,$$

$$\langle x, y, n \rangle \mapsto 0 \qquad \text{si} \quad x < y,$$

$$\varphi_d^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \langle x, y \rangle \mapsto x + y,$$

$$\varphi_e^* : \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \langle x, y \rangle \mapsto x - y.$$

On vérifie que l'application $f_G$ est telle que :

$$f_G: \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{R},$$
$$\langle x, y, n\rangle\mapsto(x^2-y^2)^n \quad \text{si} \quad x\geqq 0,$$
$$\langle x, y, n\rangle\mapsto 1 \quad \text{si} \quad x<0.$$

**3.2.** Propriété : Soient $G=\langle X, \theta, \gamma, \sigma\rangle$ et $G'=\langle X', \theta', \gamma', \sigma'\rangle$ deux *S-grillages et* $f: X\to X'$ une application.

$f$ est un $\Sigma$ $\Omega$-isomorphisme si et seulement si :

(i) $f$ détermine un isomorphisme de $S$-schéma :

$$\Phi(G)\to\Phi(G'),$$
$$\varphi_x\mapsto\varphi'_{f(x)}.$$

(ii) $f_G=f_{G'}$ pour toute famille d'ensembles $(E^{\sigma(x)})_{x\in X}$ et toute famille d'opérations $(\varphi_x^*)_{x\in X\setminus\mathrm{Ter}(G)}$, $f_{G'}$ étant définie à partir de la famille d'ensembles $(E'^{\sigma'(x')})_{x'\in X'}$ et de la famille d'opérations $(\varphi_{x'}'^*)_{x'\in X'\setminus\mathrm{Ter}(G')}$ telles que :

$$\forall x\in X, \quad E'^{\sigma'(f(x))}=E^{\sigma(x)},$$
$$\forall x\in X\setminus\mathrm{Ter}(G), \quad \varphi'^*_{f(x)}=\varphi_x^*.$$

*Preuve : Voir* [5] 1.6.2, 1.6.3 et 1.6.5.

**3.3.** Il a été montré dans [5] qu'à tout $S$-grillage $G$ on pouvait associer un $S$-multiopérateur $\varphi\in T[\Phi(G)]$ et, inversement, qu'étant donné $\Phi$, on pouvait associer à tout $S$-multiopérateur $\varphi$ de $T[\Phi]$ un $S$-grillage $G$ (à un $\Sigma$ $\Omega$-isomorphisme près) de manière à ce qu'on ait pour toute famille d'ensembles et toute famille d'opérations : $f_G=\varphi^*$.

Les algorithmes de passage (dans les deux sens) des $S$-grillages aux multiopérateurs ont été construits précisément. Ils établissent une certaine « équivalence » entre grillages et opérateurs.

## 4. SOUS-GRILLAGES

La définition des sous-grillages est établie de telle manière que la liaison avec les opérateurs soit respectée.

**4.1.** Soient $G=\langle X, \theta, \gamma, \sigma\rangle$ et $G'=\langle X', \theta', \gamma', \sigma'\rangle$ deux $S$-grillages tels que $X'\subseteqq X$. $G'$ est un *sous-grillage* de $G$ si et seulement si :

(i) $\theta'$ (resp. $\sigma'$) est la restriction de $\theta$ (resp. $\sigma$) à $X'$;

(ii) $\forall x\in X', \gamma'(x)\neq\emptyset\Rightarrow\gamma'(x)=\gamma(x)$.

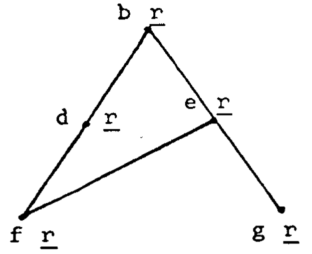
C'est un sous-grillage *propre* si l'on a en plus :

(iii) $\forall x \in X'$, $\gamma'(x) = \emptyset \Rightarrow \hat{\gamma}(x) \cap X' = \{x\}$.

*Exemple n° 4* : $G$ est le $S$-grillage des exemples précédents.

Le graphe :

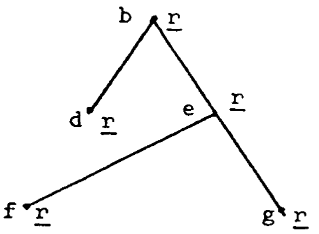
H




n'est pas un sous-grillage de $G$. Si c'était le cas, la liaison avec les opérateurs ne serait pas respectée, $\Phi(H)$ n'étant pas inclus dans $\Phi(G)$.

Un exemple de sous-grillage est :

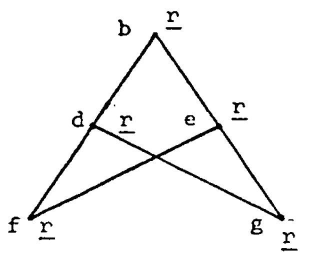
$G_1$




On vérifie que $\Phi(G_1) \subseteq \Phi(G)$.

Mais ce sous-grillage est non propre, un sous-grillage propre de $G$ étant :

$G'_1$




**4.2.** PROPRIÉTÉ : Pour que $G' = \langle X', \theta', \gamma', \sigma' \rangle$ soit un sous-grillage propre de $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ il faut et il suffit que $X' \subseteq X$ et que l'injection canonique de $X'$ dans $X$ détermine un morphisme de grillages de $G'$ dans $G$.

*Preuve* : *Voir* [5], 1.3.2.

## 5. DÉRIVATION DIRECTE DE $S$-GRILLAGES

La difficulté majeure dans la définition de grammaires de graphes réside toujours dans l'explicitation de la notion de dérivation directe. Dans notre cas, elle s'effectue selon le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & G_1 \arrow[r, leftrightarrow, "R"] \arrow[d, "f"'] & G_2 \arrow[d, "g"] & \\ G & G'_1 \arrow[l, "h"'] \arrow[r, leftrightarrow, "R'"] & G'_2 \arrow[r, "h'"] & G' \end{tikzcd}$$

où $R$ est la règle de transformation.

$R'$ est une « règle déduite ».

$f$ et $g$ sont des $\Sigma\ \Omega$-isomorphismes.

$h$ et $h'$ sont des morphismes de $S$-grillages.

Nous justifions cette construction dans ce qui suit.

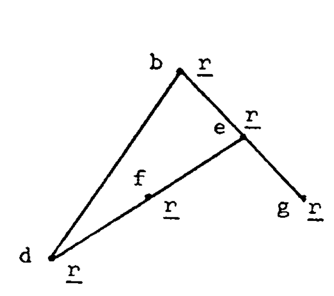
**5.1.** Une *règle* de transformation de $S$-grillages est constituée par un couple $R = \langle G_1, G_2 \rangle$ de $S$-grillages, avec $G_1 = \langle X_1, \theta_1, \gamma_1, \sigma_1 \rangle$, $G_2 = \langle X_2, \theta_2, \gamma_2, \sigma_2 \rangle$ et $\forall x \in X_1 \cap X_2$, $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$.

**5.2.** Soit $G = \langle X, \theta, \gamma, \sigma \rangle$ un $S$-grillage tel que $X \cap (X_2 \setminus X_1) = \emptyset$ et soit $G'_1 = \langle X'_1, \theta'_1, \gamma'_1, \sigma'_1 \rangle$ un sous-grillage propre de $G$ $\Sigma\Omega$-isomorphe à $G_1$ par une application $f : X_1 \to X'_1$.

On se limite pour l'instant à un sous-grillage propre pour ne pas risquer d'introduire des circuits quant on remplacera $G'_1$ par un $S$-grillage équivalent à $G_2$.

*Exemple n° 5* : Si l'on veut remplacer dans $G$ le sous-grillage $G_1$ de l'exemple n° 4 par, par exemple :

$G_2$




on introduit un circuit.

On suppose de plus que $f$ vérifie :

$$\forall x \in [X_2 \cap \mathrm{Ter}(G_1)] \setminus \mathrm{Ter}(G_2), \quad f(x) \in \mathrm{Ter}(G).$$

Sinon il existerait des opérateurs, associés à des sommets de $G$ dont la transformation n'est pas impliquée par la règle, qui ne pourraient rester invariants.

Soit $\ddot{\theta}$ la relation d'ordre définie dans $X$ comme étant la plus petite relation réflexive et transitive vérifiant :

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x, x' \in X, \quad (\exists y \in (X \setminus X'_1) \cup \mathrm{Ter}(G'_1), \\ x, x' \in \gamma(y)) \qquad et \qquad x\,\theta\,x' \;\Rightarrow\; x\,\ddot{\theta}\,x', \end{array} \right.$$

$$\text{(ii)} \quad \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in \{ x \in \mathrm{Ter}(G_1) \cap \mathrm{Ter}(G_2) \mid f(x) \in \mathrm{Ter}(G) \}, \\ \forall y \in \mathrm{Ter}(G) \setminus \mathrm{Ter}(G'_1), \\ y\,\theta\,f(x) \;\Rightarrow\; y\,\ddot{\theta}\,f(x), \\ f(x)\,\theta\,y \;\Rightarrow\; f(x)\,\ddot{\theta}\,y, \end{array} \right.$$

$$\text{(iii)} \quad \left\{ \begin{array}{c} \forall x \in \{ x \in \mathrm{Ini}(G_1) \cap \mathrm{Ini}(G_2) \mid f(x) \in \mathrm{Ini}(G) \}, \\ \forall y \in \mathrm{Ini}(G) \setminus \mathrm{Ini}(G'_1), \\ y\,\theta\,f(x) \;\Rightarrow\; y\,\ddot{\theta}\,f(x), \\ f(x)\,\theta\,y \;\Rightarrow\; f(x)\,\ddot{\theta}\,y. \end{array} \right.$$

On définit dans $Y = f(X_1 \cap X_2)$ les relations d'ordres $\ddot{\theta}_1$, restriction de $\theta$ à $Y$, et $\ddot{\theta}_2$ :

$$\forall x, y \in X_1 \cap X_2, \qquad f(x)\,\ddot{\theta}_2\,f(y) \;\Leftrightarrow\; x\,\hat{\theta}_2\,y.$$

Elles déterminent deux graphes sans circuit, comme indiqué en (1.1.6), $H_1 = \langle Y, \gamma_{\ddot{\theta}_1} \rangle$ et $H_2 = \langle Y, \gamma_{\ddot{\theta}_2} \rangle$. Nous dirons que le $S$-grillage $G$ est *transformable en* $G'_1$ *par la règle* $R$ si et seulement si le graphe $H = H_1 \cup H_2$ est sans circuit.

Sinon, on ne pourrait définir une relation d'ordre dans le grillage transformé sans modifier le type d'opérateurs asoociés à des sommets de $G$ non impliqués dans la transformation.

**5.3.** Soient $X'_2 \subseteq X'_1 \cup X_2$ l'ensemble et $g : X_2 \to X'_2$ l'application bijective vérifiant :

$$\forall x \in X_2 \cap X_1, \quad x \mapsto g(x) = f(x),$$
$$\forall x \in X_2 \setminus X_1, \quad x \mapsto g(x) = x.$$

On introduit une relation d'ordre $\theta'_2$ sur les éléments de $X'_2$ en trois étapes :

(*a*) L'ordre est défini dans $Y$ par :

$$r(x)<r(y) \quad \Rightarrow \quad x\,\theta'_2\,y,$$

$$r(x)=r(y) \quad et \quad x\,\theta'_1\,y \quad \Rightarrow \quad x\,\theta'_2\,y,$$

où $r$ est le rang sur les sommets de $H$.

On vérifie aisément que $\ddot{\theta}_1 \cup \ddot{\theta}_2 \subseteqq \theta'_2$.

Les éléments de $Y$, ordonnés suivant $\theta'_2$, peuvent alors s'écrire : $\langle y_1, \ldots, y_q \rangle$.

(*b*) Soit $x \in X'_2 \setminus X'_1$. S'il existe $j$, plus grand des nombres de $[q]$ vérifiant $f^{-1}(y_j)\,\dot{\theta}_2\,x$, on pose :

$$\forall k \leqq j, \quad y_k\,\theta'_2\,x,$$

$$\forall k > j, \quad x\,\theta'_2\,y_k.$$

Sinon on pose :

$$\forall i \in [q], \quad x\,\theta'_2\,y_i.$$

(*c*) Si les positions respectives de $x$ et $y \in X'_2 \setminus X'_1$ ne sont pas déterminées par leurs positions par rapport aux éléments de $Y$, on pose :

$$x\,\theta'_2\,y \quad \Leftrightarrow \quad x\,\theta_2\,y.$$

On définit le $S$-grillage $G'_2 = \langle X'_2, \theta'_2, \gamma'_2, \sigma'_2 \rangle$ de telle sorte que $g$ soit un $\Sigma\Gamma$-isomorphisme de $G_2$ sur $G'_2$.

PROPRIÉTE : $g$ est un $\Sigma\Omega$-isomorphisme de $G_2$ sur $G'_2$.

*Preuve* : On montre que :

$$\forall x, y \in X_2, \qquad x\,\dot{\theta}_2\,y \quad \Rightarrow \quad g(x)\,\theta'_2\,g(y),$$

ce qui implique, d'après (2.5), que $g$ est un $\Sigma\Omega$-isomorphisme (*voir* [5], 3.3.3).

$R' = \langle G'_1, G'_2 \rangle$ est la *règle déduite* de $R$ pour $G$ en $G'_1$.

**5.4.** Le $S$-grillage $G' = \langle X', \theta', \gamma', \sigma' \rangle$, *transformé de G en $G'_1$ par la règle R* est défini comme suit :

$$X' = (X \setminus X'_1) \cup [\mathrm{Ter}(G'_1) \setminus Ter(G)] \cup X'_2 \cup \gamma(X \setminus X'_1),$$

$$\gamma' : \quad \forall x \in (X \setminus X'_1) \cup [(\mathrm{Ter}(G'_1) \cap X') \setminus (X'_2 \setminus \mathrm{Ter}(G'_2))],$$

$$\gamma'(x) = \gamma(x),$$

$$\forall x \in X'_2 \setminus [\mathrm{Ter}(G'_1) \cap \mathrm{Ter}(G'_2)], \quad \gamma'(x) = \gamma'_2(x),$$

$$\forall x \in [(X'_1 \setminus X'_2) \cap X'] \setminus \mathrm{Ter}(G'_1), \quad \gamma'(x) = \emptyset,$$

$$\sigma' : \quad \forall x \in X \cap X', \quad \sigma'(x) = \sigma(x),$$

$$\forall x \in X' \setminus X, \quad \sigma'(x) = \sigma'_2(x).$$

L'ordre $\theta'$ est encore défini en trois étapes :

(*a*) $\forall x,\ y \in X'_2,\ x\,\theta'\,y \Leftrightarrow x\,\theta'_2\,y$.

La suite $\langle y_1, \ldots, y_q \rangle$ reste ordonnée selon $\theta'$.

(*b*) Soit $x \in X' \setminus X'_2$. S'il existe $j$, plus grand des nombres de $[q]$ vérifiant $y_j\,\theta\,x$, on pose :

$$\forall k \leqq j, \quad y_k\,\theta'\,x,$$

$$\forall k > j, \quad x\,\theta'\,y_k.$$

Sinon on pose :

$$\forall k \in [q], \quad x\,\theta'\,y_k.$$

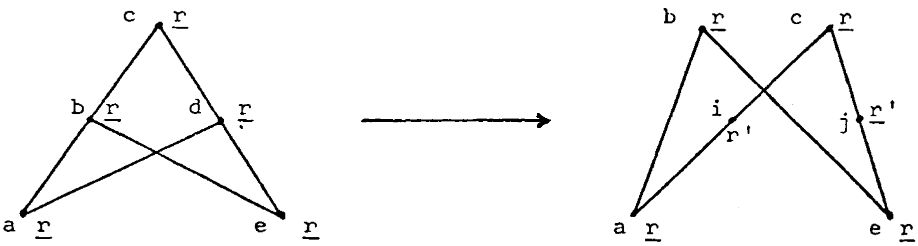
*c*. Si les positions respectives de $x$ et $y \in X' \setminus Y$ ne sont pas déterminées par leurs positions par rapport aux éléments de Y, on pose :

$$x\,\theta'\,y \quad \Leftrightarrow \quad x\,\theta\,y \qquad \text{si} \quad x,\ y \in X' \setminus X'_2,$$

$$x\,\theta'\,y \qquad \text{si} \quad x \in X' \setminus X'_2 \quad \text{et} \quad y \in X'_2 \setminus X'_1.$$

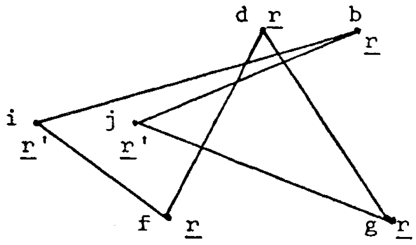
On vérifie que le graphe $\langle X', \gamma' \rangle$ est bien sans circuit, et donc que $G'$ est un $S$-grillage.

*Exemple n° 6* : Soit $R = \langle G_1, G_2 \rangle$ la règle de transformation :

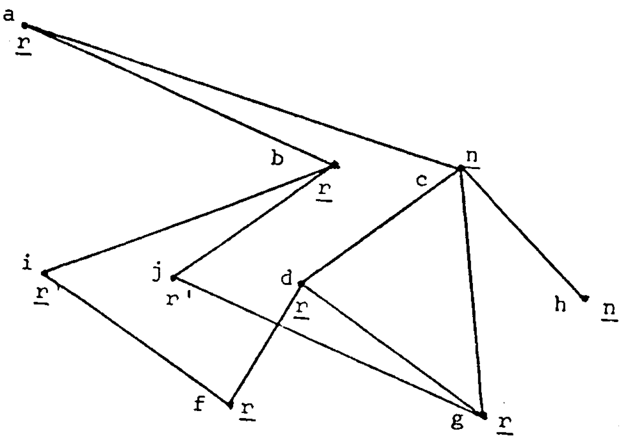



Le $S$-grillage $G'_1$ de l'exemple n° 4, qui est un sous-grillage propre du $S$-grillage $G$ de l'exemple n° 2, est $\Sigma\Omega$-isomorphe à $G_1$.

On vérifie que $G$ est transformable en $G'_1$ par la règle $R$. Et, pour effectuer la transformation, on passe d'abord par la construction du $S$-grillage $G'_2$ :



et on obtient le $S$-grillage transformé $G'$ :




**5.5.** PROPRIÉTÉ : $G'_2$ est un sous-grillage propre de $G'$.

*Preuve : Voir* [5], 3.3.5.

On en déduit que l'injection canonique $h' : X'_2 \to X'$ est un morphisme de $S$-grillage.

**5.6.** PROPRIÉTÉ : $\Phi(G') = [\Phi(G) \setminus \Phi(G'_1)] \cup \Phi(G'_2)$.

*Preuve : Voir* [5], 3.3.7.

Cette propriété indique que lorsqu'on transforme le $S$-grillage $G$ en remplaçant le sous-grillage $G'_1$ par le sous-grillage $G'_2$, on provoque une transformation semblable pour les $S$-schémas associés. Elle justifie *a posteriori* la construction de $G'$.

**5.7.** Nous nous sommes imposés une restriction en exigeant que $G'_1$ soit un sous-grillage propre de $G$. Si $G'_1$ est non propre on arrive à des résultats analogues en construisant, dans le cas où c'est possible, un sous-grillage propre $G''_1$ de $G$ dont $G'_1$ est un sous-grillage et une règle $\langle G''_1, G''_2 \rangle$.

Et, s'il y a transformabilité pour cette règle, on obtient un $S$-grillage $G'$, tranformé de $G$, dont $G''_2$ est un sous-grillage propre.

On montre dans ce cas que :

$$\Phi(G') = [\Phi(G) \setminus \Phi(G'_1)] \cup \Phi'_2,$$

$\Phi'_2$ étant un $S$-schéma isomorphe à $\Phi(G_2)$.

**5.8.** Soit $(E^s)_{s\in S}$ une famille d'ensembles et soit $G=\langle X, \theta, \gamma, \sigma\rangle$ un $S$-grillage auquel est associée une famille d'opérations $(\varphi_x^*)_{x\in X\setminus \mathrm{Ter}(G)}$ sur la famille d'ensembles.

A la règle $R=\langle G_1, G_2\rangle$ on associe une famille d'opérations de $S$-schéma $\Phi(G_2)$ : $(\psi_x^*)_{x\in X_2\setminus \mathrm{Ter}(G_2)}$. On sait, d'après (5.6) [ou (5.7)], que :

$$\Phi(G')=[\Phi(G)\setminus\Phi(G_1')]\cup\Phi_2',$$

$\Phi_2'$ étant un $S$-schéma isomorphe à $\Phi(G_2)$. On peut donc définir toutes les opérations de la famille $(\varphi_x'^*)_{x\in X'\setminus \mathrm{Ter}(G')}$ par :

$$\forall x\in(X\cap X')\setminus[(X_1'\setminus \mathrm{Ter}(G_1'))\cup \mathrm{Ter}(G')],\quad \varphi_x'^*=\varphi_x^*,$$
$$\forall x\in(X_1'\setminus \mathrm{Ter}(G_1'))\cup(X_2\setminus X_1),\quad \varphi_x'^*=\psi_{g^{-1}(x)}^*.$$

Et on voit que les opérations associées à des sommets de $(X\setminus X_1')\cup \mathrm{Ter}(G_1')$ ne sont pas altérées par la transformation, qui reste bien *locale*.

On pourra donc associer une application au graphe transformé.

*Exemple n° 7 :* Soit le $S$-grillage $G$ de l'exemple n° 2 auquel a déjà été associé une famille d'opérations. A la règle $R=\langle G_1, G_2\rangle$ de l'exemple n° 6 on associe les opérations :

$$\psi_b^*:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad \langle x, y\rangle\mapsto x+y,$$
$$\psi_c^*:\ \mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R},\qquad \langle x, y\rangle\mapsto x-y,$$
$$\psi_i^*:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\qquad x\mapsto x^2,$$
$$\psi_j^*:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+,\qquad x\mapsto x^2.$$

(en posant $E^{r'}=\mathbb{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nuls).

L'application $f_{G'}$ associée au $S$-grillage $G'$ est alors identique à l'application $f_G$. La transformation dans le cas présent, revient à remplacer le calcul de $(x+y)^*\cdot(x-y)$ par celui de $x^2-y^2$.

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. V. AHO, S. C. JOHNSON et J. D. ULLMAN, *Code Generation for Expressions with Common Subexpressions*, Journal of the A.C.M., vol. 24, n° 24, n° 1, janvier 1977.
2. M. A. ARBIB et Y. GIVE'ON, *Algebra Automata I: Parallel Programming as a Prolegomena to the Categorical Approach*, Information and Control, vol. 12, 1968.
3. M. J. BLOSSEVILLE et R. BOUILLOUX, *Méthodologie de construction d'une base de données à partir d'un texte le décrivant*, Thèse de de 3e cycle, Université Paris-VII, juin 1980.

4. M. CORI, *Grammaires de graphes servant à la description de programmes*, Rapport PITFALL n° 41, Université Paris-VII, novembre 1979.
5. M. CORI, *Structures hiérarchiques et opérateurs typés : algorithmes de transformations*, Thèse de 3e cycle, Université Paris-VII, mai 1980.
6. A. CULIOLI et J. P. DESCLES, *Considérations sur un programme de Traitement Automatique des Langues et du Langage*, Informatique et Sciences Humaines, Colloque C.N.R.S., Marseille, 1975.
7. J. P. DESCLES, (*a*) *Opérations sur des opérateurs;* (*b*) *Transformations d'opérations et de multiopérations*, C. R. Acad. Sc., 283, série A, novembre et décembre 1976.
8. H. EHRIG, M. PFENDER et H. J. SCHNEIDER, *Graph-Grammars: an Algebraic Approach*, Proceedings of 14th Annual I.E.E.E. Symposieum on Switching and Automata Theory, Iowa City, 1973.
9. *Graph Grammars and their Applications to Computer Science and Biology*, International Workshop, Lecture Notes in Computer Science, n° 73, Springer Verlag, 1978.
10. M. NAGL, *A Tutorial and Bibliographical Survey on Graph Grammars*, Graph Grammars and their Applications to Computer Science and Biology, International Workshop, Lecture Notes in Computer Science, n° 73, Springer Verlag, 1978.
11. J. L. PFALZ et A. ROSENFELD, *Web Grammars*, Proceedings International Joint Conference on Artificial Intelligence, Washington, mai 1969.