RAIRO. INFORMATIQUE THÉORIQUE

GÜNTER HOTZ

Über die darstellbarkeit des syntaktischen monoïdes kontextfreier sprachen

RAIRO. Informatique théorique, tome 13, nº 4 (1979), p. 337-345

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1979__13_4_337_0>

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Informatique théorique/Theoretical Informatics
(vol. 13, n° 4, 1979, p. 337 à 345)

ÜBER DIE DARSTELLBARKEIT DES SYNTAKTISCHEN MONOÏDES KONTEXTFREIER SPRACHEN (*)

von Günter HOTZ [1]

Communiqué par J.-F. PERROT

Résumé. — *Il n'existe pas de méthode effective pour construire une présentation récursive du monoïde syntactique d'un langage algébrique à partir de la grammaire qui l'engendre. Il y a des langages « context-sensitive » L pour lesquels le problème des mots dans le monoïde syntactique $S(L)$ n'est pas décidable. Ceci découle du résultat plus général, que le problème des mots dans le monoïde syntactique $S(L)$ d'un langage L décidable est lui-même décidable si $S(L)$ a une présentation récursive. La question reste ouverte pour les langages algébriques.*

Soit G une grammaire algébrique réduite et $\mathfrak{M}(G)$ le quotient du monoïde libre engendré par l'alphabet de G par la congruence engendrée par les productions de G (prises comme relations). Si le monoïde $\mathfrak{M}(G)$ est simplifiable, alors $\mathfrak{M}(G)$ ne dépend que du langage $L(G)$. Si G est « Sans impasses » (ou « à non-terminaux séparés ») alors $S(L(G))=\mathfrak{M}(G)$. Il suit alors de la première partie que le problème des mots dans $S(L)$ est décidable.

Abstract. — *There are no effective Methods to construct recursive presentations for the syntactic monoid of c.f. languages from the generating grammars. There are c.s. languages L such that the word problem for the syntactic monoid $S(L)$ is not decidable. This follows from the general result, that the word problem of the syntactic monoid $S(L)$ of a decidable language L is decidable if $S(L)$ has a recursive presentation. For c.f. languages this decidability question remains open.*

Let G be a reduced c.f. grammar and $\mathfrak{M}(G)$ the quotient of the free monoid of the Alphabet of G by the production system P of G. If in $\mathfrak{M}(G)$ the cancellation laws hold, then $\mathfrak{M}(G)$ only depends from $L(G)$. If G is "sackgassenfrei" then $S(L(G))=\mathfrak{M}(G)$. It follows then from part 1 that the word problem in $S(L)$ is decidable.

1. EINLEITUNG UND NOTATIONEN

Wir interessieren uns für Kriterien, die es für kontextfreie Grammatiken G und G' mitunter zu entscheiden erlauben, ob $L(G)\neq L(G')$ ist. Solche Kriterien nennen wir Invarianten k.f. Sprachen, da ihre Aussage gegenüber dem Wechsel von k.f. Grammatiken invariant bleibt, falls beide Grammatiken die gleiche Sprache erzeugen. Wir haben in [3] gezeigt, daß die Gruppe $\mathfrak{G}(G)=F(V\cup T)/P$

(*) Reçu octobre 1978, révisé mai 1979.

([1]) Fachbereich : Angewandte Mathematik und Informatik, Universität des Saarlandes, Saarbrücken.

© Bordas-Dunod

mit $V \cup T$ Alphabet von G, $F(V \cup T)$ die freie Gruppe über $V \cup T$ und P das Produktionensystem von G eine solche Invariante ist. Wir haben dort die Frage aufgeworfen, wie schwer das syntaktische Monoid $S(L(G))$ berechenbar ist. Das syntaktische Monoid ist per Definitionem eine k.f. Invariante. Könnte man für die syntaktischen Monoide endliche Darstellungen effektiv angeben, dann könnte man aus diesen leichter einfachere Invarianten ableiten. Leider können wir zeigen, daß das syntaktische Monoid im allgemeinen keine endliche Darstellung besitzt, ja darüber hinaus, daß es nicht einmal eine Darstellung durch ein endliches Erzeugendensystem und ein rekursiv aufzählbares Relationensystem bezitzt, d.h. keine rekursiv aufzählbare Dartellung besitzt.

Wir bezeichnen k.f. Grammatiken mit $G=(V, T, P, S)$ worin $V \cap T=\emptyset$, $P \subset V \times (V \cup T)^*$ und $S \in V$ ist. V ist das Variablenalphabet und T das Terminalalphabet von G. Die durch G erzeugte Sprache sei $L=L(G)$. Ist w' aus w mittels P ableitbar, dann schreiben wir $w \underset{P}{\rightarrow} w'$ oder kürzer $w \rightarrow w'$.

Wie üblich definieren wir die syntaktische Kongruenz nach $L \subset T^*$.

$$w=w'(L): \quad \Leftrightarrow \quad (\forall u, v \in T^*) \qquad (uwv \in L \Leftrightarrow uw'v \in L).$$

Das Faktormonoid von T^*, das man durch diese Kongruenz erhält bezeichnen wir mit $S(L)$. $S(L)$ ist das syntaktische Monoid von L in T^*. Liegen $w, w' \in T^*$ in der selben Klasse von $S(L)$, dann schreiben wir auch

$$w=w' \, S(L).$$

Wir definieren weiter das Monoid

$$\mathfrak{M}(G)=:(V \cup T)^*/\overline{P}.$$

$\mathfrak{M}(G)$ erhält man also aus dem freien Monoid $(V \cup T)^*$ durch Faktorisierung nach dem Produktionssystem P, das hier als Relationensystem $\overline{P}$ verwendet wird. $\overline{P}=P \cup \{(p, q)/(q, p) \in P\}$. Wir werden weiter noch die Sprache $L_R(G)$ verwenden, die man aus dem Axiom S durch Anwendung der Relationen von $\overline{P}$ in T^* erzeugen kann.

2. DAS WORTPROBLEM IM SYNTAKTISCHEN MONOID $S(L)$

Wir zeigen zunächst das :

LEMMA 1 : *Das Wortproblem ist für syntaktische Monoide kontextfreier Sprachen nicht generell entscheidbar.*

Beweis : Wir verwenden die Menge

$$R(L, w):=\{(u, v) \in T^* \times T^* \mid uwv \in L\}.$$

Offensichtlich gilt

$$w = w' \, S(L) \quad \Leftrightarrow \quad R(L, w) = R(L, w').$$

Wir bilden nun aus T verschiedene neue Alphabete.

Seit T' ein zu T gleichmächtiges Alphabet, und

$$t \rightarrow t'$$

sei eine Bijection zwischen T und T'. Weiter sei $T \cap T' = \emptyset$. Wir setzen $T_t = (T - \{t\}) \cup \{t'\}$.

Also ersetzt man t in T durch t', dann erhält man T_t.

Der Grammatik G ordnen wir die Grammatik G_t zu. Diese erhält man aus G, indem man jedes vorkommende t durch t' ersetzt.

Seien nun G und $\overline{G}$ zwei kontextfreie Grammatiken mit $T = \overline{T}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen $V \cap \overline{V} = \{S\}$.

Nun bilden wir für alle $t \in T$ die kontextfreien Grammatiken $G \cup \overline{G}_t$, wobei die Vereinigung komponentenweise zu nehmen ist. Es sei $L_t = L(G \cup \overline{G}_t)$.

Es gilt dann

$$L(G) = L(G') \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{t \in T} \; R(L_t, t) = R(L_t, t').$$

Also haben wir

$$L(G) = L(G') \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{t \in T} \; t = t' \, S(L_t).$$

Wäre also $t = t' \, S(L_t)$ für alle $t \in T$ entscheidbar, dann könnte man die Gleichheit $L(G) = L(G')$ für beliebige kontextfreie Grammatiken entscheiden, was bekanntlich nicht möglich ist.

Also ist das Wortproblem für syntaktische Monoide nicht generell entscheidbar.

Damit ist noch nicht gezeigt, daß es syntaktische Monoide mit unentscheidbarem Wortproblem gibt. Aber es gibt kein Verfahren, das für alle kontextfreien Grammatiken G und $w, w' \in T^*$, $w = w' \, S(L(G))$ entscheidet.

LEMMA 2 : *Ist $L \subset T^*$, und ist L entscheidbar, dann gibt es eine injektive Aufzählung der Elemente von $S(L)$.*

Beweis : Eine injektive Aufzählung von $S(L)$ ist eine injektive Aufzählung eines Repräsentantensystems der Elemente von $S(L)$. Wir suchen also eine injektive berechenbare Abbildung $g : \mathbb{N} \rightarrow T^*$ mit $g(i) \neq g(j) \, S(L)$ für $i \neq j$ und zu jedem $w \in T^*$ gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $g(i) = w \, S(L)$.

Wir gehen von einer berechenbaren Aufzählung $f : \mathbb{N} \to T^* \times T^* \times T^*$ aus. Wir schreiben $f(i)=(U_i, W_i, V_i)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß entweder $W_i = W_{i+1}$ ist oder $(U_i, V_i)=(U_{i+1}, V_{i+1})$ für $i \in \mathbb{N}$.

Wir definieren

$$w \underset{i}{=} w' : \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } j \leqq i \text{ gilt} \qquad (u_j w v_j \in L \Leftrightarrow u_j w' v_j \in L).$$

Da das Wortproblem $w \in L$ entscheidbar ist, ist auch die Äquivalenz $\underset{i}{=}$ für jedes feste i entscheidbar.

Wir bilden nun lineare Listen L_x^i für $i \in \mathbb{N}$ und gewisse $x \in T^*$. Diese Listen haben für jedes i die Eigenschaften 1, 2, 3 :

1. x ist das erste Element der Liste L_x^i. Für jedes Element $y \in L_x^i$ gilt $y \underset{i}{=} x$.

2. Zu jedem $y \in L_x^i$ gibt es ein $l \leqq i$ mit $y = w_1$. Ist $l \leqq i$ und gilt $x \underset{i}{=} w_l$, dann kommt w_l in L_x^i vor.

3. Ist $L_x^i \neq L_y^i$, dann ist $x \underset{i}{\neq} y$.

4. Gibt es für x eine Liste L_x^i, dann gibt es auch eine Liste L_x^{i+1}.

Wir nennen x den Führer von L_x^i. Da aus $x \underset{i}{\neq} y$ folgt, daß auch $x \neq y\, S(L)$ gilt, repräsentieren verschiedene Listenführer auch verschiedene Elementen aus $S(L)$. Da f ganz $T^* \times T^* \times T^*$ aufzählt, gibt es zu $x \neq y\, S(L)$, auch ein i mit $x \underset{i}{\neq} y$ und zu jedem $w \in T^*$ ein i und x mit w liegt in L_x^i.

Können wir ein solches System von Listen effektiv aus f konstruieren, dann erhalten wir damit auch eine berechenbare Aufzählung der Listenführer, diese Aufzählung ist aber gerade eine injektive Aufzählung eines Repräsentantensystems der Elemente von $S(L)$.

Wir geben nun die Konstruktion für das Listensystem L_x^i an. Für $i = 1$ haben wir nur eine Liste, namlich $L_{w_1}^1$. $L_{w_1}^1$ enthält nur w_1.

Seien die Listen L_x^i bereits konstruiert.

Wir geben an, wie man daraus die Listen L_x^{i+1} bildet. Hierzu betrachten wir zwei Fälle.

Fall 1 : $w_i \neq w_{i+1}$, $(U_i, V_i) \neq (U_{i+1}, V_{i+1})$.

Wir testen für alle Führer x der Listen L_x^i $x \underset{i}{=} W_{i+1}$.

Finden wir ein $x \underset{i}{=} W_{i+1}$, dann nehmen wir W_{i+1} als letztes Element in die Liste L_x^i auf und erhalten so L_x^{i+1}.

Die anderen Listen bleiden unverändert.

Finden wir kein solches x, dann bilden wir die neue Liste $L_{w_{i+1}}^{i+1}$.

Die übrigen Listen L_x^i werden unverändert als Listen L_x^{i+1} übernommen.

Fall 2 : $w_i = w_{i+1}$, $(U_i, V_i) \neq (U_{i+1}, V_{i+1})$.

In diesem Falle testen wir, ob die Listen bezüglich $\underset{i+1}{=}$ noch die Eigenschaft 1 erfüllen.

Listen, die diese Eigenschaft nicht mehr erfüllen, werden so in Listen zerlegt, daß jede Liste nur bezüglich $\underset{i+1}{=}$ gleiche Elemente enthält, und daß verschiedene Listen bezüglich $\underset{i+1}{=}$ ungleiche Führer besitzen. Die Listenführer der alten Listen bleiben auch Listenführer einer neuen Liste.

Die Listen mit den alten Listenführern behalten ihren Platz, die neuen Listen werden in der Folge der Listen hinten aufgereiht. Indem wir diese Konstruktion auf jede Liste L_x^i anwenden, erhalten wir die Listen L_x^{i+1}.

Da $w \in L$ entscheidbar ist, ist dies ein effektives Verfahren. Damit ist unser Lemma bewiesen.

SATZ 1 : *Ist L entscheidbar, und besitzt das syntaktische Monoid $S(L)$ eine rekursiv aufzählbare Darstellung, dann ist das Wortproblem in $S(L)$ entscheidbar.*

Beweis : Ist $S(L)$ endlich darstellbar, dann gibt definitionsgemäß ein endliches Alphabet X^u und ein endliches Relationensystem R, so daß $S(L)$ isomorph ist zu $(X^u \cup T)^*/R$. Dann ist aber jede der Klassen von $S(L)$ aufzählbar. Da nach Lemma 2 auch die Elemente von $S(L)$ aufzählbar sind, kann man aus beiden Aufzählungen eine Aufzählung von T^* konstruieren. Dies geschieht, indem wir abwechselnd einen neuen Repräsentanten erzeugen und dann in jeder Klasse der bereits erzeugten Repräsentanten ein weiteres Element aufzählen. Damit sind wir in der Lage, das Wortproblem in $S(L)$ zu lösen. Sind $w, w' \in T^*$ gegeben, dann zählen wir T^* so lange auf, bis w und w' erschienen sind. Es ist $w = w' \, S(L)$ genau dann, wenn w und w' bei dieser Aufzählung zu dem gleichen Repräsentanten gehören. Dies ergibt sich aber aus der Injektivität der Aufzählung von $S(L)$. Also ist $w = w' \, S(L)$ entscheidbar.

Dem Referenten verdanke ich den Hinweis auf [1], Vol. 2, wo gezeigt wird, daß man auf das Erweiterungsalphabet X^u verzichten kann. Aus unserem Beweis ergibt sich, daß für beliebige rekursiv darstellbare Monoide mit endlichem Erzeugendensystem, die injektiv aufzählbar sind, das Wortproblem entscheidbar ist.

Aus Lemma 1 und Satz 1 folgt nun weiter der.

SATZ 2 : *Es gibt kein effektives Verfahren zu jeder k.f. Grammatik G eine rekursiv aufzählbare Darstellung von $S(L(G))$ zu konstruieren.*

Dies zeigt, daß die Theorie der syntaktischen Monoide nicht trivial ist.

Wie J. Sakarovitch in seiner Thesis [4] gezeigt hat, gibt es kontextfreie Sprachen L, deren syntaktisches Monoid keine endliche Darstellung besitzt. Allerdings hat sein Beispiel $S(L)$ eine rekursiv aufzählbare Darstellung, so daß es offen bleibt, ob es kontextfreie Sprachen L gibt, für die das Wortproblem in $S(L)$ nicht entscheidbar ist.

Für die Menge $LCS(T)$ der kontextsensitiven Sprachen über T mit card $T \geqq 2$ zeigt man aber leicht, daß sie solche Sprachen enthält. Zunächst geben wir die folgende

DEFINITION : Sei $C(T)$ eine Klasse von Grammatiken mit T als Terminalalphabet. $C(T)$ enthält ein $C(T)$-*universelles* Element G_u, wenn es eine Abbildung $g : C(T) \times T^* \to T^*$ gibt, die 1), 2) und 3) erfüllt :

1) $g(G, w) = g_1(G) . g(w)$ für $G \in C(T)$, $w \in T^*$;

2) $L(G_u) = \{ g(G, w) \mid G \in C(T), w \in L(G) \}$;

3) Aus $ug_1(G)v \in L(G)$ folgt $u=1$. Aus $g_1(G)g_2(w) = g_1(G')g_2(w')$ folgt $G=G'$, $w=w'$.

LEMMA 3 : *Sei $C(T)$ eine Menge von Grammatiken, die ein $C(T)$-universelles Element G_u enthält. g sei die Abbildung, die zu G_u gehört.*

Ist $L(G) = L(G')$ für $G, G' \in C(T)$ nicht entscheidbar, dann gibt es $G \in C$, so daß das Wortproblem für $S(L(G))$ nicht entscheidbar ist.

Beweis : Wir betrachten $L_u = L(G_u)$. Offensichtlich gilt

$$g(G) = g(G') S(L_u),$$

genau dann wenn $L(G) = L(G')$ ist.

Nach Voraussetzung ist aber $L(G) = L(G')$ für $G, G' \in C(T)$ nicht entscheidbar. Also ist das Wortproblem in $S(L_u)$ nicht entscheidbar.

Hieraus und aus Satz 1 folgt das :

LEMMA 4 : *Erfüllt $C(T)$ die Voraussetzungen des Lemma 3, und ist das Wortproblem für jedes $L = L(G)$, $G \in C(T)$ entscheidbar, dann gibt es $G \in C(T)$, so daß $S(L(G))$ keine rekursiv aufzählbare Darstellung besitzt.*

Verwenden wir nun das Resultat aus [2], wo gezeigt wird, daß die Klasse $CS(T)$ ein bezüglich $CS(T)$ universelles Element besitzt, dann haben wir weiter den :

SATZ 3 : *Es gibt kontext-sensitive Sprachen L, derart daß $S(L)$ keine rekursiv aufzählbare Darstellung besitzt.*

3. SPEZIELLE SYNTAKTISCHE MONOIDE

Wir untersuchen nun die Frage, wie das syntaktische Monoid $S(L)$ der k.f. Sprache $L=L(G)$ mit dem endlich dargestellten Monoid $\mathfrak{M}(G)$ zusammenhängt. $\mathfrak{M}(G)$ ist das Faktormonoid von $(T \cup V)^*$ nach dem durch das Produktionensystem P definierten Relationensystem.

Man zeigt, wie es in [3] für die Gruppe $\mathfrak{G}(G)$ durchgeführt wurde, den.

SATZ 4 : *Sind G und G' k.f. Grammatiken mit $L(G)=L(G')$ und gelten in $\mathfrak{M}(G)$ die Kürzungsregeln, dann ist $\mathfrak{M}(G)=\mathfrak{M}(G')$.*

Zum Beweis sehe man [3].

Wir werden hier von diesem Satz keinen weiteren Gebrauch machen. Er wird nur aus Gründen der Vollständigkeit aufgeführt.

LEMMA 5 : *Sei G kontextfrei, $L=L(G)$ und $L_R=L_R(G)$. Gelten in $\mathfrak{M}(G)$ die Kürzungsregeln und enthält $S(L)$ bzw. $S(L_R)$ kein 0-Element, dann folgt aus $w=w'\,S(L)$ bzw. $w=w'\,S(L_R)$, daß auch $w=w'\,\mathfrak{M}(G)$ gilt. L_R ist die durch P aus S erzeugte Sprache.*

Beweis : Ist $w \neq 0\,S(L)$, dann gibt es $u, v \in T^*$ mit $uwv \in L$.

Ist $w=w'\,S(L)$ dann gilt auch $uw'v \in L$. Hieraus folgt für das Axiom S von G :

$$S=uwv\,\mathfrak{M}(G), \qquad S=uw'v\,\mathfrak{M}(G).$$

Also gilt weiter

$$uwv=uw'v\,\mathfrak{M}(G).$$

Wegen der vorausgesetzten Kürzungsregeln haben wir nun

$$w=w'\,\mathfrak{M}(G),$$

was zu zeigen war.

Der Beweis für die entsprechende Behauptung bezüglich L_R läuft ebenso.

KOROLLAR 3 : *Gelten in $\mathfrak{m}(G)$ die Kürzungsregeln und enthält $S(L)$ kein 0-Element dann induziert die Identität $w \to w$ auf T^* einen Monoidhomomorphismus von $S(L)$ bzw. $S(L_R)$ auf $\mathfrak{m}(G)$.*

Beweis : Es ist wegen Lemma 2 nur zu bemerken, daß $S(L_R)$ kein Nullelement besitzt, wenn dies für $S(L)$ gilt.

LEMMA 6 : *Für $w, w' \in T^*$ folgt aus $w=w'\,\mathfrak{M}(G)$ auch $w=w'\,S(L_R)$.*

Beweis : Zum Beweis verwenden wir die Menge

$$LF=\left\{u \in (V \cup T)^* \,\middle|\, S \xrightarrow{P \cup \bar{P}} u\right\}.$$

Die Elemente von L lassen sich also durch Anwendung der Produktionen aus P in beiden Richtungen erzeugen.

Wir zeigen zunächst : für $w,\ w' \in T^*$ gilt

$$w = w'\,\mathfrak{M}(G) \quad \Rightarrow \quad w = w'\,S(LF),$$

$w = w'\,\mathfrak{M}(G)$ heißt gerade, daß es eine Folge,

$$w = w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_n = w' \text{ mit } w_i \in (V \cup T)^*,$$

gibt, so daß w_{i+1} durch Anwendung einer Produktion von P in der einen oder der anderen Richtung aus w_i gewonnen werden kann.

Offensichtlich gilt also

$$u w_i v \in LF \quad \Leftrightarrow \quad u w_{i+1} v \in LF.$$

Also haben wir

$$w_i = w_{i+1}\,S(LF)$$

und weiter

$$w = w'\,S(LF)$$

Wegen $w,\ w' \in T^*$ folgt hieraus weiter

$$w = w'\,S(L_R),$$

was zu zeigen war.

KOROLLAR 4 : *Die Identität $w \to w$ auf T^* induziert einen Monoidhomomorphismus von $S(L_R)$ auf $\mathfrak{M}(G)$.*

SATZ 4 : *Gilt in $\mathfrak{M}(G)$ die Kürzungsregel, und ist card $\mathfrak{M}(G) \geqq 2$ dann ist $\mathfrak{M}(G)$ isomorph zu $S(L_R)$.*

Beweis : Da in $\mathfrak{M}(G)$ die Kürzungsregel gilt, enthält $\mathfrak{M}(G)$ kein Nullelement. Also enthält wegen Korollar 4 auch $S(L_R)$ kein Nullelement. Wir können nun Lemma 5 anwenden und haben die surjektiven Homomorphismen $\psi,\ \varphi$:

$$S(L_R) \xrightarrow{\psi} \mathfrak{M}(G) \xrightarrow{\varphi} S(L_R),$$

die durch die Identität auf T^* induziert werden. Also ist $\varphi \circ \psi$ die Identität auf $S(L_R)$.

Also ist ψ auch bijektiv und also $S(L_R)$ isomorph zu $\mathfrak{M}(G)$.

Im allgemeinen ist der Satz nicht richtig, da sich ja Elemente $w,\ w'$ zu denen es kein $u,\ v \in T^*$ gibt mit $uwv \notin L_R$, $uw'v \notin$ nicht auseinander ableiten lassen müssen.

Nun gilt weiter :

LEMMA 7 : *Ist G sackgassenfrei, dann ist* $L(G)=L_R(G)$.

Wir erinnern an die Definition von *sackgassenfrei : G* heißt sackgassenfrei, genau dann wenn aus

$$S \underset{P}{\rightarrow} u \qquad \text{und} \qquad v \underset{P}{\rightarrow} u$$

folgt

$$S \underset{P}{\rightarrow} v.$$

Man gelangt also bei der Anwendung von P^{-1} auf Wörter aus $L(G)$ in keine Sackgassen.

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition.

Aus Satz 5 und Lemma 7 folgt nun der :

SATZ 6 : *Ist G sackgassenfrei und gilt in* $\mathfrak{M}(G)$ *die Kürzungsregel, dann ist* $S(L(G))$ *isomorph zu* $\mathfrak{M}(G)$.

Da $\mathfrak{M}(G)$ endlich dargestellt ist, gilt wegen Satz 1 weiter :

SATZ 7 : *Ist G sackgassenfrei und gilt in* $\mathfrak{M}(G)$ *die Kürzungsregel, dann ist das Wortproblem in* $\mathfrak{M}(G)$ *entscheidbar.*

Ein Beispiel für eine sackgassenfreie Grammatik stellen die üblicherweise für die Dycksprache und Semi-Dycksprachen angegebenen Grammatiken dar.

LITERATUR

1. A. H. CLIFFORD und G. B. PRESTON, *The Algebraic Theory of Semi-Groups*, Amer. Math. Soc., Vol. 1, 1961 und Vol. 2., 1967.
2. J. HARTMANIS und H. B. HUNT, *The LBA Problem and its Importance in the Theory of Computing*, TR 73-171, Dep. of Comp. Sc. Cornell University, 1973.
3. G. HOTZ, *Eine neue Invariante kontextfreier Sprachen*, Erscheint in Theoretical Computer Science, 1978, pp. 1-12.
4. J. SAKAROVITCH, *Monoïdes syntactiques et langages algébriques*, Thèse 3e cycle, Université Paris-VII, 1977.