

MICHEL LATTEUX

Mots infinis et langages commutatifs

RAIRO. Informatique théorique, tome 12, n° 3 (1978), p. 185-192

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1978__12_3_185_0>

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MOTS INFINIS ET LANGAGES COMMUTATIFS (1)

par Michel LATTEUX

Communiqué par R. V. BOOK

Résumé. — *Le langage d'un mot infini u est l'ensemble des facteurs gauches de u qui ont une longueur finie. Nous donnons une caractérisation multiple des langages d'un mot infini qui sont rationnels et nous montrons la rationalité de tout langage d'un mot infini appartenant à \mathcal{C} (COM), le plus petit cône rationnel contenant les langages commutatifs. Ceci permet d'établir l'incomparabilité de \mathcal{C} (COM) et de DOL, la famille des DOL-langages.*

INTRODUCTION

Un travail important en théorie des langages est la comparaison, au sens de l'inclusion, de différentes familles de langages. Alors que l'inclusion d'une famille \mathcal{L}_1 dans une famille \mathcal{L}_2 est en général facile à démontrer (si elle est vérifiée), il est souvent plus délicat de prouver que \mathcal{L}_1 n'est pas inclus dans \mathcal{L}_2 . Une méthode pour obtenir ce résultat est de trouver une propriété, P, vérifiée par tous les langages de \mathcal{L}_2 mais qui se révèle fausse pour un langage de \mathcal{L}_1 . Il est, alors, intéressant de se poser la question suivante : quelles sont les familles de langages déjà définies vérifiant la propriété P ? Dans [1], R. V. Book considère les langages ayant la propriété de préfixe, c'est-à-dire les langages L qui vérifient : $\forall x, y \in L$, soit x est un préfixe (facteur gauche) de y , soit y est un préfixe de x . Pour une famille de langage \mathcal{L} , il considère la propriété : tout langage de \mathcal{L} ayant la propriété de préfixe est rationnel (regular). En fait, dès que \mathcal{L} est clos par intersection avec les langages rationnels et par homomorphisme, cette propriété est équivalente à : tout langage de \mathcal{L} défini sur un alphabet d'une seule lettre est rationnel (cf. [5]).

(*) Reçu novembre 1977, révisé février 1978.

(1) Université de Lille I, U.E.R. d'I.E.E.A., Service Informatique, Villeneuve-d'Ascq.

Nous allons considérer, dans ce papier, une propriété un peu plus faible en nous restreignant aux langages qui ont la propriété de préfixe et qui vérifient $L = \text{Init}(L) = \{x/\exists y, xy \in L\}$. Chacun de ces langages est l'ensemble des facteurs gauches d'un mot infini (cf. [7]) et nous les appellerons langages d'un mot infini. Nous allons, d'abord, montrer pour ces langages l'équivalence entre le fait d'être rationnel, d'être semi-linéaire, de contenir un langage borné infini. Ceci va nous permettre de montrer la rationalité de tout langage d'un mot infini appartenant à $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$, le plus petit cône rationnel clos par substitution et contenant les langages commutatifs (fermés par permutation). Nous en déduisons, alors, l'incomparabilité au sens de l'inclusion de $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$ et de la famille des DOL-langages.

PRÉLIMINAIRES

Soit X un alphabet fini. Un mot infini u sur l'alphabet X est une application de \mathbf{N}_+ , l'ensemble des entiers positifs, dans X et on note $u \in X^\omega$ (cf. [7]). Le mot infini u est finalement périodique s'il existe $r \in \mathbf{N} = \mathbf{N}_+ \cup \{0\}$ et $q \in \mathbf{N}_+$ tels que pour tout i supérieur à r , $u(i+q) = u(i)$. Le langage du mot infini u est égal à $\{\varepsilon\} \cup \{u(1) \dots u(k)/k \in \mathbf{N}_+\}$.

Pour tout mot $w \in X^*$, $lg(w)$ désigne la longueur de w et pour tout $a \in X$, $lg_a(w)$ est égal au nombre d'occurrences de la lettre a dans w . Le mot vide, de longueur zéro, sera noté ε . Un langage $L \subseteq X^*$ est borné s'il existe $w_1, \dots, w_k \in X^*$ tels que $L \subseteq w_1^* \dots w_k^*$. Un ensemble $A \subseteq \mathbf{N}$ est dit rationnel si le langage $\{a^i/i \in A\}$ est un langage rationnel.

Pour tout $k \in \mathbf{N}_+$, $\mathbf{N}^k = \{(x_1, \dots, x_k)/x_i \in \mathbf{N}, \forall i \in \{1, \dots, k\}\}$. Un ensemble $B \subseteq \mathbf{N}^k$ est un ensemble linéaire s'il existe $x_0 \in \mathbf{N}^k$,

$$P = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbf{N}^k,$$

qui est l'ensemble des périodes, tels que

$$B = \left\{ x_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i / \lambda_i \in \mathbf{N} \right\},$$

ensemble que l'on notera $L(x_0; P)$. Toute union finie d'ensembles linéaires de \mathbf{N}^k sera appelée ensemble semi-linéaire. Pour tout alphabet ordonné $X = \{a_1, \dots, a_k\}$, la fonction de Parikh, ψ_X (notée ψ s'il n'y a pas d'ambiguïté) est la fonction qui à tout $w \in X^*$ fait correspondre $(lg_{a_1}(w), \dots, lg_{a_k}(w)) \in \mathbf{N}^k$. Un langage est semi-linéaire si son image par la fonction de Parikh est un ensemble semi-linéaire. Enfin nous appellerons cône rationnel (full Trio) toute famille de langages close par homomorphisme, homomorphisme inverse et intersection

avec les langages rationnels. Pour tout langage L et toute famille de langages \mathcal{L} , $\mathcal{C}(L)$ [resp. $\mathcal{C}(\mathcal{L})$] désignera le plus petit cône rationnel contenant $\{L\}$ (resp. \mathcal{L}).

RÉSULTATS

Un langage L est, par définition, langage d'un mot infini si $L = \text{Init}(L)$ et si L vérifie la propriété de préfixe. Il est clair que cette deuxième condition peut être remplacée par l'égalité des mots de L de même longueur, donc :

PROPOSITION 1 : *Soit L un langage tel que $L = \text{Init}(L)$. Alors L vérifie la propriété de préfixe si et seulement si L ne possède pas deux mots différents de même longueur.*

Caractérisons, maintenant, les langages d'un mot infini qui sont rationnels :

PROPOSITION 2 : *Soit L le langage d'un mot infini $u \in X$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\exists x, y \in X^+$ tels que $L = \text{Init}(xy^*)$;
- (ii) L est un langage rationnel;
- (iii) $\forall b \in X, u^{-1}(b)$ est un ensemble rationnel;
- (iv) L contient un langage borné infini;
- (v) le langage L est semi-linéaire.

Démonstration : L'équivalence entre (i), (ii) et (iii) a été établie dans [5]. D'autre part, il est clair que (ii) implique (iv) et (v).

Montrons que (iv) entraîne (i). Par hypothèse, il existe $w_1, \dots, w_p \in X^+$ tels que $L \cap w_1^* \dots w_p^*$ soit infini. Donc, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L \cap w_1^* \dots w_i^k w_i^* \dots w_p^*$ soit non vide. Prenons le plus petit i vérifiant cette propriété. Alors,

$$F = \{z \in w_1^* \dots w_{i-1}^* / \exists z' \in w_i^* \dots w_p^*, zz' \in L\}$$

est fini et non vide. Il existe donc, dans F , un mot x tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $L \cap x w_i^k w_i^* \dots w_p^*$ soit non vide. Comme $L = \text{Init}(L)$ et que $w_i \neq \varepsilon$, on en déduit que $L \cap x w_i^*$ est infini. Alors pour tout $z \in L$ et tout $z' \in x w_i^*$, il existe $y \in L \cap x w_i^*$ qui possède z et z' comme facteur gauche ce qui entraîne $L \subseteq \text{Init}(x w_i^*) \subseteq \text{Init}(L)$ et donc $L = \text{Init}(x w_i^*)$.

Supposons, maintenant, que le langage L soit semi-linéaire. Alors

$$\psi(L) = S = \bigcup_{i=1}^n L(c_i; P_i).$$

Posons

$$X = \{a_1, \dots, a_k\}$$

et pour tout

$$z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbf{N}^k, \quad |z| = \sum_{i=1}^k z_i.$$

Montrons que si

$$z = (z_1, \dots, z_k) \quad \text{et} \quad z' = (z'_1, \dots, z'_k)$$

sont deux périodes de S ,

$$\forall t \in \{1, \dots, k\}, \quad z_t | z' | = z'_t | z |.$$

En effet, il existe, dans S ,

$$y = (y_1, \dots, y_k) \quad \text{et} \quad y' = (y'_1, \dots, y'_k)$$

tels que $L(y; \{z\})$ et $L(y'; \{z'\})$ soient inclus dans S . Supposons qu'il existe $t \in \{1, \dots, k\}$ tel que $z_t | z' | > z'_t | z |$. Prenons, alors, $s \in \mathbf{N}$ et posons

$$x = (x_1, \dots, x_k) = y + s | z' | z$$

et

$$x' = (x'_1, \dots, x'_k) = y' + (s + |y|) | z | z'.$$

Comme $z_t | z' | \geq z'_t | z | + 1$, nous avons

$$x_t - x'_t \geq s + y_t - y'_t - |y| \cdot |z| z'_t$$

et comme $|z| \cdot |z'| \geq 1$, $|x'| \geq |x|$. Si s a été choisi suffisamment grand, $x_t - x'_t > 0$. Il existe $w, w' \in L$ tels que

$$\psi(w) = x \quad \text{et} \quad \psi(w') = x'$$

avec

$$lg(w') = |x'| \geq |x| = lg(w)$$

et comme L a la propriété de préfixe, $\psi(w') \geq \psi(w)$ ce qui contredit le fait que $x_t - x'_t > 0$. Cette propriété implique l'existence de $y \in \mathbf{N}^k$ tel que, $\forall x \in P = \bigcup_{i=1}^n P_i$, $\exists s \in \mathbf{N}$ vérifiant $y = sx$ et on peut trouver deux ensembles finis $F, F' \subseteq \mathbf{N}^k$ tels que

$$S = F \cup \{z + \lambda y / z \in F', \lambda \in \mathbf{N}\}.$$

Comme F est fini et

$$lg(L) = \{|z| / z \in S\} = \mathbf{N}, \quad \forall i \in \{0, \dots, |y|\},$$

il existe $z_i \in F'$ tel que $|z_i| = i \bmod |y|$.

Prenons $j \in \{0, \dots, |y| - 1\}$. Il existe, alors, $\alpha, \beta, r \in \mathbf{N}$ tels que $r = |z_{j+1}| + \alpha |y| = |z_j| + \beta |y| + 1$. Prenons $\lambda \in \mathbf{N}$ et considérons w , le mot de L

de longueur $r + \lambda |y|$. Le mot w peut se factoriser en $w'bw''c$ avec $b, c \in X$, $lg(w'b) = r$ et $lg(w''c) = \lambda |y|$. Comme lg est une fonction injective sur L et que tout facteur gauche de w appartient à L , on obtient :

$$\psi(bw'') = \psi(w'bw'') - \psi(w') = \lambda y \quad \text{et} \quad \psi(w''c) = \psi(w) - \psi(w'b) = \lambda y,$$

ce qui implique $\psi(b) = \psi(c)$ et donc $b = c$ puisque b et $c \in X$. Donc, $\forall \lambda \in \mathbf{N}$, $u(r + \lambda |y|) = u(r)$. Comme j a été choisi de façon quelconque dans $\{0, \dots, |y| - 1\}$, on en déduit que u est finalement périodique et L est un langage rationnel [5]. \square

Le fait que tout langage d'un mot infini qui est semi-linéaire est aussi rationnel est à opposer au résultat de Book [1] qui montre l'existence d'un langage semi-linéaire, non rationnel ayant la propriété de préfixe. En fait, l'existence d'un tel langage se ramène à l'existence de mots infinis qui ne sont pas finalement périodiques. En effet, la proposition suivante montre le lien très étroit qui existe entre la famille \mathcal{L} des langages d'un mot infini et la famille \mathcal{L}' des langages semi-linéaires ayant la propriété de préfixe :

PROPOSITION 3 : *Pour tout langage L de \mathcal{L} (resp. \mathcal{L}') il existe un langage L' appartenant à \mathcal{L}' (resp. \mathcal{L}), rationnellement équivalent à L [i. e. $\mathcal{C}(L) = \mathcal{C}(L')$].*

Démonstration : Soit $L \subseteq X^*$, un langage de \mathcal{L} avec $X = \{a_1, \dots, a_k\}$. Considérons l'homomorphisme h défini sur X par : $\forall i \in \{1, \dots, k\}$, $h(a_i) = a_i \dots a_k a_1 \dots a_{i-1}$ et posons $L' = h(L)$. Il est clair que $\psi(L') = \psi((a_1 \dots a_k)^*)$ et que $h^{-1}(L') = L$. Et comme la propriété de préfixe est conservée par homomorphisme, $L' \in \mathcal{L}'$.

Réciproquement, soit $L \subseteq X^*$ un langage de \mathcal{L}' avec $X = \{a_1, \dots, a_k\}$. Si L est fini, il suffit de prendre $L' = a^*$. Si L est infini, posons $L' = \text{Init}(L)$. Le langage L' appartient à \mathcal{L} et à $\mathcal{C}(L)$. D'autre part, comme L est un langage semi-linéaire, $B = \{w \in X^* / lg(w) \in lg(L)\}$ est un langage rationnel et $L = L' \cap B \in \mathcal{C}(L')$. \square

Nous allons, maintenant, montrer que si L est le langage d'un mot infini appartenant à $\mathcal{C}(\text{COM})$, le plus petit cône rationnel contenant les langages commutatifs, alors L est un langage rationnel. Pour obtenir ce résultat, établissons, d'abord, que tout langage infini $L \in \mathcal{C}(\text{COM})$ contient un langage borné infini. Nous utiliserons une propriété concernant les langages rationnels :

LEMME 4 : *Tout langage rationnel R contient un langage rationnel borné R' tel que $\psi(R) = \psi(R')$.*

Démonstration : Comme la propriété est vraie pour les langages finis et qu'elle est conservée par union et par produit, il nous suffit, d'après le théorème de Kleene, de montrer que si R est un langage rationnel vérifiant cette propriété, R^*

la vérifie aussi. Comme $R' \subseteq R$ implique $R'^* \subseteq R^*$ et $\psi(R') = \psi(R)$ implique $\psi(R'^*) = \psi(R^*)$, on peut supposer que R est un langage rationnel borné. Supposons, d'abord, R inclus dans $a_1^* \dots a_k^*$ où les a_i sont des symboles distincts. Alors R peut s'écrire, $R = \bigcup_{i=1}^n (R_{i,1} \dots R_{i,k})$ où pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ et tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $R_{i,j}$ est un langage rationnel inclus dans a_j^* . Comme tout langage rationnel inclus dans b^* est une union finie de langages de la forme $b^s (b^t)^*$ avec $s, t \in \mathbb{N}$, on peut supposer que chacun des $R_{i,j}$ est de cette forme. D'autre part, R^* contient $A_1^* \dots A_n^*$ et $\psi(R^*) = \psi(A_1^* \dots A_n^*)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A_i = R_{i,1} \dots R_{i,k}$. Il suffit, alors, de montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un langage rationnel borné B_i tel que $B_i \subseteq A_i^*$ et $\psi(B_i) = \psi(A_i^*)$. Prenons $i \in \{1, \dots, n\}$. Le langage A_i est égal à $a_1^{s_1} (a_1^{t_1})^* \dots a_k^{s_k} (a_k^{t_k})^*$. Les mots ε et $w = a_1^{s_1} \dots a_k^{s_k}$ appartiennent à A_i^* et donc $B_i = \{\varepsilon\} \cup A_i w^*$ est un langage rationnel borné inclus dans A_i^* . Pour tout $y \in A_i^{p+1}$ avec $p \in \mathbb{N}$, il existe $y' \in A_i$ tel que $\psi(y) = \psi(y' w^p)$ donc $\psi(B_i) = \psi(A_i^*)$.

Supposons, maintenant, R inclus dans $w_1^* \dots w_k^*$ et considérons l'homomorphisme h défini sur $\{a_1, \dots, a_k\}$ par : $h(a_i) = w_i, \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Le langage $R_1 = h^{-1}(R) \cap a_1^* \dots a_k^*$ est un langage rationnel inclus dans $a_1^* \dots a_k^*$, donc il existe un langage rationnel borné $R'_1 \subseteq R_1^*$ tel que $\psi(R'_1) = \psi(R_1^*)$.

Le langage $R' = h(R'_1)$ est un langage rationnel borné inclus dans $h(R_1^*) = R^*$ et vérifie $\psi(R') = \psi(R^*)$. \square

Nous allons pouvoir en déduire un résultat analogue pour les langages appartenant à $\mathcal{C}(\text{COM})$:

PROPOSITION 5 : *Pour tout langage $L \in \mathcal{C}(\text{COM})$, il existe des mots w_1^*, \dots, w_k^* tels que $\psi(L \cap w_1^* \dots w_k^*) = \psi(L)$.*

Démonstration : Si $L \in \mathcal{C}(\text{COM})$, il existe un langage commutatif L' , un langage rationnel R et deux homomorphismes h et g tels que $L = g(h^{-1}(L') \cap R)$ (cf. [2], [6]).

D'après le lemme précédent, il existe un langage rationnel $R' \subseteq x_1^* \dots x_k^* \cap R$ tel que $\psi(R') = \psi(R)$ et comme $h^{-1}(L')$ est un langage commutatif,

$$\begin{aligned} \psi(h^{-1}(L') \cap R') &= \psi(h^{-1}(L')) \cap \psi(R') \\ &= \psi(h^{-1}(L')) \cap \psi(R) = \psi(h^{-1}(L') \cap R) \quad (\text{cf. [4]}). \end{aligned}$$

Alors,

$$\psi(L) = \psi(L'') \quad \text{avec} \quad L'' = g(h^{-1}(L') \cap R') \subseteq w_1^* \dots w_k^*$$

où

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad w_i = g(x_i).$$

Donc $L'' \subseteq L \cap w_1^* \dots w_k^* \subseteq L$, ce qui implique :

$$\psi(L'') \subseteq \psi(L \cap w_1^* \dots w_k^*) \subseteq \psi(L) = \psi(L'')$$

et

$$\psi(L \cap w_1^* \dots w_k^*) = \psi(L). \quad \square$$

Cette proposition nous permet, par exemple, de montrer que le langage $L = \{(a^n b)^p / n, p \geq 1\}$ n'appartient pas à $\mathcal{C}(\text{COM})$. En effet, il est clair que L n'est pas un langage semi-linéaire. Par contre, nous allons montrer que pour tout $w_1, \dots, w_k \in \{a, b\}^*$, $L' = L \cap w_1^* \dots w_k^*$ est un langage semi-linéaire. Posons

$$A = \{z \in \{a, b\}^* / l_{g_b}(z) > k\} \text{ et } \bar{A} = \{a, b\}^* \setminus A.$$

Alors, il est facile de vérifier que $L' \cap A$ est un langage rationnel. D'autre part $L' \cap \bar{A}$ est égal à $L'_1 \cap w_1^* \dots w_k^*$ où

$$L'_1 = \{(a^n b)^p / n \geq 1, 1 \leq p \leq k\}.$$

Il est clair que $\mathcal{C}(L'_1)$ ne contient que des langages semi-linéaires. Donc

$$L' = (L' \cap A) \cup (L'_1 \cap w_1^* \dots w_k^*)$$

est un langage semi-linéaire.

Étant donné que $\mathcal{C}(\text{COM})$ est égal au plus petit cône rationnel contenant les langages bornés et clos par intersection [4], la proposition 5 reste *a fortiori* vraie si on remplace, dans l'énoncé, la famille COM par la famille \mathcal{B} des langages bornés. Cette proposition implique, en particulier, que tout langage infini appartenant à $\mathcal{C}(\text{COM})$ contient un langage borné infini. Il est clair que si \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont deux cônes rationnels vérifiant cette propriété, $\mathcal{L}_1 \square \mathcal{L}_2 = \{s(L) / L \in \mathcal{L}_1 \text{ et } s \text{ est une } \mathcal{L}_2\text{-substitution}\}$ vérifie encore cette propriété et nous obtenons, par induction :

COROLLAIRE 6 : *Si L est un langage infini appartenant à $\mathcal{F}_\circ(\text{COM})$, le plus petit cône rationnel clos par substitution et contenant les langages commutatifs, alors L contient un langage borné infini.*

Des propositions 2, 3 et du corollaire précédent, nous pouvons déduire :

COROLLAIRE 7 : *Soit L un langage de $\mathcal{F}_\circ(\text{COM})$. Si L est le langage d'un mot infini, ou si L est un langage semi-linéaire ayant la propriété de préfixe, alors L est un langage rationnel.*

Considérons, maintenant, la famille des DOL-langages, c'est-à-dire des langages de la forme $\{h^i(w) / i \in \mathbb{N}\}$ où $w \in X^*$, h est un homomorphisme de X^* dans X^* et h^i est défini par induction au moyen des relations $h^0(x) = x, \forall x \in X^*$ et $\forall j \in \mathbb{N}, h^{j+1} = h \circ h^j$ (cf. [3]). Tout langage défini sur un alphabet d'une lettre est commutatif, donc appartient à $\mathcal{F}_\circ(\text{COM})$. Par contre, le corollaire 7 va nous

permettre de montrer qu'il existe un DOL-langage défini sur un alphabet de deux lettres, n'appartenant pas à $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$. Prenons, en effet, $X = \{a, b\}$, $w = a$ et $L = \{h^i(w) / i \in \mathbf{N}\}$ où h est défini sur X par $h(a) = ab$, $h(b) = ba$. Si L appartient à $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$, le langage $L_1 = \text{Init}(L) \cap (X^2)^*$ appartient encore à $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$. Or, le langage L_1 est un langage semi-linéaire, ayant la propriété de préfixe et non rationnel [1]. Le corollaire 7 entraîne une contradiction et nous obtenons :

COROLLAIRE 8 : *La famille des DOL-langages n'est pas incluse dans $\mathcal{F}_\sigma(\text{COM})$.*

REMERCIEMENTS

Je remercie A. Arnold pour les discussions que nous avons eues sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. V. BOOK, *On Languages with a Certain Prefix Property*, Math. Syst. theory, 10, 1977, p. 229-237.
2. S. GINSBURG et S. A. GREIBACH, *Abstract families of Languages*, in *Studies in Abstract families of Languages*, Memoirs Amer. Math. Soc., 87, 1969, p. 1-32.
3. G. T. HERMAN et G. ROZENBERG, *Developmental Systems and Languages*, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
4. M. LATTEUX, *Cônes rationnels commutativement clos*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, 1977, p. 29-51.
5. M. LATTEUX, *Une note sur la propriété de préfixe*, Math. Syst. theory (à paraître).
6. M. NIVAT, *Transductions des langages de Chomsky*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 18, 1968, p. 339-455.
7. M. NIVAT, *Mots infinis engendrés par une grammaire algébrique*, R.A.I.R.O. Informatique théorique, vol. 11, 1977, p. 311-327.