

J.-C. BERMOND

Y. KODRATOFF

**Une heuristique pour le calcul de l'indice de  
transitivité d'un tournoi**

*Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle.  
Informatique théorique*, tome 10, n° R1 (1976), p. 83-92

[http://www.numdam.org/item?id=ITA\\_1976\\_\\_10\\_1\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ITA_1976__10_1_83_0)

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE HEURISTIQUE POUR LE CALCUL DE L'INDICE DE TRANSITIVITÉ D'UN TOURNOI (\*)

par J.-C. BERMOND <sup>(1)</sup> et Y. KODRATOFF <sup>(2)</sup>

Communiqué par R. CORI

Résumé. — *Nous nous proposons de calculer le nombre d'arcs d'un tournoi donné qu'il faut renverser pour obtenir un tournoi transitif. Toute valeur exacte exige un temps de calcul très long, aussi préférons-nous choisir à l'avance un temps de calcul maximal et trouver les résultats optimaux compatibles avec cette contrainte. Nous utilisons nos programmes pour établir une conjecture en théorie des tournois.*

### 0. INTRODUCTION

L'objet de cet article est de donner une heuristique pour déterminer un paramètre (l'indice de transativité d'un tournoi) qui intervient à la fois en théorie des comparaisons par paires [7] où il a été introduit par Slater [13] et d'autre part en théorie des graphes (tournois) où il a été introduit par Erdős et Moon [5] (pour plus de détails, voir [4]).

Plus précisément, on veut classer un ensemble de  $n$  objets en les comparant deux à deux, toutes les paires possibles étant envisagées. On représente ces comparaisons par un tournoi à  $n$  sommets  $x_i$  (représentant les objets) et où  $(x_i, x_j)$  est un arc du tournoi si l'objet  $x_i$  est préféré à l'objet  $x_j$  (rappelons qu'un tournoi  $T = (X, U)$  est un graphe orienté dans lequel deux sommets  $x_i$  et  $x_j$  de  $X$  sont joints par un et un seul arc de  $U$ ,  $(x_i, x_j)$  ou  $(x_j, x_i)$ . On posera  $x_i > x_j$  si l'arc  $(x_i, x_j)$  existe). Un tournoi est dit transitif si  $x_i > x_j$  et  $x_j > x_k$  implique  $x_i > x_k$  (pour plus de détails sur les tournois et les graphes, voir [9], [2] et [12]). Un tel tournoi correspond à un ordre total et, dans le cas d'une expérience de comparaison par paires, à un classement « parfaitement logique » (et unique). Dans la pratique, les résultats d'une telle expérience donnent rarement un tournoi transitif, il est donc intéressant d'avoir une idée de la « distance » à un tournoi transitif. Définissons une distance sur

---

(\*) Reçu mars 1975.

(1) Institut de Programmation, Tour 55-65, Paris.

(2) Centre de Mathématiques sociales, Paris.

les tournois ayant le même ensemble de sommets  $X$ , ( $|X| = n$ );  $d(T_n, T'_n)$  est égale au nombre de couples  $(x_i, x_j)$  tels que  $x_i > x_j$  dans  $T_n$  et  $x_j > x_i$  dans  $T'_n$ . Si on désigne par  $O_n$  un tournoi transitif à  $n$  sommets, posons

$$i(T_n) = \min_{O_n} d(O_n, T_n);$$

$i(T_n)$  est le nombre minimal d'arcs dont il faut changer l'orientation dans  $T_n$  pour obtenir un tournoi transitif. Si  $O_n$  est tel que  $d(O_n, T_n) = i(T_n)$  on dira que  $O_n$  est associé à  $T_n$  (il représente un classement optimal au sens de la distance ci-dessus).  $i(T_n)$  est aussi le nombre minimal d'arcs qu'il faut supprimer pour obtenir un graphe sans circuits.

Notre but est de donner une procédure de calcul du paramètre  $i(T_n)$  et, éventuellement, de déterminer les tournois transitifs associés à  $T_n$ . Pour cela, nous rappelons en 1 quelques propriétés que nous aurons à utiliser; nous décrivons en 2 les arborescences qui interviennent dans la procédure de calcul et en 3 les fonctions d'évaluation attachées à cette procédure. Enfin, en 4, nous donnons les résultats numériques ainsi obtenus; ceux-ci nous permettent de démontrer une conjecture due à Kotzig [8] en théorie des tournois.

## 1. NOTATIONS ET RAPPEL DE QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TOURNOIS

1.1. Dans un tournoi  $T$ , on note par  $d_T^+(x)$  [resp.  $d_T^-(x)$ ] le demi-degré extérieur (resp. intérieur) du sommet  $x$  dans  $T$ , c'est-à-dire le nombre de sommets  $x_j$  tels que  $x > x_j$  (resp.  $x < x_j$ ). Si  $T$  a  $n$  sommets, on a  $d_T^+(x) + d_T^-(x) = n - 1$  pour tout  $x$  de  $X$ .

### 1.2. Remarque

On pourrait penser que si  $O_n(x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1})$  est un tournoi transitif associé à  $T_n$ ,  $x_0$  est un des sommets de plus haut demi-degré extérieur  $d^+$  dans  $T$  ou que, d'une manière générale,  $x_i$  est un des sommets de plus haut  $d^+$  dans le sous tournoi de  $T$  engendré par les points  $x_i, \dots, x_{n-1}$ .

En fait il n'en est rien et il peut même n'exister aucun tournoi transitif  $O_n$  associé à  $T_n$  ayant la propriété ci-dessus comme le montre l'exemple suivant [4]:

*Exemple :* Soit le tournoi  $T_7$  :

$$\begin{aligned} 1 &> 2, 3, 5, 6, 7, & 2 &> 3, 5, 7, & 3 &> 4, 5, 7, \\ 4 &> 1, 2, 5, 6, & 5 &> 6, 7, & 6 &> 2, 3, 7, & 7 &> 4. \end{aligned}$$

On a  $d(T_7, O_7) = 3$  pour  $O_7 = (4 > 1 > 6 > 2 > 3 > 5 > 7)$ .

Or, pour tout tournoi  $O'_7$  dont le sommet le plus grand est 1, on vérifie que  $d(T_7, O'_7) \geq 4$ .

### 1.3. Propriétés

Les démonstrations de ces propriétés peuvent être trouvées dans [4] et [9].

1.3.1.  $i(T) = \min_{x_i \in X} \{ i(T - \{x_i\}) + d^-(x_i) \}$ .

1.3.2. Si  $x_0$  est le sommet le plus grand dans un tournoi transitif  $O_n$  associé à  $T_n$  alors  $d_{T_n}^+(x_0) \geq [n/2]$  soit  $d_{T_n}^-(x_0) \leq [(n-1)/2]$ , ( $[x]$  désigne le plus grand entier inférieur ou égal à  $x$ ).

1.3.3. Si  $O_n(x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1})$  est un tournoi transitif associé à  $T_n$  on a, pour tout  $i$ ,  $x_i > x_{i+1}$  dans  $T_n$  ce qui revient à dire que  $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  est un chemin hamiltonien de  $T_n$ .

## 2. CONSTRUCTION DES ARBORESCENCES (remarques sur le calcul)

### 2.1. Procédure

Le calcul se présente sous la forme du parcours d'arborescences. Pour diminuer le temps de calcul, nous avons utilisé une méthode classique de cheminement dans les arborescences (voir, par exemple, [11]) qui consiste à partir des branches pendantes (de niveau  $n$ ) pour aller vers la racine (de niveau 0), ce qui évite de répéter les calculs relatifs aux niveaux d'ordre supérieur à  $j$  lorsqu'on parcourt l'arborescence partant d'un sommet de niveau  $j$ .

De plus, pour ne pas parcourir tous les chemins de l'arborescence, nous avons utilisé des fonctions d'évaluation liées à la nature de notre problème, elles seront décrites plus loin en 3.1 et 3.3.

Ce genre de procédure par évaluation et séparation séquentielle (P.S.E.S.) est décrit par B. Roy [11].

### 2.2. Description de l'arborescence

Soit  $T_n = (X_n, U)$  un tournoi. Chacun des sommets de l'arborescence est l'image d'un sommet du tournoi. L'arborescence se construit à partir des propriétés 1.3.

On choisit un sommet origine (il y aura donc autant d'arborescences que de sommets origine). Les successeurs d'un sommet  $x_j$  sont les sommets  $x_k$  non encore rencontrés dans l'unique chemin joignant la racine à ce sommet et tel que  $x_j > x_k$ . Un chemin allant de la racine à un sommet pendant représente un ordre total. Plus précisément, un chemin de l'arborescence est formé de la manière suivante.

Son sommet  $x_0$ , de niveau zéro, est un des sommets de  $X_n$  vérifiant  $d_{T_n}^-(x_0) \leq [(n-1)/2]$ . Un sommet  $x_1$  est de niveau 1 s'il est un des sommets de  $X_{n-1} = X_n - \{x_0\}$ , vérifiant

$$x_0 > x_1 \quad \text{et} \quad d_{T_{n-1}}^-(x_1) \leq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil,$$

où  $T_{n-1}$  est le sous-tournoi de  $T_n$  engendré par  $X_{n-1}$ . Un sommet  $x_j$  est de niveau  $j$  s'il est un des sommets de  $X_{n-j} = X_{n-(j-1)} - \{x_{j-1}\}$ , vérifiant

$$x_{j-1} > x_j \quad \text{et} \quad d_{T_{n-j}}^-(x_j) \leq \left\lfloor \frac{n-j-1}{2} \right\rfloor,$$

où  $T_{n-j}$  est le sous-tournoi de  $T_n$  engendré par  $X_{n-j}$ .

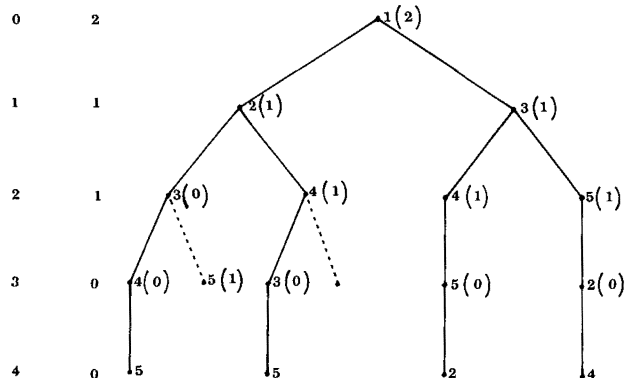
Pour le chemin représentant le tournoi transitif  $O_n = (x_0 > x_1 > \dots > x_{n-1})$ , on calcule  $d(T_n, O_n)$  par la formule :  $\sum_{0 \leq j \leq n-3} d_{T_{n-j}}^-(x_j)$  en effet,

$$d_{T_2}^-(x_{n-2}) = d_{T_1}(x_{n-1}) = 0$$

car  $x_{n-2} > x_{n-1}$ . On obtient  $i(T_n)$  par

$$i(T_n) = \min(d(T_n, O_n)).$$

niveau  $d^-$  max



Figure

Le nombre entre parenthèses est la valeur de  $d^-$  associée au sommet. Le tournoi transitif  $1 > 2 > 3 > 5 > 4$  est interdit parce que la valeur de  $d^-$  (5) au niveau 3 est de 1 alors que  $\lfloor (n-3-1)/2 \rfloor = 0$ , il n'est donc pas associé à  $T_5$ .

Les chemins  $1 > 2 > 3 > 4 > 5$ ,  $1 > 2 > 4 > 3 > 5$ ,  $1 > 3 > 4 > 5 > 2$ ,  $1 > 3 > 5 > 2 > 4$  ont pour valeurs de  $\Sigma d^-$  respectivement 3, 4, 4, 4 et la valeur  $i(T)$  est donc inférieure ou égale à 3.

Les sommets jouant le même rôle, on a  $i(T) = 3$ .

### 2.3. Exemple

Soit  $T_5$  à cinq sommets avec  $x_i > x_j$  si  $j-i \equiv 1$  ou  $2$  modulo  $5$  le tournoi est défini par

$$1 > 2,3, \quad 2 > 3,4, \quad 3 > 4,5, \quad 4 > 1,5, \quad 5 > 1,2,$$

ce qui implique

$$1 < 4,5, \quad 2 < 1,5, \quad 3 < 1,2, \quad 4 < 2,3, \quad 5 < 3,4.$$

L'arborescence de sommet  $1$  se représente comme le montre la figure.

Tous les sommets jouant le même rôle, les quatre autres arborescences sont isomorphes à celles-ci.

### 2.4. Temps de calcul

Le nombre de chemins est de l'ordre de  $n!/4^n$  du fait qu'à chaque niveau, environ  $1/4$  des sommets sont concurrents à participer au niveau suivant à cause des conditions 1.3 et donc le nombre d'opérations complètes à réaliser est de  $n \cdot n!/4^n$  ce qui, en principe, interdit de travailler sur des tournois d'ordre élevé [à titre d'exemple, le tournoi  $T_{17}$  que nous verrons plus tard a demandé 2 h de calculs à une machine IBM 360-165 pour trouver de la sorte  $i(T_{17}) = 47$ ].

Bien entendu, on peut diminuer le temps de calcul, en remarquant que chaque chemin des arborescences conduit à un majorant de  $i(T_n)$  donc, si à un niveau  $j$  la somme  $\sum_{0 \leq i \leq j} d_{T_{n-i}}^-(x_i)$  est supérieure à la borne déjà obtenue, il est inutile de continuer l'arborescence.

## 3. FONCTIONS D'ÉVALUATION

### 3.1. Obtention de la valeur exacte de $i(T_n)$ : première fonction d'évaluation

Le principe est d'estimer en un sommet donné le minimum de la contribution à  $i(T_n)$  des chemins  $x$  issus de ce sommet ce qui va nous permettre d'éliminer, à partir de ce sommet, certains chemins.

A chaque sommet  $x_{j-1}$ , on peut déterminer un minorant pour

$$\sum_{j \leq i \leq n-3} d_{T_{n-i}}^-(x_i)$$

de la manière suivante.

Rangeons les demi-degrés intérieurs  $d^-$  des sommets de  $T_{n-j}$  par ordre non décroissant, soit  $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{n-j-1}$ .

On a

$$d_{T_{n-j}}^-(x_j) \geq \alpha_0,$$

$$d_{T_{n-j}}^-(x_j) + d_{T_{n-(j+1)}}^-(x_{j+1}) \geq \alpha_0 + \max(\alpha_1 - 1, 0).$$

En effet,  $d_{T_{n-(j+1)}}^-(x_{j+1}) \geq d_{T_{n-j}}^-(x_{j+1}) - 1$ .

D'une manière générale, on a

$$\sum_{j \leq i \leq n-3} d_{T_{n-i}}^-(x_i) \geq \sum_{0 \leq k \leq n-j-3} \max(\alpha_k - k, 0).$$

On en déduit un minorant pour les  $d(T_n, O_n)$  où  $O_n$  est un chemin commençant par  $x_0 > x_1 > \dots > x_{j-1}$  qui a la valeur

$$\sum_{0 \leq i \leq j-1} d_{T_{n-i}}^-(x_i) + \sum_{0 \leq k \leq n-j-3} \max(\alpha_k - k, 0).$$

Dès que cette somme est supérieure au majorant déjà obtenu il est inutile de continuer l'arborescence.

### 3.2. Remarque

Enfin, dans le cas où il est trop long d'obtenir la valeur exacte de  $i(T_n)$ , on a un majorant en parcourant seulement quelques chemins des arborescences (par exemple, soit en prenant à chaque niveau des points de  $d^-$  les plus petits, soit en utilisant la remarque du paragraphe suivant).

### 3.3. Obtention d'un minorant de $i(T_n)$ : deuxième fonction d'évaluation

3.3.1. DÉFINITION :  $c(T_n)$  désigne le nombre maximal de circuits deux à deux disjoints (au sens des arcs) de  $T_n$ .

3.3.2. PROPOSITION :  $i(T_n) \geq c(T_n)$  (voir la preuve dans [4], § 2-4).

3.3.3. Calcul de  $c(T_n)$  (fonction d'évaluation)

Nous n'avons cherché qu'un ensemble particulier (lié à l'ordre de numérotation arbitraire des sommets) de 3-circuits et de 4-circuits deux à deux disjoints, leur nombre sera noté :  $p(T_n)$ . Dans ces conditions, le nombre obtenu est en général trop faible pour être intéressant. Pour l'améliorer, nous parcourons quelques niveaux des arborescences décrites au paragraphe 1 (en utilisant toutes les améliorations décrites dans le paragraphe) obtenant ainsi un  $\sum d^-$  exact jusqu'au niveau  $j-1$ , puis, seulement ensuite, nous calculons  $p(T_{n-j})$  pour le sous-tournoi  $T_{n-j}$  restant. Ceci permet d'optimiser la vitesse de calcul. En effet, il est inutile de fixer à l'avance la valeur de  $j$ . Si dès le niveau zéro, par exemple  $d_{T_n}^-(x_0) + p(T_{n-1})$  est supérieur ou égal

à un minorant déjà trouvé, il est inutile d'explorer plus loin l'arborescence et on peut passer directement au sommet de niveau 0 suivant. Par contre si  $p(T_{n-j}) + \sum_{0 \leq i \leq j-1} d_{T_{n-i}}(x_i)$  reste inférieur au minorant, alors on doit explorer aussi le niveau  $j$ . Pour les tournois d'ordre élevé ceci est encore trop lent pour obtenir  $i(T_n)$ . Dans ces conditions, on se fixe un  $j$  au-delà duquel la valeur obtenue deviendra un nouveau minorant. Ceci permet d'obtenir le meilleur minorant possible de  $i(T_n)$  pour un temps de calcul fixé à l'avance.

### 3.4. Temps de calcul

Le temps de calcul de  $c(T_n)$  est du même ordre que celui de  $i(T_n)$ , c'est pourquoi nous n'avons pas cherché à le calculer exactement. Pour donner une idée de l'efficacité de l'heuristique, soulignons le cas du tournoi à vingt et un sommets décrit au paragraphe 3. En utilisant seulement la méthode du paragraphe 1, le temps de calcul est de l'ordre de  $n!/2^n$  et nous avons dit que nous avons trouvé ainsi  $i(T_{17}) = 47$  en 2 h de calcul. Il faut donc de l'ordre de  $20 \times 19 \times 18/8$  fois plus de temps pour calculer l'indice de transivité du tournoi à vingt sommets déduit de  $T_{21}$ , soit de l'ordre de 2 000 h. En combinant les deux méthodes nous avons, dans ce cas particulier, obtenu en moins de 2 h un minorant et un majorant ayant la même valeur.

### 3.5. Remarque

On peut même espérer améliorer le majorant par cette méthode. Le fait que l'on atteigne la valeur la plus faible de  $p(T_n)$  correspond souvent (il n'y a aucune raison, cependant, pour que ce soit toujours) au fait que le chemin parcouru dans l'arborescence est un de ceux qui conduisent à une valeur minimale de  $i(T_n)$ . Le dernier sommet de ce chemin peut être considéré comme le niveau zéro d'une arborescence portant sur  $n-j$  sommets, que l'on peut alors parcourir en entier. Ceci ne permettra jamais d'être certain d'avoir obtenu la valeur exacte  $i(T_n)$  mais permet d'abaisser son majorant.

## 4. APPLICATIONS

Nous avons utilisé cette méthode pour de nombreux tournois et, en particulier, nous avons pu améliorer les bornes connues sur la fonction  $f(n) = \max_{T_n} i(T_n)$ , où le maximum est pris sur tous les tournois à  $n$  sommets et, ainsi, prouver la validité d'une conjecture due à Kotzig [8] (problème posé aussi par D. H. Younger [15]).



4.1. THÉORÈME : Si  $n \geq 10$ ,  $f(n) > \pi(n)$ , où  $\pi(n) = \lfloor n/3 \lfloor (n-1)/2 \rfloor \rfloor$  est le nombre maximal de cycles deux à deux disjoints du graphe complet.

*Démonstration* : Il est montré dans [3] qu'il suffit de prouver le théorème pour  $10 \leq n \leq 25$ .

C'est ce que nous avons fait avec les méthodes des paragraphes 2 et 3. Nous donnons les résultats obtenus pour des tournois nécessaires à la preuve du théorème.

a) *Tournois des résidus quadratiques notés  $Q_n$* . Un tel tournoi est défini par  $x_i > x_j$  si  $j-i$  est congru à un carré modulo  $n$ . Un tel tournoi n'existe que si  $n = p^\alpha$ , où  $p$  est premier et  $p$  congru à 3 modulo 4, donc, en particulier, pour  $n = 7, 11, 19, 23, \dots$ . L'intérêt de ces tournois est que tous les sommets jouent le même rôle (c'est-à-dire que les sous-tournois obtenus en enlevant un sommet quelconque sont tous isomorphes), ainsi que toutes les paires de sommets ce qui permet de se ramener à un tournoi à  $n-2$  sommets.

(i)  $n = 11$ . Soit  $T_{10}$  le tournoi obtenu en enlevant un sommet quelconque de  $Q_{11}$ . Nous avons obtenu  $i(T_{10}) = 15$  et donc  $i(Q_{11}) = 20$  (résultats déjà donnés en [4]).

(ii)  $n = 19$ . Soit  $Q_{19}$  le tournoi des résidus quadratiques à 19 sommets,  $T_{18}$  un tournoi obtenu en supprimant un sommet quelconque de  $d^- = 9$  et  $T_{17}$  un tournoi obtenu en supprimant de  $T_{18}$  un sommet tel que de  $d^- = 8$  dans  $T_{18}$ .

Nous trouvons  $i(T_{17}) = 47$  donc  $i(T_{18}) = 55$  et  $i(Q_{19}) = 64$ . D'autre part, en enlevant un sommet de  $d^- = 7$  à  $T_{17}$  on obtient un tournoi  $T_{16}$  tel que  $i(T_{16}) = 40$ .

(iii)  $n = 23$ . Soit  $Q_{23}$  le tournoi des résidus quadratiques et  $T_{22}$  et  $T_{21}$  des sous-tournois de  $Q_{23}$  obtenus comme en b. Nous trouvons  $69 \leq i(T_{21}) \leq 71$ , d'où on en déduit  $79 \leq i(T_{22}) \leq 81$  et  $90 \leq i(Q_{23}) \leq 92$ .

b) On peut obtenir à partir des  $Q_n$  des tournois à  $(n-1)/2$  sommets de la manière suivante : soit  $T_{n-1}$  un tournoi obtenu en enlevant un sommet de  $Q_n$  (rappelons que tous les  $T_{n-1}$  ainsi obtenus sont isomorphes), on considère le sous tournoi de  $T_{n-1}$  engendré par les points de même demi-degré extérieur  $d^+ = (n-1)/2$ . On peut montrer que dans les  $T_{(n-1)/2}$  obtenus, tous les sommets jouent le même rôle, ce qui permet d'appliquer le programme à un tournoi à  $(n-3)/2$  sommets.

(i)  $n = 15$ . Soit  $T_{15}$  le tournoi ainsi engendré à partir de  $Q_{31}$ . On calcule  $i(T_{14}) = 29$  donc  $i(T_{15}) = 36$ .

(ii)  $n = 21$ . Soit  $T_{21}$  le tournoi ainsi engendré à partir de  $Q_{43}$ , on trouve  $i(T_{20}) \geq 62$  (par la méthode du paragraphe 2) et  $i(T_{20}) \leq 62$  (par la méthode

du paragraphe 1), donc  $i(T_{20}) = 62$ . Rappelons que les deux bornes ont été trouvées dans un temps de l'ordre de mille fois plus petit que celui qui aurait été nécessaire au calcul de  $i(T_{20})$  par la méthode du paragraphe 1 seule.

On en déduit  $i(T_{21}) = 72$ .

c) Pour  $n = 13$ , le  $T_{13}$  utilisé était obtenu en ajoutant deux sommets à  $Q_{11}$ . On a trouvé  $i(T_{12}) = 21$  et  $i(T_{13}) = 27$ .

d) Pour  $n = 25$ , nous avons utilisé un tournoi  $T_{25}$  communiqué par A. Astie [1] qu'on peut définir ainsi : l'ensemble des sommets

$$X = \{(i, j); 0 \leq i \leq 4, 0 \leq j \leq 4\} \quad \text{et} \quad (i, j) > (i', j')$$

si et seulement si  $(i-i', j-j')$  appartient à  $S$ , où  $S$  est défini ainsi  $S = \{(0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0), (2, 1), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$ . Dans ce tournoi, tous les sommets jouent le même rôle, on a donc déterminé :  $91 \leq i(T_{24}) \leq 103$  d'où  $103 \leq i(T_{25}) \leq 115$ .

Ceci complète la preuve du théorème 3.

$n$	3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13		14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25
$\Pi(n)...$	1 1 3 4 7 8 12 13 18 20 26		28 35 37 45 48 57 60 70 73 84 88 100
$f(n) ..$	1 1 3 4 7 8 12 15 20 22 28	min. de $f(n)$ .	31 38 40 47 55 64 64 72 80 91 91 103
		maj. de $f(n)$ .	32 39 44 52 58 67 73 83 91 102 110 122

TABLEAU

4.2. Récemment J. Hardouin du Parc [6] a donné une autre méthode pour obtenir  $i(T_n)$  et a trouvé des tournois  $T_{13}$ ,  $T_{14}$ ,  $T_{15}$  tels que :  $i(T_{13}) = 28$ ;  $i(T_{14}) = 31$  et  $i(T_{15}) = 38$ .

4.3. C. Thomassen [14] a prouvé la conjecture 2 de [3], d'où

$$f(pq) \geq pf(q) + q^2 f(p) \quad \text{et} \quad f(pq+1) \geq pf(q+1) + q^2 f(p).$$

On obtient en particulier pour  $p = 11$  et  $q = 2$ ,  $f(22) \geq 80$  et  $f(23) \geq 91$ .

4.4. Nous rassemblons les résultats dans le tableau ci-dessus : les majorants sont ceux donnés en [4] ou de nouveaux obtenus par J. Hardouin du Parc [6].

## BIBLIOGRAPHIE

1. A. ASTIE. Communication personnelle, 1975.
2. C. BERGE. *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
3. J.-C. BERMOND. *The Circuit Hypergraph of a Tournament*, Infinite and finite sets. Proc. Coll. Math. Soc. János Bolyai, Keszthely, Hongrie, 1973, North-Holland, Amsterdam, vol. I, 1975, p. 165-180.
4. J.-C. BERMOND. *Ordres à distance minimale d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux*. Math. Sc. Humaines, vol. 37, 1972, p. 5-25.
5. P. ERDÖS et J. W. MOON. *On Sets of Consistent Arcs in a Tournament*. Canad. Math. Bull., vol. 8, 1965, p. 269-271.
6. J. HARDOUIN DU PARC. Math. Sc. Humaines, vol. 51, 1975, p. 35-41.
7. M. G. KENDALL. *Rank Correlation Method*. 3<sup>e</sup> ed., New York, Hafner, 1962.
8. A. KOTZIG. *On the Maximal Order of Cyclicity of Antisymmetric Directed Graphs*. Discrete Math., vol. 12, 1975, p. 17-25.
9. J. W. MOON. *Topics on Tournaments*, Holt, New York, 1968.
10. R. REMAGE et W. A. THOMPSON. *Maximum Likelihood Paired Comparison Ranking*. Biometrika, vol. 53, 1966, p. 143-149.
11. B. ROY. *Algèbre moderne et théorie des graphes*, t. 2, Dunod, Paris, 1970.
12. A. SACHE. *La théorie des graphes*. P.U.F. coll. *Que sais-je?*, Paris, 1974.
13. P. SLATER. *Inconsistencies in a Schedule of Paired Comparisons*. Biometrika, vol. 48, 1961, p. 303-312.
14. C. THOMASSEN. *Transversals of Circuits in the Lexicographic Product of Directed Graphs*. Math. Sc. Humaines, vol. 51, 1975, p. 43-45.
15. D. H. YOUNGER. Communication personnelle, 1975.