JEANNINE LEGUY

Transductions rationnelles décroissantes

RAIRO. Informatique théorique, tome 15, nº 2 (1981), p. 141-148
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1981__15_2_141_0>

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 5, n° 2, 1981, p. 141 à 148)

TRANSDUCTIONS RATIONNELLES DÉCROISSANTES (*)

par Jeannine LEGUY ([1])

Communiqué par J. BERSTEL

Abstract. — *A characterization of decreasing rational transductions is given. We show that* τ *is a decreasing rational transduction from* X^* *into* Y^* *if and only if there exist an alphabet* Z, *two alphabetic morphisms* $h : Z^* \to X^*$, $g : Z^* \to Y^*$, *with* h ε*-free and a regular language* $R \subset Z^*$ *such that* $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$.

Résumé. — *Nous proposons une caractérisation des transductions rationnelles décroissantes. Nous montrons que* τ *est une transduction rationnelle décroissante de* X^* *dans* Y^* *si et seulement si il existe un alphabet* Z, *deux homomorphismes alphabétiques* h *de* $Z^* \to X^*$, g *de* $Z^* \to Y^*$, h *strictement alphabétique et un langage régulier* $R \subset Z^*$ *tels que* $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$.

I. INTRODUCTION

La notion de transduction rationnelle, outil important en théorie des langages, a été dégagée dès 1965 par Elgot et Mezei [4]. L'équivalence entre transduction rationnelle d'une part et homomorphisme, homomorphisme inverse, intersection avec un langage rationnel d'autre part a été montré par Nivat [5] en 1968; ce résultat est à l'origine d'un grand nombre de travaux. Une synthèse des résultats concernant tant l'outil que ses applications à la théorie des langages a été réalisée par Berstel [1].

Comment une propriété sur une transduction rationnelle va-t-elle être répercutée dans sa caractérisation en terme de bimorphisme et réciproquement ? De telles études ont déjà été réalisées par Boasson et Nivat [2] pour les transductions rationnelles fidèles ou d'image finie, par Eilenberg [3] pour les transductions rationnelles conservant les longueurs. Le travail que nous présentons ici, s'inscrit dans cette problématique et permet d'apporter une caractérisation des transductions rationnelles décroissantes : une transduction rationnelle est dite décroissante si, pour tout mot, la longueur d'un élément quelconque de son image par cette transduction est inférieure ou égale à la longueur de ce dernier. Nous montrons que τ est une transduction rationnelle

(*) Reçu juin 1979, révisé décembre 1979.
([1]) Université de Lille-I, U.E.R. d'I.E.E.A., Service Informatique, 59655 Villeneuve-d'Ascq, France.

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics, 0399-0540/1981/141/$ 5.00

décroissante de X^* dans Y^* si et seulement si elle peut être mise sous la forme $\tau = g^{-1} \circ (\cap R) \circ h^{-1}$ où R est un langage rationnel défini sur un alphabet Z, h un homomorphisme strictement alphabétique de Z^* dans X^* et g un homomorphisme de Z^* dans Y^*. Notons que cette caractérisation nous permet de retrouver immédiatement, comme cas particulier, le résultat d'Eilenberg cité plus haut et aussi, par symétrie, de caractériser les transductions rationnelles croissantes.

II. PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

Soit X un alphabet, on désigne par X^* le monoïde libre engendré par X et par ε l'élément neutre de ce monoïde. La *longueur* $l(w)$ d'un mot w est le nombre de lettres composant le mot w. $\mathrm{Rat}(X^*)$ denote l'ensemble des langages rationnels de X^*. Soit L un langage défini sur l'alphabet X, $F(L)$, $FG(L)$ et $FD(L)$ sont respectivement l'ensemble des facteurs, des facteurs gauches et des facteurs droits de mots de L :

$$F(L) = \{ w \in X^* / \exists\, x,\ y \in X^* \text{ et } xwy \in L \},$$

$$FG(L) = \{ w \in X^* / \exists\, y \in X^* \text{ et } wy \in L \},$$

$$FD(L) = \{ w \in X^* / \exists\, y \in X^* \text{ et } yw \in L \}.$$

Étant donnés deux alphabets X et Y, une *transduction* τ de X^* dans Y^* est une application de X^* dans $\mathcal{P}(Y^*)$ (l'ensemble des parties de Y^*). *Le graphe* de τ est l'ensemble :

$$\hat{\tau} = \{ (x,\ y) \in X^* \times Y^* / x \in X^* \text{ et } y \in \tau(x) \},$$

nous noterons τ^{-1} la transduction de Y^* dans $\mathcal{P}(X^*)$ définie par :

$$\tau^{-1}(y) = \{ x \in X^* / (x,\ y) \in \hat{\tau} \},$$

le graphe de τ^{-1} est l'ensemble :

$$\hat{\tau}^{-1} = \{ (y,\ x) \in Y^* \times X^* / (x,\ y) \in \hat{\tau} \}.$$

Une transduction τ sera dite :

– *rationnelle* si et seulement si $\hat{\tau}$ est une partie rationnelle de $X^* \times Y^*$;

– *décroissante* (resp. conservant les longueurs, croissante) si et seulement si pour tout élément y de $\tau(x)$, $l(x) \geqq l(y)$ [resp. $l(x) = l(y)$, $l(x) \leqq l(y)$]. Évidemment, τ est décroissante si et seulement si τ^{-1} est croissante.

Si X et Y sont disjoints, nous notons Π_X et Π_Y les projections respectives de $(X \cup Y)^*$ dans X^* et Y^*, nous définissons pour tout mot w de $(X \cup Y)^*$, $l_X(w) = l(\Pi_X(w))$ et $l_Y(w) = l(\Pi_Y(w))$.

Un *transducteur séquentiel* T est un 6-uple $(\Sigma, \Delta, Q, q_0, \delta, \lambda)$ où Σ est un alphabet d'entrée, Δ un alphabet de sortie, Q est un ensemble fini d'états, q_0 un élément particulier de Q appelé état initial, δ et λ sont deux fonctions partielles :

$$\delta: \quad Q \times \Sigma \to Q \qquad \text{et} \qquad \lambda: \quad Q \times \Sigma \to \Delta^*,$$

que l'on étend à $Q \times \Sigma^*$ en posant, pour tout mot f de Σ^*, pour toute lettre x de Σ :

$$\delta(q, \varepsilon) = q; \qquad \delta(q, fx) = \delta(\delta(q, f), x);$$

$$\lambda(q, \varepsilon) = \varepsilon; \qquad \lambda(q, fx) = \lambda(q, f)\lambda(\delta(q, f), x),$$

δ est la *fonction de transition* de T, λ sa *fonction de sortie* (*cf.* Eilenberg [3]).

Introduite en 1977 par Schützenberger [6], la notion de transducteur sous-séquentiel est utilisée dans ce travail; un *transducteur sous-séquentiel* est un couple (T, s) formé d'un transducteur séquentiel T défini comme ci-dessus et d'une fonction partielle s de Q dans Δ^*.

Une application γ est sous-séquentielle s'il existe un transducteur sous-séquentiel qui la réalise, c'est-à-dire telle que pour tout mot w de Σ^*, $\gamma(w) = \lambda(q_0, w)\, s(\delta(q_0, w))$.

Un homomorphisme h de X^* dans Y^* est dit *alphabétique* (resp. *strictement alphabétique*) si et seulement si $h(X) \subset Y \cup \{\varepsilon\}$ [resp. $h(X) \subset Y$].

Une caractérisation des transductions rationnelles est donnée par le théorème de Nivat :

THÉORÈME 1 [5]. — *Une transduction τ de X^* dans Y^* est rationnelle si et seulement si il existe un alphabet Z, un langage rationnel $R \subseteq Z^*$ et deux homomorphismes (alphabétiques) h et g respectivement de Z^* dans X^* et Y^* tels que :*

$$\hat{\tau} = \{(h(w), g(w))/w \in R\},$$

ce qui s'écrit également en utilisant les notations d'Eilenberg [3] :

$$\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}.$$

Ainsi, τ admet la factorisation que voici :

$$X^* \xrightarrow{h^{-1}} Z^* \xrightarrow{\cap R} Z^* \xrightarrow{g} Y^*.$$

Une variante de ce théorème, due à Eilenberg [3], sera utilisée dans la suite de ce travail :

THÉORÈME 2 [3]. — *Soient X et Y deux alphabets disjoints, une transduction de X^* dans Y^* est rationnelle si et seulement si il existe un langage rationnel $R \subseteq (X \cup Y)^*$ tel que :*

$$\hat{\tau} = \{(\Pi_X(w), \Pi_Y(w))/w \in R\},$$

où encore $\tau = \Pi_Y \circ (\cap R) \circ \Pi_X^{-1}$.

C'est essentiellement cette forme que nous utiliserons; pour simplifier nous appelons cette factorisation de τ forme normale de τ.

III. RÉSULTATS

Le résultat principal que nous allons montrer est le suivant :

THÉORÈME 3. — *Une transduction rationnelle τ de X^* dans Y^* est décroissante si et seulement si il existe un langage rationnel $R \subseteq Z^*$, deux homomorphismes alphabétiques h et g, h de Z^* dans X^*, g de Z^* dans Y^*, h strictement alphabétique tels que $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$.*

Notons qu'une autre formulation en terme monoïde est possible. Si M représente le monoïde $\{(u, v) \in X^* \times Y^* / l(u) \geqq l(v)\}$ alors :

THÉORÈME 4. — $\mathrm{Rat}(X^* \times Y^*) \cap M = \mathrm{Rat}(M)$.

De ce théorème on déduit facilement le résultat suivant, dû à Eilenberg :

THÉORÈME 5 [3]. — *Une transduction rationnelle τ de X^* dans Y^* conserve les longueurs si et seulement si il existe un alphabet Z, un langage rationnel $R \subseteq Z^*$, deux homomorphismes h et g strictement alphabétiques respectivement de Z^* dans X^* et Y^* tels que $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$.*

En effet, si on suppose que τ conserve les longueurs, τ est décroissante, son graphe peut donc se mettre sous la forme $\hat{\tau} = \{(h(w), g(w)) / w \in R\}$ où h est strictement alphabétique et g alphabétique. Mais alors, pour tout mot w de R, $l(w) = l(h(w)) = l(g(w))$ ou encore, puisque g est alphabétique, pour toute lettre de Z, $l(g(z)) = l(h(z)) = 1$. □

IV. PREUVE

Nous supposerons, sans nuire à la généralité de la démonstration, que X et Y sont des alphabets disjoints. Afin de démontrer le théorème 3 nous considérons la propriété (P) suivante, qui s'avère être essentielle :

DÉFINITION 6. — *Une partie R de $(X \cup Y)^*$ vérifie* (P) *si et seulement si il existe un entier $k > 0$ tel que, pour tout w de $F(R)$ on ait $l_Y(w) \leqq l_X(w) + k$.*

Notons que si $\tau = \Pi_Y \circ (\cap R) \circ \Pi_X^{-1}$ est une transduction rationnelle en forme normale alors τ est décroissante si et seulement si, pour tout mot w de R, $l_X(w) \geqq l_Y(w)$. Nous pouvons alors énoncer le lemme de base de la démonstration :

LEMME 7. — *Si $R \subset (X \cup Y)^*$ est un langage rationnel et si $l_X(w) \geqq l_Y(w)$ pour tout mot w de R, alors R vérifie la propriété* (P).

Démonstration. — Soit k le nombre d'états de l'automate minimal qui reconnaît R et supposons, en raisonnant par l'absurde, que l'on puisse trouver un élément w de $F(R)$ vérifiant l'inégalité $l_Y(w) > l_X(w) + k$. Il existe x et y, éléments de $(X \cup Y)^*$ tels que xwy appartienne à R. Le mot w peut se mettre sous la forme $w = w_0 w_1 \ldots w_k$ où, pour tout i de $[1, k]$, $l_Y(w_i) > l_X(w_i) + 1$ et $w_0 = \varepsilon$. Comme $l(w) > k$, il existe i et $j \in [0, k]$ tels que :

$$xw_0 \ldots w_i (w_{i+1} \ldots w_j)^* w_{j+1} \ldots w_k y \in R.$$

Posons :

$$l = l_X(xwy) - l_Y(xwy);$$

par hypothèse $l \geqq 1$. Mais le mot :

$$w' = xw_0 \ldots w_i (w_{i+1} \ldots w_j)^{l+1} w_{j+1} \ldots w_k y \in R$$

et vérifie $l_X(w') - l_Y(w') < 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. □

Nous déduisons immédiatement :

COROLLAIRE 8. — *Si $\tau = \Pi_Y \circ (\cap R) \circ \Pi_Y$ est une transduction rationnelle décroissante en forme normale alors R vérifie* (P).

Soient $Z = X \times (Y \cup \{a\})$ où $a \notin X \cup Y$, α et β les deux morphismes alphabétiques de Z^* dans X^* et Y^* respectivement, définis pour tout couple (x, v) de Z par :

$$\alpha(x, v) = x \qquad \text{et} \qquad \beta(x, v) = \begin{cases} y & \text{si } v = y \in Y, \\ \varepsilon & \text{si } v = a. \end{cases}$$

Notons que α est strictement alphabétique.

LEMME 9. — *Soit $R \subset (X \cup Y)^*$ un langage rationnel tel que pour tout mot w de R $l_X(w) \geqq l_Y(w)$. Il existe une application sous séquentielle γ de $(X \cup Y)^*$ dans Z^* telle que :*

$$\textit{pour tout mot } w \textit{ de } R \begin{cases} \Pi_X(w) = \alpha \circ \gamma(w), \\ \Pi_Y(w) = \beta \circ \gamma(w). \end{cases}$$

Démonstration. — Avant de donner la preuve formelle, donnons l'idée qui nous a conduit à cette preuve et dont l'essentiel est la construction d'un transducteur sous-séquentiel T. Un mot de R ayant plus de lettres dans X que de lettres dans Y, à toute lettre de X on associe une lettre de Y. Le transducteur aura pour mission de construire des paires constituées d'une lettre dans X et d'une lettre dans Y, plus, éventuellement, un excédent en lettres de X. Le transducteur séquentiel à construire lit le mot w de la gauche vers la droite. Afin de rendre son comportement plus clair, nous considérons, dans une première approche, qu'il travaille sur deux files, une X-file (ne contenant que des lettres de X) et une Y-file (ne contenant que des lettres de Y). Chaque lettre lue va être rangée dans la file correspondante et si les deux files sont non vides, les premiers éléments de chacune des deux files sont groupés par paire émise en sortie.

Pour qu'un transducteur rationnel puisse réaliser ce travail, il convient que la taille des files soit bornée par un nombre indépendant du mot en traitement. On pourra alors simuler les files à l'aide des états du transducteur.

Le langage rationnel R, d'après le lemme 7, vérifie la propriété (P) ce qui nous assure que la taille maximale de la Y-file est k où k est l'entier du lemme 7. Par contre, nous n'avons aucune garantie quant à la taille de la X-file. Aussi décidons-nous que, dès que la taille de la X-file atteint k, le premier élément de la X-file soit sorti pour former une paire avec le symbole spécial « a ». La taille maximale de la X-file sera donc de k.

A la fin de la lecture de w, seule la X-file peut ne pas être vide. Elle sera alors vidée en regroupant ses éléments avec le symbole spécial « a ».

Le transducteur T est défini par :

$$T=(\Sigma, \Delta, Q, (\varepsilon, \varepsilon), \delta, \lambda),$$

où :

– $\Sigma = X \cup Y$ est l'alphabet d'entrée;

– $\Delta = X \times (Y \cup \{a\})$ est l'alphabet de sortie;

– $Q = \left(\left(\bigcup_{i=0}^{k} X^i\right) \times \{\varepsilon\}\right) \cup \left(\{\varepsilon\} \times \left(\bigcup_{i=0}^{k} Y^i\right)\right)$ est l'ensemble des états.

Les états de Q sont donc de la forme (u, ε) avec $u \in X^*$ et $l(u) \leqq k$ ou (ε, v) avec $v \in Y^*$ et $l(v) \leqq k$:

– $(\varepsilon, \varepsilon)$ est l'état initial,

– δ et λ applications partielles de $Q \times \Sigma^*$ dans Q et Δ^* sont respectivement les fonctions de transition et de sortie définies par :

État	Lettre lue	λ	δ	
$(\varepsilon, \varepsilon)$	$x \in Y$	ε	(x, ε)	Rangement dans les « files »
$(\varepsilon, \varepsilon)$	$y \in Y$	ε	(ε, y)	
(u, ε) où $l(u) < k$	$x \in X$	ε	(ux, ε)	
(ε, v) où $l(v) < k$	$y \in Y$	ε	(ε, vy)	
(u, ε) $l(u) = k$ $u = x'u'$ et $x' \in X$	$x \in Y$	(x', a)	$(u'x, \varepsilon)$	Sortie du premier de la file avec a, entrée du dernier lu
(u, ε) $u = x'u'$ et $x' \in X$	$y \in Y$	(x', y)	(u', ε)	On « vide »
(ε, v) $v = y'v'$ et $y' \in Y$	$x \in X$	(x, y')	(ε, v')	

La fonction partielle s de Q dans Z^* est définie par :

$$\forall u = u_1 \ldots u_n \in X^* \qquad \text{avec} \quad \forall i \in [1, n] \ \ u_i \in X,$$
$$s(u, \varepsilon) = (u_1, a) \ldots (u_n, a),$$

l'application sous-séquentielle γ recherchée est réalisée par le transducteur sous-séquentiel (T, s).

Pour montrer les relations entre Π_X, α, γ et Π_Y, β, γ nous avons besoin du lemme suivant :

LEMME 10. — *Pour tout mot w de $FG(R)$, il existe un état (u, v) de Q vérifiant :*

$$\Pi_X(w) = \alpha \circ \lambda((\varepsilon, \varepsilon), w) u,$$
$$\Pi_Y(w) = \beta \circ \lambda((\varepsilon, \varepsilon), w) v,$$
$$l(v) \leqq \sup \{ l_Y(w') - l_X(w') / w' \in FD(w) \}$$

et pour tout w'' tel que $ww'' \in R$ $l(v) \leqq l(w'')$.

La démonstration se fait par induction sur la longueur des facteurs gauches de R. En effet les relations sont manifestement vraies pour les facteurs gauches de longueur 1, si on les suppose vraies pour les facteurs gauches de longueur n, on montre que cette propriété est conservée après la lecture d'une lettre z en étudiant les sept possibilités du tableau, ce qui est fastidieux mais ne présente pas de difficultés majeures. L'appartenance de (u, v) à Q est garantie par la troisième relation et le lemme 7.

En particulier si $w \in R$, il existe $(u, v) \in Q$ tel que :

$$\Pi_X(w) = \alpha \circ \lambda((\varepsilon, \varepsilon), w) u = \alpha \circ \gamma(w)$$

et

$$\Pi_Y(w) = \beta \circ \lambda((\varepsilon, \varepsilon), w) v,$$

mais alors $v = \varepsilon$ ce qui implique :

$$\Pi_Y(w) = \beta \circ \gamma(w). \quad \square$$

Preuve du théorème 3. — La condition est suffisante, réciproquement soit τ une transduction rationnelle décroissante de X^* dans Y^*. On peut, sans nuire à la généralité de la démonstration, supposer que X et Y sont des alphabets disjoints. τ s'écrit, en forme normale, $\tau = \Pi_Y \circ (\cap R) \circ \Pi_X^{-1}$ mais alors R vérifie (P) (corollaire 8), on peut appliquer le lemme 9 ce qui permet d'écrire τ sous la forme $\tau = \beta \circ (\cap \gamma(R)) \circ \alpha^{-1}$ où α et β sont des homomorphismes alphabétiques et α est strictement alphabétique. $\square$

La construction utilisée dans le lemme 9 peut directement être faite sur la première factorisation de $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$; il suffit pour cela de définir l'homomorphisme θ par :

$$\text{si} \quad R \subseteq Z^*, \qquad \forall z \in Z, \qquad \theta(z) = h(z) g(z),$$

ce qui conduit au résultat suivant :

COROLLAIRE 11. — *Si $\tau = g \circ (\cap R) \circ h^{-1}$ est une transduction décroissante de X^* dans Y^*, il existe une application sous-séquentielle γ, un homomorphisme strictement alphabétique h', un homomorphisme alphabétique g' tels que :*

$$\tau = g' \circ (\cap \gamma(R)) \circ h'^{-1}.$$

Puisque τ est croissante si et seulement si τ^{-1} est décroissante, le théorème 3 nous permet d'avoir une caractérisation des transductions rationnelles croissantes.

REMERCIEMENTS

Je remercie Michel Latteux et Jean Berstel dont les remarques et conseils m'ont été très utiles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BERSTEL, *Transductions and Context-Free Languages*, Teubner Verlag, 1979.

[2] L. BOASSON et M. NIVAT, *Sur diverses familles de langages fermées par transduction rationnelle*, Acta Informatica, vol. 2, 1973, p. 180-188.

[3] S. EILENBERG, *Automata, Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[4] C. C. ELGOT et J. F. MEZEI, *On Relations Defined by Generalized Finite Automata*, I.B.M. J. of Res. and Rev., vol. 9, 1965, p. 47-68.

[5] M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-455.

[6] M. P. SCHÜTZENBERGER, *Sur une variante des fonctions séquentielles*, Theor. Comp. Sc., vol. 4, 1977, p. 48-57.