

PATRICK SALLÉ

Une généralisation de la théorie des types en λ -calcul (II)

RAIRO. Informatique théorique, tome 14, n° 3 (1980), p. 301-314

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1980__14_3_301_0>

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DES TYPES EN λ -CALCUL (II) (*)

par Patrick SALLÉ ⁽¹⁾

Communiqué par J.-F. PERROT

Avertissement. — Nous donnons ici la seconde partie de l'article « Une généralisation de la théorie des types en λ -calcul » dont la première partie a paru dans cette même revue, dans le numéro précédant celui-ci. Les références bibliographiques renvoient à la liste de la première partie.

Résumé. — Nous décrivons une généralisation de la théorie des types de Curry qui étend l'affectation de type à l'ensemble du λ -calcul. Dans cette théorie deux expressions β - η convertibles ont le même ensemble de types et une expression typée possède suivant la valeur de son type une forme normale ou une forme normale gauche (2^e partie).

Abstract. — We describe a generalization of Curry's type theory which extends type assignment to the whole λ -calculus. In our theory, two expressions that are β - η -convertible have the same set of types and a typed expression has a normal form or a head normal form according to the value of its type.

9. EXTENSION DE LA THÉORIE DES TYPES

Nous présentons l'ensemble des types T' et sa structure puis les modifications apportées aux règles d'affectations.

9.1. Ensemble des types

Il est défini à partir des types de base et des opérations de composition et de construction de séquences.

DÉFINITION 12 : T' est le plus petit ensemble défini par :

- 0, 1, ω appartiennent à T' ;
- si $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau \in T'$ alors $[\sigma_1, \dots, \sigma_n]\tau \in T'$.

$[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$ est appelée une séquence et possède les propriétés d'un ensemble mathématique *id est* l'indépendance par rapport à l'ordre d'écriture de ses éléments et au nombre de représentants d'un même élément.

(*) Reçu juin 1978, révisé octobre 1979.

(1) Laboratoire Langages et Systèmes Informatiques, Université Paul-Sabatier, 31077 Toulouse Cedex.

Exemple 14 : $[\omega][0, 1, 0]0$ et $[\omega][1, 0]0$ sont deux écritures du même type.

Nous introduisons les trois axiomes d'équivalence :

$$A'_0 : [1]0 = 0;$$

$$A'_1 : [0]1 = 1;$$

$$A'_\omega : [\bar{\tau}] \omega = \omega \text{ où } \bar{\tau} \text{ est une abréviation pour } \tau_1, \dots, \tau_n.$$

La justification sémantique de ces axiomes est la même que celle de A_0, A_1, A_ω . De même les propriétés (P1), (P2), la définition de la longueur d'un type $\| \cdot \|$ et la propriété (P4) restent valables. (P3) devient (P'3) $\forall \tau \in T', \forall n, \exists \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{n-1}$ séquences et $\tau_n \in T'$ tels que

$$\tau = [\bar{\tau}_1] \dots [\bar{\tau}_{n-1}] \tau_n.$$

Nous définissons des ordres partiels \sqsubseteq et \subseteq entre types et séquences par :

$$- \omega \sqsubseteq 0 \sqsubseteq 1;$$

$$- [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \subseteq [\tau_1, \dots, \tau_m] \text{ si et seulement si}$$

$$\forall i (1 \leq i \leq n), \exists j (1 \leq j \leq m) \text{ tel que } \sigma_i \sqsubseteq \tau_j;$$

$$- [\tau_1, \dots, \tau_m] \tau_{m+1} \sqsubseteq [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \sigma_{n+1} \text{ si et seulement si}$$

$$\tau_{m+1} \sqsubseteq \sigma_{n+1} \quad \text{et} \quad [\sigma_1, \dots, \sigma_n] \subseteq [\tau_1, \dots, \tau_m].$$

On montre que les propriétés (P5) à (P8) sur la décidabilité des relations et la structure de treillis de l'ensemble des types restent vraies.

9.2. Règles d'affectation

Une base \mathcal{B} est un ensemble d'affectations de la forme σx où x est une variable et σ est un type $\sqsubseteq 1$. Plusieurs types peuvent être affectés à la même variable. Si $\bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ alors $\bar{\sigma} x$ est une abréviation pour $\sigma_1 x, \sigma_2 x, \dots, \sigma_n x$. Le système d'affectation se déduit du système décrit au paragraphe 3 de la manière suivante :

– l'axiome A_p et les règles R_e et R_i sont inchangées;

– les règles R_c et R_a sont remplacées par :

Règle R'_c : Si $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau X$ où $\bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ et si

$$\forall i (1 \leq i \leq n), \mathcal{B} \vdash \sigma_i Y \text{ alors } \mathcal{B} \vdash \tau (XY).$$

Règle R'_a : Si $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$ et si x n'apparaît pas dans \mathcal{B} alors $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau (\lambda x. X)$.

Nous introduisons également la notion de base étendue et les remarques du paragraphe 3 restent valables quant à leur signification.

Exemple 15 : L'expression $(\lambda x. ((x K) a (\Delta\Delta)) (x (KI) (\Delta\Delta) a)) I$ de l'exemple 11 qui n'avait pas de type a un type $\sqsubseteq 0$ dans la théorie étendue dont nous donnons une déduction en annexe.

9.3. Propriétés de l'affectation

Nous montrons ici l'invariance de l'ensemble des types d'une λ -expression par α - β - η conversion. Cette propriété est vraie quelle que soit la base par rapport à laquelle les types sont définis. Auparavant nous énonçons un théorème qui montre que les sous expressions d'une expression typée ont également un type.

PROPOSITION 9 : Soit F une λ -expression différente d'une simple variable et telle que $\mathcal{B} \vdash \tau F$ alors :

- si $F = XY$ alors il existe une séquence $\bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$, telle que

$$\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau X \quad \text{et} \quad \mathcal{B} \vdash \sigma_i Y, \quad \forall i, i=1, n;$$

- si $F = \lambda x. Y$ alors $\tau = [\bar{\sigma}] \rho$ et $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \rho Y$ où x n'apparaît pas dans \mathcal{B} .

La preuve de cette proposition s'obtient facilement à partir de celle de la proposition 1.

LEMME 10 : Si R est un β -radical qui se réduit en R' alors

$$\mathcal{B} \vdash \tau R \Leftrightarrow \mathcal{B} \vdash \tau R'.$$

Condition suffisante :

$R \equiv (\lambda x. X) Y$ et d'après la proposition 9 $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ telle que $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau \lambda x. X$, $\mathcal{B} \vdash \sigma_i Y$, $\forall i=1, n$ et x n'apparaît pas dans \mathcal{B} . D'après la proposition 9 également on peut écrire que $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$. Or $R' \equiv [Y/x] X$ et pour montrer que $\mathcal{B} \vdash \tau [Y/x] X$ il suffit de remplacer dans la preuve de $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$ les occurrences de $\sigma_i x$ (qui ne sont pas dans \mathcal{B}) par les déductions de $\mathcal{B} \vdash \sigma_i Y$ quel que soit i , $1 \leq i \leq n$.

Condition suffisante :

$R \equiv (\lambda x. X) Y$ et deux cas se produisent suivant que x a au moins une occurrence dans X ou non.

– Si oui Y est un sous terme propre de R' . Si Y apparaît n fois dans R' dans la déduction de $\mathcal{B} \vdash \tau R'$ chaque occurrence de Y fait l'objet d'une déduction $\mathcal{B} \vdash \sigma_i Y$ avec $1 \leq i \leq n$. En posant $\bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ pour obtenir $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau X$ il suffit de remplacer les déductions de $\mathcal{B} \vdash \sigma_i Y$ par les affectations $\sigma_i x$. Par la règle R'_c on obtient $\mathcal{B} \vdash \tau (\lambda x. X) Y$.

– Si Y ne figure pas comme sous terme propre de R' c'est que $(\lambda x. X) Y \triangleright X = R'$ c'est-à-dire que x ne figure pas comme variable libre

dans X . Comme $\mathcal{B} \vdash \tau X$ on peut aussi écrire $\mathcal{B}, \sigma x \vdash \tau X$ quel que soit σ . On en déduit que $\mathcal{B} \vdash [\omega] \tau(\lambda x. X)$ et que $\mathcal{B} \vdash \tau(\lambda x. X) Y$.

PROPOSITION 10 : *Si X et X' sont deux expressions β -convertibles elles ont le même ensemble de types.*

La preuve s'obtient en itérant l'application du lemme 10.

THÉORÈME 4 : *Si X et X' sont deux expressions α - β - η convertibles alors elles ont le même ensemble de types.*

Il suffit en fait de montrer que si R est un η -radical et R' son radical réduit ($R \triangleright_\eta R'$) alors $\mathcal{B} \vdash \tau R \Leftrightarrow \mathcal{B} \vdash \tau R'$.

Condition nécessaire :

$R \equiv \lambda x. (M x)$ et x n'apparaît pas dans M . Par la proposition 9 $\tau = [\bar{\sigma}] \rho$ et $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \rho (M x)$. Une deuxième application de cette proposition permet d'écrire qu'il existe $\bar{\sigma}'$ telle que $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash [\bar{\sigma}'] \rho M$ et $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \bar{\sigma}' x$. On en déduit que $\bar{\sigma}' \subseteq \bar{\sigma}$. Comme x n'apparaît pas dans M , $\bar{\sigma} x$ est inutile dans la déduction de $[\bar{\sigma}'] \rho M$ d'où $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}'] \rho M$ et par la règle R_i $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \rho M$ puisque $[\bar{\sigma}] \rho \sqsubseteq [\bar{\sigma}'] \rho$.

Condition suffisante :

$R' \equiv M$ et x n'est pas variable libre de M . On a $\mathcal{B} \vdash \tau M$ et l'on peut écrire $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \tau M, \forall \bar{\sigma}$. Or τ peut se mettre sous la forme $\tau = [\bar{\sigma}] \rho$. On en déduit d'après R'_e que $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \rho M x$ et par R'_a que $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \rho (\lambda x. (M x))$.

Nous montrons également en Annexe II que la suppression des règles R_i et R_e du système de déduction permet également de déduire des ensembles de types qui se conservent par α - β - η conversion. Ce résultat permet de montrer par un autre argument dans [17] que la théorie ainsi obtenue est équivalente à celle présentée dans cet article.

9.4. Propriétés des λ -expressions typées

Nous montrons tout d'abord que toute expression ayant un type distinct de ω a une forme normale gauche. Auparavant nous donnons la définition suivante :

DÉFINITION 11 : Nous appellerons nombre de séquences d'un type τ , notée $||| \tau |||$, le nombre de séquences de ce type comportant plus d'un élément.

Remarque : Étant données les propriétés des séquences on peut toujours pour une expression donnée se limiter sans nuire à la généralité à l'ensemble des types de cette expression tel que, si x apparaît exactement n fois dans l'expression son type est une séquence de n éléments. En effet s'il y a plus de n éléments certains ne sont pas utilisés dans la déduction du type, s'il y a moins de n éléments on peut dupliquer les éléments qui sont utilisés plusieurs fois.

LEMME 11 : Si F et X sont deux formes normales gauches qui vérifient la condition (1) et si dans une base \mathcal{E} , $\mathcal{E} \vdash \tau FX$, $\tau \neq \omega$ alors FX possède une forme normale gauche.

Par la proposition 9 $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ telle que $\mathcal{E} \vdash [\bar{\sigma}] \tau F$ et $\mathcal{E} \vdash \sigma_i X$, $\forall i$, $i = 1, n$.

Si $F \equiv z G_1 \dots G_p$ alors F est une forme normale gauche vérifiant (1) ainsi que FX . Sinon $F \equiv \lambda x. F'$ et la preuve du lemme se fait par récurrence sur r le nombre maximal de séquences présentes dans le type d'une sous-expression quelconque de F et de X .

Première étape : $r = 0$, le type de FX a été calculé sans séquences, il s'agit donc d'un type au sens de la théorie non étendue et par le théorème 2 FX a une forme normale gauche vérifiant (1).

Deuxième étape : Supposons le résultat vrai pour tout r , $r \leq n$ et montrons qu'il est vrai pour $r = n$. Deux cas seront envisagés suivant le nombre m d'éléments de $\bar{\sigma}$.

Cas 1 : $m > 1$.

$\bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_m$ et il y a m occurrences de la variable x dans F' .

Remplaçons chaque occurrence de x par un x_i distinct avec $1 \leq i \leq m$ et soit F_0 l'expression ainsi obtenue à partir de F' . Les deux expressions $(\lambda x. F')X$ et $(\lambda x_1 \dots x_m. F_0)X \dots X$ se réduisent à la même expression. On prouve successivement que $(\lambda x_i \dots \lambda x_m. F_{i-1})X$ se réduit en $\lambda x_{i+1} \dots \lambda x_m. F_i$ où F_i est une forme normale gauche vérifiant (1) quel que soit i . En effet $\mathcal{E} \vdash [\sigma_i][\sigma_{i+1}] \dots [\sigma_m] \tau \lambda x_i \dots \lambda x_m. F_{i-1}$, $\mathcal{E} \vdash \sigma_i X$, $\| [\sigma_i] \dots [\sigma_m] \tau \| < n$ et on applique l'hypothèse de récurrence.

Cas 2 : $m = 1$, $\bar{\sigma} = \sigma$ et deux cas se présentent suivant que :

— il n'existe pas d'occurrence de x dans F' .

$(\lambda x. F')X \triangleright F'$ de type $\tau \neq \omega$ qui est en forme normale gauche de par la condition (1);

— il existe exactement une occurrence de x dans F' et soit $F' \equiv \lambda y_1 \dots \lambda y_p. z G_1 \dots G_q$. Nous considérerons les deux cas suivants.

a) $z \equiv x$. Il suffit de prouver que $XG_1 \dots G_q$ a une forme normale gauche vérifiant (1). Or X est de type $\sigma = [\bar{v}_1] \dots [\bar{v}_q] \Psi$ et $\mathcal{E} \vdash v_{ij} G_i$, $\forall i$, $1 \leq i \leq q$ et $\forall j$ tel que $v_{ij} \in \bar{v}_i$. Comme $\| \sigma \| \leq n$ on fait une récurrence sur $\| \sigma \|$.

Première étape : $\| \sigma \| = 1$, σ est un type atomique qui ne peut être que 0 ou 1. Dans ce cas X , G_1 , \dots , G_q sont des formes normales gauches ayant également le type 0 ou 1. Il en est de même de toutes leurs sous-expressions et aucune

séquence n'est présente dans le type d'aucune sous-expression. D'après le théorème 2 FX a une forme normale gauche qui vérifie (1).

Deuxième étape : Supposons la propriété $\forall \rho$ telle que $\|\rho\| < \|\sigma\|$ et considérons XG_1 . Si \bar{v}_1 est réellement une séquence on est replacé dans les conditions initiales du lemme dans le cas 1 avec $\|\sigma\| \leq n$. Dans ce cas il a été prouvé que XG_1 a une forme normale qui vérifie (1). Si \bar{v}_1 n'est pas une séquence alors $\bar{v}_1 = v_{11}$ et $\|v_{11}\| < \|\sigma\|$. Par hypothèse de récurrence XG_1 a une forme normale gauche qui vérifie (1). En recommençant q fois ce raisonnement on montre que : $XG_1 \dots G_q$ a une forme normale gauche qui vérifie (1).

b) $z \neq x$. Dans ce cas $(\lambda x.F')X$ se réduit à la forme normale gauche $\lambda y_1 \dots y_p. z G'_1 \dots G'_q$ où $G'_i = [X/x]G_i$. Or il n'existe qu'une occurrence de x dans F et donc il existe j , $1 \leq j \leq q$ tel que $G'_j \neq G_j$ et que $G'_i \equiv G_i$, $\forall i \neq j$ qui sont des expressions vérifiant (1). Les seules sous-expressions de G'_j qui nous intéressent sont celles qui possèdent un type distinct de ω et qui d'après (1) sont en forme normale gauche. D'autre part seule celle qui contient la variable x si elle existe a été modifiée par la réduction. Elle est alors de la forme $\lambda z_1 \dots \lambda z_s. XH_1 \dots H_t$ où X est de type σ . Par une démonstration semblable à celle du cas a) on montre que cette expression a une forme normale gauche qui vérifie (1) ainsi donc que toutes les sous-expressions de G'_j ayant un type différent de ω .

LEMME 12 : *Toute forme normale gauche a un type distinct de ω dans une base étendue \mathcal{E} .*

Si $F \equiv \lambda x_1 \dots \lambda x_n. z G_1 \dots G_m$ il suffit d'affecter à z un type $\underbrace{[\omega] \dots [\omega]}_{m \text{ fois}} \tau$, $\tau \neq \omega$.

THÉORÈME 5 : *Si X est une expression quelconque et si $\mathcal{E} \vdash \tau X$ pour une base étendue \mathcal{E} et un type τ distinct de ω alors X se réduit à une forme normale gauche qui vérifie la condition (1).*

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 2.

Nous montrons également que toute expression ayant le type 0 a une forme normale. Auparavant nous montrons le lemme suivant.

LEMME 13 : *Si N et X sont deux expressions vérifiant les conditions (1) et (2) et si $\mathcal{B} \vdash \tau(NX)$ avec $\tau \sqsubseteq 0$ alors NX a une forme normale.*

D'après la proposition 9 si $\mathcal{B} \vdash \tau(NX)$ alors $\exists \bar{\sigma} = \sigma_1, \dots, \sigma_n$ telle que $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \tau N$ et $\mathcal{B} \vdash \sigma_i X$, $\forall i$, $i = 1, n$. Deux cas se présentent :

— N n'a pas d'abstractions initiales. $NX \equiv z N_1 \dots N_m X$ et z variable libre a un type $\Psi \sqsubseteq 1$ dans \mathcal{B} . On en déduit que N_1, \dots, N_m, X ont un type $\sqsubseteq 0$ et d'après (2) elles sont en forme normale ainsi que NX ;

— $N \equiv \lambda x. N'$. Nous ferons une récurrence sur r le nombre maximal de séquences présentes dans le type de l'une quelconque des sous-expressions de N et de X .

Première étape : $r=0$. Le type de NX a été calculé sans séquences et d'après la proposition 7 NX a une forme normale.

Deuxième étape : Supposons le résultat vrai quel que soit $r < n$ et montrons le pour $r=n$.

On distinguera deux cas suivant le nombre d'éléments p de la séquence $\bar{\sigma}$.

Cas 1 : $p > 1$.

Il y a p occurrences de la variable x dans N' qui ont chacune un type σ_i . Remplaçons chacune de ces occurrences par un x_i distinct avec $1 \leq i \leq p$ et x_i correspond à l'occurrence qui a le type σ_i . Soit N_0 l'expression ainsi obtenue à partir de N' , $(\lambda x_1 \dots \lambda x_p. N_0) X \dots X$ et $(\lambda x. N') X$ se réduisent à la même expression. Or $\mathcal{E} \vdash [\sigma_1] \dots [\sigma_p] \tau (\lambda x_1 \dots \lambda x_p. N_0) X \dots X$ et $\mathcal{E} \vdash \sigma_1 X$. Comme $||[\sigma_p] \dots [\sigma_p] \tau|| < n$, par hypothèse de récurrence $(\lambda x_1 \dots \lambda x_p. N_0) X$ se réduit en $\lambda x_2 \dots \lambda x_p. N_1$ de type $[\sigma_2] \dots [\sigma_p] \tau$ qui vérifie (1) d'après le théorème 1. D'autre part la variable x_1 existe en une seule occurrence et est variable de tête d'une sous-expression $H \equiv x_1 G_1 \dots G_q$. Toutes les autres sous-expressions vérifient (2) et il existe une déduction de $\mathcal{B}' \vdash \Psi H$ avec $\sigma = [v_1] \dots [v_q] \Psi$ et $\mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$. Comme $||\Psi|| < ||\sigma|| \leq n$ on en déduit que H vérifie (2) ainsi que toutes les sous-expressions de N_1 . En recommençant p fois ce raisonnement on en déduit que NX se réduit en N_p de type $\tau \sqsubseteq 0$ qui vérifie (2) et qui est donc en forme normale.

Cas 2 : $p=1$, $\bar{\sigma} = \sigma$ et nous distinguerons selon que :

— il n'existe pas d'occurrence de x dans N' .

$(\lambda x. N') X \triangleright N'$ de type $\tau \sqsubseteq 0$ qui vérifie (2) et qui est donc en forme normale;

— il existe exactement une occurrence de x dans N' .

Il suffit de prouver que toutes les sous-expressions de N' se réduisent à une expression vérifiant (1) et (2). Si x est variable de tête d'une expression ayant un type distinct de ω alors celle-ci est en forme normale gauche et soit $H \equiv \lambda y_1 \dots y_s. x G_1 \dots G_t$ cette expression. Si elle n'a un type que par rapport à une base étendue alors elle se réduit à une forme normale gauche vérifiant (1). Sinon $\exists \mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$ telle que \mathcal{B} , $\sigma_x \vdash \mu H$ et $\mu \sqsubseteq 0$ alors d'après R_a , $\mathcal{B} \vdash \mu (\lambda y_1 \dots \lambda y_s. X G_1 \dots G_t)$. On en déduit que $\mu = [\bar{p} 1] \dots [\bar{p} s] \Psi$, $[\bar{p} i] \sqsubseteq 1$, $\forall i=1, s$, $\Psi \sqsubseteq 0$ et que $\sigma = [\bar{v}_1] \dots [\bar{v}_t] \Psi$. Il suffit de montrer que $X G_1 \dots G_t$ de type $\Psi \sqsubseteq 0$ a une forme normale gauche. Comme $||\sigma|| \leq n$ on fait une récurrence sur $||\sigma||$.

Première étape : $\|\sigma\| = 0$. Dans ce cas $X, G_1 \dots G_t$ ont un type atomique 0 ou 1 ainsi que toutes leurs sous-expressions et on applique le théorème 9.

Deuxième étape : Supposons la propriété vraie $\forall \rho, \|\rho\| < \|\sigma\|$.

Dans ce cas on montre que $XG_1, XG_1 G_2, \dots, XG_1 \dots G_t$ se réduisent successivement en X_1, X_2, \dots, X_t qui vérifient les propriétés (1) et (2). X_t ayant un type $\Psi \sqsubseteq 0$ est alors en forme normale. Pour cela on remarque que si \bar{v}_1 est réellement une séquence on est replacé dans les conditions initiales du théorème dans le cas 1 avec $\|\sigma\| \leq n$ et que dans ce cas XG_1 se réduit en X_1 qui vérifient (1) et (2). Sinon \bar{v}_1 n'a qu'un seul élément soit v_{11} et $\|v_{11}\| < \|\sigma\|$. Par hypothèse de récurrence X_1 vérifie (1) et (2). On peut recommencer t fois ce raisonnement.

THÉORÈME 6 : *Si X est une expression quelconque et si $\mathcal{B} \vdash \tau X$ avec $\tau \sqsubseteq 0$ alors X a une forme normale.*

La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 3.

A partir des théorèmes 5 et 6 et du lemme 12 on déduit un théorème qui résume l'ensemble des propriétés de la théorie étendue.

THÉORÈME 7 : *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *une expression quelconque X a une forme normale (respectivement forme normale gauche);*
- *il existe une base \mathcal{B} (respectivement une base étendue \mathcal{E}) et un type $\tau, \tau \sqsubseteq 0$ (respectivement $\tau \neq \omega$) tels que $\mathcal{B} \vdash \tau X$ (respectivement $\mathcal{E} \vdash \tau X$).*

La preuve est évidente puisque deux expressions α - β - η convertibles ont le même ensemble de types, que toute forme normale a le type 0 et que toute forme normale a un type distinct de ω .

La théorie étendue permet de donner un type significatif à toute expression qui n'est pas un terme non résoluble [1], *id est* à la représentation de tout programme qui calcule effectivement quelque chose. Si on applique cette théorie à Y l'ensemble des types que l'on peut affecter à Y est d'après le théorème 4 l'ensemble des types que l'on peut affecter aux expressions de la forme

$$\lambda f.f(f(\dots((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))\dots)),$$

obtenues par réductions successives de Y . C'est l'ensemble des types de la forme $[[\omega] \tau_1, [\tau'_1] \tau_2, \dots, [\tau'_n] \tau_{n+1}] \tau_{n+1}, \tau_i \sqsubseteq \tau'_i, \forall i=1, n$. On en déduit une condition nécessaire et suffisante sur le type de F pour que YFX ait une forme normale :

- F doit avoir les types $[\omega] \tau_1, \dots, [\tau'_n] \tau_{n+1}, \tau_i \sqsubseteq \tau'_i, \forall i=1, n$;
- si σX alors $\tau_{n+1} = [\sigma] \tau$ et $\tau \sqsubseteq 0$.

ANNEXE I

Dédution d'un type de $X \equiv (\lambda x. ((xK) a (\Delta\Delta)) (x(KI) (\Delta\Delta) a)) I$:

$$K \equiv \lambda x \lambda y. x, \quad KI \equiv \lambda x \lambda y. y,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{ & [[0] [\omega] 0] [0] [\omega] 0x, 1a \} \frac{\omega y, 0x \vdash 0x}{Ra} \\ & \frac{0x \vdash [\omega] 0 y. x}{Ra} \\ & \frac{\mathcal{E} \vdash [[0] [\omega] 0] [0] [\omega] 0x \quad \vdash [0] [\omega] 0 \lambda x \lambda y. x}{Rc} \\ & \frac{\mathcal{E} \vdash [0] [\omega] 0 (xK), \quad \mathcal{E} \vdash 0a \quad Ri}{Rc} \\ & \frac{\mathcal{E} \vdash [\omega] 0 ((xK) a), \quad \mathcal{E} \vdash \omega (\Delta\Delta)}{\mathcal{E} \vdash 0 (xKa (\Delta\Delta))} \end{aligned}$$

$$\mathcal{E}' = \{ [[\omega] [1] 1] [\omega] [1] 1x, 1a \}$$

on déduit de la même façon :

$$\mathcal{E}' \vdash 1 (x(KI) (\Delta\Delta) a),$$

$$\mathcal{E}'' = \mathcal{E}' \cup \mathcal{E}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{E} \vdash 0 (xKa (\Delta\Delta)), \quad \mathcal{E}' \vdash 1 (x(KI) (\Delta\Delta) a)}{Rc} \\ & \frac{\mathcal{E}'' \vdash 0 (xKa (\Delta\Delta)) (x(KI) (\Delta\Delta) a)}{Ra} \end{aligned}$$

$$1a \vdash [[0] [\omega] 0] [0] [\omega] 0, [[\omega] [1] 1] [\omega] [1] 1 0 (\lambda x. ((xK) a (\Delta\Delta)) (x(KI) (\Delta\Delta) a)).$$

Comme on peut déduire $\vdash [\sigma] \sigma I$, $\forall \sigma$ on a :

$$[[0] [\omega] 0] [0] [\omega] 0I \quad \text{et} \quad [[\omega] [1] 1] [\omega] [1] 1I,$$

d'où $1a \vdash 0X$.

ANNEXE II

Dans cette annexe nous considérons la théorie de types construite sur l'ensemble T' en utilisant l'axiome A_p et les règles de déduction R'_a et R'_c (suppression des règles R_i et R_e). Nous noterons $\mathcal{B} \vdash^\tau M$ la déduction du type τ pour l'expression M dans cette théorie et nous montrons que deux expressions β - η -convertibles ont alors deux ensembles de types égaux modulo l'application

des axiomes A'_0 et A'_1 . Les preuves concernant les propriétés de normalisation dans cette théorie sont données dans [17]. Nous montrons tout d'abord que :

PROPOSITION A : Si $M =_{\beta} N$ alors $\mathcal{B} \vdash \tau M$ si et seulement si

$$\mathcal{B} \vdash \tau N.$$

L'examen du lemme 10 et de la proposition 10 suffit pour voir que la preuve est identique.

Il reste à montrer la propriété dans le cas de η -conversion et tout d'abord sur les β - Ω -formes normales. Nous dirons que deux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont égales, $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, si $\forall \bar{\sigma}, x \in \mathcal{B}$ il existe $\bar{\sigma}' = \bar{\sigma}$ tel que $\bar{\sigma}' x \in \mathcal{B}'$.

- LEMME A : Soient X et X' deux β - Ω -formes normales η -convertibles, alors si $\mathcal{B} \vdash \tau X$ il existe $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ et $\tau' = \tau$ tels que $\mathcal{B}' \vdash \tau' X'$.

La démonstration se fait par double récurrence sur $|X|$ et sur p le nombre de η -conversions nécessaires pour passer de X à X' .

Première étape : $|X| = 1$. Deux cas se présentent :

- $X = X' = \Omega$. X et X' n'ont que le type ω ;
- $X = y$.

1) $p = 1$, $X' = \lambda x. yx$, $\mathcal{B} = \{\tau y\}$ et $\mathcal{B} \vdash \tau y$:

α) si $\tau = [\bar{\sigma}] \rho$ on peut déduire $\mathcal{B}, \bar{\sigma} x \vdash \rho y$ et $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}] \rho \lambda x. yx$;

β) si $\|\tau\| = 1$ nous considérerons le cas $\tau = 0$. Alors il existe $\mathcal{B}' = \{[1]0 y\}$ tel que \mathcal{B}' , $1x \vdash 0 yx$ et $\mathcal{B}' \vdash [1]0 \lambda x. yx$. Or $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et $0 = [1]0$. Démonstration identique pour $\tau = 1$.

2) Supposons la propriété vraie pour $\|\rho\| \leq k$ et montrons la pour k $X' = \lambda x_1 \dots x_n. y X'_1 \dots X'_n$ avec $X'_i =_{\eta} X_i$, $\forall i = 1, n$.

Il existe $\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n$ tels que $\tau = [\bar{\sigma}_1] \dots [\bar{\sigma}_n] \rho$ et on en déduit que $[\bar{\sigma}_1] \dots [\bar{\sigma}_n] \rho y \vdash [\bar{\sigma}_1] \dots [\bar{\sigma}_n] \rho \bar{X}$ avec $\bar{X} = \lambda x_1 \dots x_n. yx_1 \dots x_n$. D'autre part par hypothèse de récurrence x_i et X'_i ont même ensembles de types, c'est-à-dire que quel que soit i il existe $\bar{\sigma}'_i = \bar{\sigma}_i$ tel que $\bar{\sigma}'_i x_i \vdash \bar{\sigma}'_i X'_i$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}' &= \{[\bar{\sigma}'_1] \dots [\bar{\sigma}'_n] \rho y\}, & \mathcal{B} &= \mathcal{B}', \\ \mathcal{B}' \vdash [\bar{\sigma}'_1] \dots [\bar{\sigma}'_n] \rho X' & \quad \text{et} \quad & [\bar{\sigma}'_1] \dots [\bar{\sigma}'_n] \rho &= \tau. \end{aligned}$$

Deuxième étape : Supposons la propriété vraie $\forall X$ tel que $|X| \leq q$ et soit X de taille q :

$$\begin{aligned} X &\equiv \lambda x_1 \dots x_n. z X_1 \dots X_m, \\ X' &\equiv \lambda x_1 \dots x_{n+h}. z X'_1 \dots X'_{m+h}. \end{aligned}$$

Nous montrerons uniquement dans le cas $h \geq 0$ la preuve par $h < 0$ étant tout à fait semblable.

Nous avons $X'_{m+j} =_{\eta} x_{n+j}$, $\forall j=1, h$ et $X_i =_{\eta} X'_i$, $\forall i=1, m$. Deux cas sont à considérer selon que :

1) z est libre : $\mathcal{B}, \alpha z \vdash [\bar{\sigma}_1] \dots [\bar{\sigma}_n] \rho X$ avec $\alpha \equiv [\bar{v}_1] \dots [\bar{v}_m] \rho$ et si $\mathcal{B}, \alpha z, \bar{\sigma}_1 x_1, \dots, \bar{\sigma}_n x_n = \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1 \vdash \bar{v}_i X_i, \forall i=1, m$. Par hypothèse de récurrence on déduit qu'il existe $\mathcal{B}_1^{(i)}$ et \bar{v}'_i tels que pour tout $i=1, m$, $\mathcal{B}_1^{(i)} = \mathcal{B}_1$, $\bar{v}'_i = \bar{v}_i$ et $\mathcal{B}_1^{(i)} \vdash \bar{v}'_i X'_i$. Considérons $\mathcal{B}_2 = \bigcup_{i=1, m} \mathcal{B}_1^{(i)}$ alors $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1$. D'autre part il existe $\bar{v}_{m+1}, \dots, \bar{v}_{m+h}$ et ρ' tels que $\rho = [\bar{v}_{m+1}] \dots [\bar{v}_{m+h}] \rho'$. Comme $X =_{\eta} X'$ on a $X'_{m+j} =_{\eta} x_{m+j}$, $\forall j=1, h$ et x_{m+j} n'apparaît pas dans $X'_1 \dots X'_m$. Par hypothèse de récurrence il existe $\bar{v}'_{m+j} = \bar{v}_{m+j}$, $\forall j=1, h$ tel que $\bar{v}'_{m+j} x_{m+j} \vdash \bar{v}'_{m+j} X'_{m+j}$ ce qui permet d'écrire en posant

$$\alpha' = [\bar{v}'_1] \dots [\bar{v}'_{m+h}] \rho' \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}', \quad [\bar{\sigma}'_1] x_1, \dots, [\bar{\sigma}'_n] x_n, \\ \mathcal{B}', \quad \alpha' z, \quad \bar{v}'_{m+1} x_{m+1}, \dots, \bar{v}'_{m+h} x_{m+h} \vdash \rho' (z X'_1 \dots X'_{m+h}),$$

d'où $\mathcal{B}', \alpha' z \vdash [\bar{\sigma}'_1] \dots [\bar{\sigma}'_n] \rho' X'$.

2) $z \equiv x_l : 1 \leq l \leq n$.

Dans ce cas $\mathcal{B} \vdash [\bar{\sigma}_1] \dots [\bar{\sigma}_n] \rho X$ où $\bar{\sigma}_l$ est de la forme $\alpha, \bar{\tau}_l$ avec α type de l'occurrence de z jouant le rôle de variable principale. Un raisonnement analogue conduit une déduction de $\mathcal{B}' \vdash [\bar{\sigma}'_1] \dots [\bar{\sigma}'_n] \rho' X'$ où $\bar{\sigma}'_l$ est de la forme $\alpha', \bar{\tau}'_l$ avec $\alpha = \alpha'$ et $\tau_l = \tau'_l$ et plus généralement $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, $\bar{\sigma}_i = \bar{\sigma}'_i$ et $\rho = \rho'$.

Pour montrer la conservation des ensembles de types par η -conversion pour des expressions quelconques nous nous servirons des deux lemmes suivants :

LEMME B : Si $\mathcal{B} \vdash \tau M$, $\tau \neq \omega$ alors il existe un approximant A de M tel que $\mathcal{B} \vdash \tau A$.

La preuve de ce lemme [17] montre également que A s'obtient à partir de M en réduisant tous les radicaux ayant un type distinct de ω et en remplaçant dans l'expression ainsi obtenue toutes les sous-expressions de type ω par Ω .

LEMME C : Si A est un approximant de M et si $\mathcal{B} \vdash \tau A$ (resp. $\mathcal{B} \vdash \tau A$) alors $\mathcal{B} \vdash \tau M$ (resp. $\mathcal{B} \vdash \tau M$).

Si A est un approximant de M alors $M \triangleright M'$ et A s'obtient à partir de M' en remplaçant des sous-expressions de M' par Ω . Si $\mathcal{B} \vdash \tau A$ on obtient une déduction de $\mathcal{B} \vdash \tau M'$ en affectant le type ω à toutes les sous-expressions de M' qui sont remplacées par Ω dans A . D'après le théorème A on a donc $\mathcal{B} \vdash \tau M$.

Nous sommes alors en mesure de prouver :

PROPOSITION B : Si $M =_{\beta\eta} N$ alors si $\mathcal{B} \vdash \tau M$ il existe $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ et $\tau' = \tau$ tels que $\mathcal{B}' \vdash \tau' N$.

En effet d'après le lemme B si $\mathcal{B} \vdash \tau M$ il existe en approximant A de M tel que $\mathcal{B} \vdash \tau A$. D'autre part N possède un approximant A' tel que $A = {}_{\eta} A'$. Comme A et A' sont deux β - Ω formes normales on en déduit qu'il existe $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$, $\tau' = \tau$ tels que $\mathcal{B}' \vdash \tau' A'$. D'après le lemme C on obtient $\mathcal{B}' \vdash \tau' N$.

Nous donnons enfin la preuve d'un lemme très technique qui est utilisé dans [9] et qui établit que si $X \triangleright X'$ la « taille » de la déduction d'un type τ pour X est plus grande que celle de τ pour X' . Pour cela nous introduisons les notions suivantes :

Soit D une déduction de $\mathcal{B} \vdash \sigma X$ et $R \equiv (\lambda x. Y) Z$ un radical de X .

L'ensemble caractéristique de R dans D se définit par

$$C(R) = \{ \tau \mid \tau \neq \omega \text{ et } \tau \text{ est un type de } \lambda x. Y \text{ dans } D \}.$$

Le poids de R $h(R) = \max \{ \|\tau\| \mid \tau \in C(R) \}$.

Une composante significative Y de X dans une déduction D de $\mathcal{B} \vdash \sigma X$ est une composante de X qui n'est pas composante d'une composante Z de X qui n'a que le type ω dans D .

La mesure d'une déduction D de $\mathcal{B} \vdash \sigma X$ est une paire d'entiers non négatifs $\langle m(D), n(D) \rangle$ définie par : $m(D)$ est le poids maximal des radicaux significatifs de X dans D ; $n(D)$ est le nombre de radicaux de poids $m(D)$ dans D .

Nous ordonnons les paires d'entiers par l'ordre lexicographique usuel ($\langle h', k' \rangle \leq \langle h, k \rangle$ ssi $h' < h$ ou $k' \leq k$).

Nous montrons alors que :

PROPOSITION C : Soit D une déduction de $\mathcal{B} \vdash \tau X$ dont la mesure n'est pas $\langle 0, 0 \rangle$. Alors il existe un terme X' et une déduction D' de $\mathcal{B} \vdash \tau X'$ telle que $X \triangleright X'$ et que la mesure de D' soit plus petite que celle de D .

Démonstration : Si $m(D) = 0$ alors tout radical de X a pour poids 0, il n'a que le type ω et est non significatif. On en déduit que $n(D) = 0$.

D'autre part aucun radical ne peut avoir de type de taille égale à 1 et différent de ω . $m(D) = 1$ ne se produit jamais.

Reste le cas de $m(D) \geq 2$, $n(D) > 0$ et soit alors $R \equiv (\lambda x. Y) Z$ de poids $m(D)$ et soit $R' = [Z/x] Y$. Il suffit de montrer que le poids des radicaux créés par la réduction de R est inférieur à $m(D)$. Or quel que soit $\tau = [\bar{\tau}_1] \tau_2$, $\tau \in C(R)$, $\|\bar{\tau}_1\| < m(D)$. L'ensemble des types de Z ont une taille inférieure à $m(D)$.

— $Z \equiv \lambda y. \bar{Z}$ et xY_1 est une sous-expression de Y . $C((\lambda y. \bar{Z}) Y_1)$ est égal à l'ensemble des types de Z et a un poids inférieur à $m(D)$.

— $R' \equiv Z \equiv \lambda y. \bar{Z}$ et $R' Q$ est une sous-expression de X ; $h((\lambda y. \bar{Z}) Q) < m(D)$ par les mêmes raisons.

— $R \equiv (\lambda xy. \bar{Y})Z$ et RQ est une sous-expression de X dans ce cas
 $\forall \tau = [\bar{\tau}_1] [\bar{\tau}_2] \tau_3, \tau \in C(R), \|\bar{\tau}_2\| \tau_3 \leq m(D)$ et l'ensemble de ces types constitue
 $C((\lambda y. [Z/x] \bar{Y})Q)$ de poids inférieur à $m(D)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. P. BARENDREGT, *Some Extensional Term Models for Combinatory Logics and λ -calculi*, Ph. D. thesis, Utrecht University, the Netherlands, 1971.
2. C. BÖHM, *The CUCH as a Formal and Description Language*, in *Formal Language, Description Languages for Computer Programming*, T. B. STEAL JR., éd., p. 179-197, 1966, North Holland, Amsterdam.
3. C. BÖHM et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *Lambda-Terms as Total or Partial Function on Normal Forms*, *Lambda Calculus and Computer Science Theory*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 37, 1975, p. 96-121, Springer Verlag.
4. C. BÖHM et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *Termination Test Inside λ -Calculus*, *Automata Languages and Programming*, A. SOLOMA, éd., Lecture Notes in Computer Science, vol. 52, 1977, Springer-Verlag, Turku.
5. H. B. CURRY, J. R. HINDLEY et J. P. SELDIN, *Combinatory Logic*, vol. 2, 1972, Amsterdam, North Holland.
6. M. COPPO et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *A Proposal for a New Type Assignment for λ -Terms*, Rapport Interne, Université de Turin, 1976.
7. M. COPPO et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *A Generalized Type Theory for λ -Calculus*, Rapport Interne, Université de Turin, 1977.
8. M. COPPO et M. DEZANI-CIANCAGLINI, *A New Type Assignment for λ -Terms*, in *Archiv Für Math. Logik und Grundlagforschung*, vol. 19, 1978, p. 1-17.
9. M. COPPO, M. DEZANI-CIANCAGLINI et P. SALLÉ, *Functional Characterisation of Some Semantic Equalities Inside λ -Calculus*, *Automata Languages and Programming*, E. MAURER, éd., Lecture Notes in Computer Science, 1979.
10. J. P. LANDIN, *A Correspondence between ALGOL-60 and Church's λ -Notation*, C.A.C.M., vol. 8, February and March 1965, p. 89-101 et 158-165.
11. J. H. MORRIS, *Lambda Calculus Models of Programming Languages*, Ph. D., M.I.T., 1968.
12. L. NOLIN, *Les modèles Informatiques des λ -calculs*, *λ -Calculus and Computer Science Theory*, Proceedings of the Symposium Held in Rome, C. BÖHM, éd., Springer Verlag, 1975, p. 166-176.
13. B. ROBINET, *Contribution à l'étude des réalités informatiques*, Thèse Doctorat, n° I.P. 74-9, Paris, 1974.
14. B. ROBINET et F. NOZICK, *Sémantique des structures de contrôle*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, n° 1, 1977, p. 63-74.
15. B. ROBINET, *Un modèle fonctionnel des structures de contrôle*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, n° 3, 1977, p. 213-236.
16. L. E. SANCHIS, *Types of Combinatory Logic*, Notre Dame Journal of Formal Logic, (5), 1964, p. 161-180.
17. P. SALLÉ, *Types et étiquettes dans le λ -calcul* (à paraître).

18. P. SALLÉ, *La notion de types en λ -calcul*, Groupe Programmation et Languages A.F.C.E.T., Bulletin n° 3, 1978.
19. P. SALLÉ, *Une extension de la théorie des types en λ -calcul*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 62, 1978, Springer Verlag, p. 398-410.
20. P. SALLÉ et J. L. DURIEUX, *L'échappement comme sémantique des structures de contrôle*, Actes du Congrès A.F.C.E.T. T.T.I., Gif-sur-Yvette, novembre 1978, p. 77-87.
21. C. P. WADSWORTH, *The Relation Between Lambda Expressions and Their Denotations in Scott's Models for the λ -Calculus*, Séminaire I.R.I.A., 1974.