REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE
RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. INFORMATIQUE THÉORIQUE

J. L. DURIEUX

Sur l'image, par une transduction rationnelle, des mots sur une lettre

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique, tome 9, nº R2 (1975), p. 25-37
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1975__9_2_25_0>

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(9e année, août 1975, R-2, p. 25-37)

SUR L'IMAGE, PAR UNE TRANSDUCTION RATIONNELLE, DES MOTS SUR UNE LETTRE

par J. L. DURIEUX [1]

Communiqué par J. BERSTEL

Résumé. — *On étudie la structure de l'image $T(x^n)$ d'un mot sur une lettre par une transduction rationnelle T. Cette étude permet de montrer qu'aucun langage algébrique non-rationnel borné dans a^*b^* n'appartient au cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques. On montre également que le langage symétrique S, générateur des langages linéaires, n'appartient pas au cône rationnel engendré par les langages bornés.*

INTRODUCTION

L'un des domaines de recherche les plus actifs de l'Informatique Théorique est l'étude et la comparaison des diverses familles de langages fermées par transductions rationnelles, ou cônes rationnels. Les travaux menés dans ce domaine rejoignent ceux concernant les « AFLs » dans un même effort d'unification des nombreux résultats de la théorie des Langages et des Automates. Les propriétés des transductions rationnelles, dont la première caractérisation est due à M. Nivat [8], sont essentielles à ce point de vue.

Notre résultat principal est une propriété de commutation de l'image $T(x^n)$ d'un mot sur une lettre x^n par une transduction rationnelle T. Il rend possible l'étude du cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques sans formuler aucune hypothèse supplémentaire sur ces langages.

Il est montré que le cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques et la famille des langages algébriques non-rationnels bornés dans a^*b^* sont disjoints. Ce résultat est quelque peu surprenant, eu égard à la « quantité

(1) U.E.R. d'Informatique, Université Paul Sabatier, Toulouse.

d'information » que peuvent détenir les langages sous-cycliques et que mettent en évidence S. Ginsburg et J. Goldstine [5] et R. V. Book [3] :

Il existe des langages sur une lettre tels que le plus petit cône rationnel fermé par union, intersection, produit et étoile les contenant contienne tous les langages récursivement énumérables.

La propriété de l'image $T(x^n)$ que nous mettons en évidence permet également de montrer que le langage symétrique S (ensemble des palindromes) n'appartient pas au cône rationnel engendré par les langages bornés quelconques. Ce résultat étend celui de S. Greibach [7] d'après lequel S n'appartient pas au cône rationnel des bornés algébriques. Il complète également celui de J. Goldstine [6] d'après lequel les langages obtenus par substitution ou étoile de langages non-rationnels n'appartiennent pas au cône rationnel des bornés quelconques.

1. PRELIMINAIRES

Soit X un alphabet fini, X^* le monoïde libre engendré par X et dont l'élément neutre est noté 1. Pour tout partie P de X^*, P^* est le sous-monoïde de X engendré par P. Si $P = \{ u \}$, on écrit u^* au lieu de $\{ u \}^*$.

Un langage L sera dit sous-cyclique s'il existe un mot x tel que $L \subseteq x^*$, et il sera dit borné s'il existe un n-uplet de mots $(a_1, ..., a_n)$ tels que $L \subseteq a_1^* \dots a_n^*$.

Nous noterons $|u|$ la longueur du mot u, et si $x_1 \dots x_n$ est l'expression de u en lettres de X, $\tilde{u}$ désignera le mot $x_n \dots x_1$.

Dans la suite de notre propos sur les langages sous-cycliques et bornés, nous considérerons x, ou $a_1 \dots a_n$ comme des lettres, cette restriction n'amenant aucune perte de généralité pour nos résultats.

Les transductions rationnelles de X^* dans Y^* sont les correspondances canoniquement associées aux parties rationnelles de $X^* \times Y^*$. Si T est une transduction rationnelle de X^* dans Y^* et w un mot de X^*, nous désignerons par $T(w)$ l'image de w, ou ensemble des mots w' de Y^* tels que (w, w') appartienne à la partie rationnelle de $X^* \times Y^*$ définissant T.

Enfin, nous appellerons cône rationnel toute famille de langages fermée par transduction rationnelle. Le cône rationnel engendré par une famille de langages est l'ensemble des images des langages de cette famille par des transductions rationnelles.

2. RESULTATS

Théorème 1

Soient T une transduction rationnelle de X^* vers Y^*, x une lettre de X, u et v deux mots de YY^*.

Alors il existe deux entiers N et S ($S \neq 0$) ne dépendant que de T et des longueurs $|u|$ et $|v|$ et vérifiant la propriété suivante :

Si $\alpha u^p \beta v^q \gamma \in T(x^n)$ et si $p, q \geqslant N$, alors il existe $i, j \geqslant 0$ avec $i + j = S$ tels que :

1) $\alpha u^{p-i} \beta v^{q+j} \gamma \in T(x^n)$ et $\alpha u^{p+i} \beta v^{q-j} \gamma \in T(x^n)$

2) si $i = 0$, alors $j = S$ et $\alpha u^p \beta v^{q-j} (v^j)^* \gamma \subseteq T(x^n)$

3) si $j = 0$, alors $i = S$ et $\alpha u^{p-i} (u^i)^* \beta v^q \gamma \subseteq T(x^n)$

La preuve de ce théorème, qui est longue et assez technique, est donnée en annexe.

Théorème 2

Aucun langage algébrique non-rationnel borné dans a^*b^* n'appartient au cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques.

Preuve : Soient $L<$, $L\neq$, $L>$ les trois langages

$$L< \; = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N} \; ; \; n < m \}$$
$$L\neq \; = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N} \; ; \; n \neq m \}$$
$$L> \; = \{ a^n b^m \mid n, m \in \mathbf{N} \; ; \; n > m \}$$

J. Berstel et L. Boasson ont montré que si L est un langage algébrique non rationnel borné dans a^*b^*, il existe une transduction rationnelle T telle que $T(L) \in \{ L<, L\neq, L> \}$ [1]. Pour établir le théorème, il suffit donc de montrer qu'aucun de ces trois langages n'appartient au cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques. Nous allons procéder en montrant que chacune des trois hypothèses contraires entraîne une contradiction :

1) Supposons qu'il existe une transduction rationnelle T et un langage sous-cyclique $\Lambda \subseteq x^*$ tels que $L< \; = T(\Lambda)$.

Soient N et S les deux entiers associés à T par le théorème 1 pour $u = a$ et $v = b$ ($|u| = |v| = 1$).

Le mot $a^N b^{N+1}$ appartient à $L<$, donc il existe $x^n \in \Lambda$ tel que $a^N b^{N+1} \in T(x^n)$.

Comme $N + 1 \geqslant N \geqslant N$, il existe deux entiers i et j de somme S tels que $a^{N+i} b^{N+1-j} \in T(x^n)$.

x^n appartient à Λ, $T(x^n) \subseteq T(\Lambda)$, donc $a^{N+i} b^{N+1-j} \in L<$.

Mais $(N + i) - (N + 1 - j) = S - 1$ et $S - 1 \geqslant 0$, ce qui contredit $a^{N+i} b^{N+1-j} \in L<$ $(N + i < N + 1 - j)$.

2) On montre de manière analogue que $L>$ n'appartient pas au cône rationnel engendré par les langages sous-cycliques.

3) Supposons qu'il existe une transduction rationnelle T et un langage sous-cyclique $\Lambda \subseteq x^*$ tels que $L\neq \; = T(\Lambda)$.

Soient N et S les deux entiers associés à T par le théorème 1 pour $u = a$, $v = b\,(|u| = |v| = 1)$.

$a^N b^{N+S} \in L\neq$ puisque $S \neq 0$. Donc il existe $x^n \in \Lambda$ tel que $a^N b^{N+S} \in T(x^n)$.

Mais alors il existe deux entiers i et j tels que $i + j = S$ et $a^{N+i} b^{N+S-j} \in T(x^n)$ donc $a^{N+i} b^{N+S-j} \in T(\Lambda) = L\neq$.

On a alors $N + i \neq N + S - j$ d'après la définition de $L\neq$ et $N + i = N + S - j$ d'après $i + j = S$.

Q.E.D.

Pour aborder l'étude du cône rationnel des langages bornés quelconques, nous allons faire quelques remarques supplémentaires. Elles nous permettront d'appliquer le théorème 1 à ce cas.

Appelons transducteur fini de X^* dans Y^* l'objet défini par un ensemble fini Q d'état et un ensemble fini de quadruplets de $Q \times X \cup \{1\} \times Y \cup \{1\} \times Q$.

Chaque couple d'états (q, q') du transducteur définit une transduction rationnelle $T_{qq'}$, dite associée au transducteur. Toute transduction rationnelle T pouvant être ramenés à une transduction rationnelle associée à un transducteur fini [8], on peut donc lui associer des transductions rationnelles $T_{qq'}$ en nombre fini, de sorte que :

si $v \in T(u)$ et $u = u_1 \dots u_n$, alors $v \in T_{q_0 q_1}(u_1) \dots T_{q_{n-1} q_n}(u_n)$

Théorème 3

Le langage symétrique $S = \{ w\, c\, \tilde{w} \mid w \in (a \cup b)^* \}$ n'appartient pas au cône rationnel engendré par les langages bornés.

Preuve : Supposons qu'il existe un langage borné B et une transduction rationnelle T tels que $S = T(B)$ avec $B \subseteq a_1^* \dots a_n^*$, où $a_1 \dots a_n$ sont des lettres (si $a_1 \dots a_n$ étaient des mots de plusieurs lettres, on pourrait se ramener à ce cas grâce à un homomorphisme inverse et une intersection avec un langage rationnel).

On peut associer à T des transductions rationnelles $T_{qq'}$ en nombre fini. A chacune d'elles, le théorème 1 fait correspondre pour chaque x_i un couple d'entiers (N, S), $(u = a, v = b\,;\, |u| = |v| = 1)$. Soit p un entier supérieur à chacun des entiers N ainsi définis.

Le mot $w = (a^p b^p)^n\, c\, (b^p a^p)^n$ appartient à $S = T(B)$. Il se factorise en $w_1 \dots w_n$ avec $w_1 \in T_{q_0 q_1}(a_1^*) \dots w_n \in T_{q_{n-1} q_n}(a_n^*)$.

A chacun des préfixes $1, a^p b^p, \dots (a\, b^p)^n$ de w, faisons correspondre le mot de la suite $w_1, w_1 w_2, \dots, w_1 \dots w_n$ le plus court dont il est préfixe.

L'un des mots de la suite $w_1, w_1 w_2, \dots, w_1 \dots w_n$ correspond au moins à deux préfixes de la suite $1, a^p b^p, \dots, (a^p b^p)^n$.

Si $w_1 \dots w_h$ est ce mot, w admet une factorisation :

$$w = w'w''w''', \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} w' &= (a^p b^p)^{l-1} \, (l \geqslant 1) \\ w'' &= a^p b^p \\ w''' &= (a^p b^p)^{n-l} \quad (b^p a^p)^n \end{aligned}$$

et $w'' \in T_{qq'}(a_h^k)$ pour une certaine transduction $T_{qq'}$ associée à T et un certain entier k. p étant assez grand, le théorème 1 s'applique et permet de construire un mot $v = a^{p-i} b^{p+j} (i + j = S \neq 0)$ appartenant aussi à $T_{qq'}(a_h^k)$.

Substituant v à w'' dans l'expression $w = w'w''w'''$, on obtient un mot de $T(B)$ qui n'est pas symétrique, ce qui contredit l'hypothèse $S = T(B)$.

Q.E.D.

3. PREUVE DU THEOREME 1

Dans la preuve du théorème 1, nous supposerons que les alphabets X et Y sont disjoints. Cette hypothèse n'amène aucune restriction car le cas $X \cap Y \neq \emptyset$ peut être éliminé par réécriture de X ou de Y.

Nous emploierons la variante d'Eilenberg [4] de la caractérisation des transductions rationnelles de Nivat [8] :

Théorème 0

Si T est une transduction rationnelle de $X^* \times Y^*$ et si $X \cap Y = \emptyset$, alors il existe un langage rationnel R inclus dans $(X \cup Y)^*$ et tel que :

$T = \{ (\varphi(h), \psi(h)) \mid h \in R \}$ où φ et ψ sont des projections de $(X \cup Y)^*$ sur X^* et Y^* respectivement

Rappelons qu'un rationnel R définit une congruence droite d'index fini. Nous emploierons le lemme de l'étoile sous la forme suivante, qui se démontre de manière analogue :

Lemme 1

Soit R un langage rationnel et r l'index de la congruence droite définie par R. Si $w_1 \dots w_r \in R$, alors il existe deux entiers distincts i et j tels que $w_1 \dots w_i (w_{i+1} \dots w_j)^* w_{j+1} \dots w_r \subseteq R$.

Nous conviendrons que pour $i = 0$, $w_1 \dots w_i = 1$, et pour $j = r$, $w_{j+1} \dots w_r = 1$.

Enfin nous utiliserons aussi le lemme suivant qui est une légère modification d'un résultat classique :

Lemme 2

Soit R un langage rationnel et r l'index de la congruence droite définie par R.

Si $u \in X^*$ et si $w_1 u^r (u^{r!}) w_2 \in R$, alors $w_1 u^r (u^{r!})^* w_2 \subseteq R$.

Preuve : Dans la suite des préfixes $\{ w_1 u^k \mid k = 0, ..., r \}$ il existe deux préfixes $w_1 u^i$, $w_1 u^j$ tels que :

$$w_1 u^i \equiv w_1 u^j \qquad (0 \leqslant i < j \leqslant r) \qquad \text{(principe des tiroirs)}$$

$\equiv$ étant une congruence droite, il en résulte que :

$$w_1 u^i \equiv w_1 u^i (u^{j-i})^n \qquad \text{pour tout entier } n$$

Or $j - i$ divise r ! Donc $w_1 u^i \equiv w_1 u^i u^{r!} \equiv w_1 u^i (u^{r!})^n$ pour tout entier n.

Il en résulte que

$$w_1 u^i u^{r-i} w_2 \equiv w_1 u^i u^{r!} u^{r-i} w_2 \qquad \text{et} \qquad w_1 u^i u^{r-i} w_2 \equiv w_1 u^i (u^{r!})^n u^{r-i} w_2$$

pour tout entier n.

Comme $w_1 u^i u^{r!} u^{r-i} w_2 = w_1 u^{r+r!} w_2 \in R$ et que $\equiv$ sature R, l'inclusion $w_1 u^r (u^{r!})^* w_2 \subseteq R$ est établie.

Q.E.D.

Avant de passer à la preuve proprement dite, nous donnerons un aperçu informel des principaux arguments qui y interviennent :

L'appartenance de $\alpha u^p \beta v^q \gamma$ à $T(x^n)$ entraîne l'existence d'un mot h de R de projections x^n et $\alpha u^p \beta v^q \gamma$.

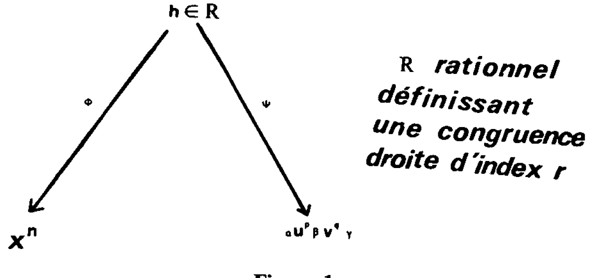

Figure 1

Ce mot h peut être factorisé selon sa projection $\alpha u^p \beta v^q \gamma$:

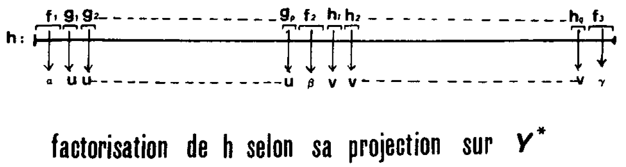

Figure 2

Les facteurs obtenus sont ensuite regroupés r à r :

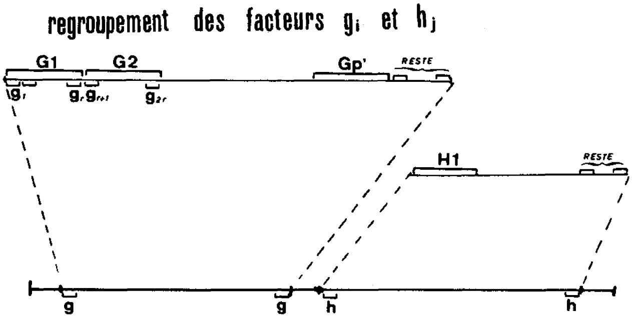

Figure 3

L'application du lemme 1 permet alors d'opérer les transformations décrites ci-dessous :

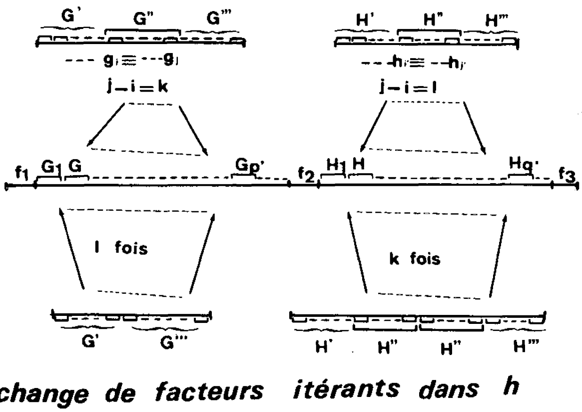

Figure 4

L'usage du lemme 2 permet de réduire à 1 le nombre de groupes de plus de $(r + r!)$ occurrences de x dans h.

Des arguments analogues à celui établissant le lemme 2 permettent enfin d'établir le théorème 1.

Nous allons tout d'abord établir le résultat intermédiaire suivant qui suffit d'ailleurs pour montrer que le langage symétrique n'appartient pas au cône rationnel engendré par les bornés.

Proposition 1

Soient T une transduction rationnelle de $X^* \cdot Y^*$, où $X \cap Y = \emptyset$, x une lettre de X, u et v deux mots de YY^*. Il existe deux entiers r et s ($s = r^3(r + r!)^2 |u| \cdot |v|$) tels que :

Si $\alpha u^p \beta v^q \gamma \in T(x^n)$ et si p et q sont supérieurs à $r + s$ (n, p, q entiers), alors l'une au moins des deux éventualités suivantes est vérifiée :

1) Il existe deux entiers non-nuls I et J tels que

$$\alpha u^{p-I} \beta v^{q+J} \gamma \in T(x^n) \qquad \text{et} \qquad \alpha u^{p+I} \beta v^{q-J} \gamma \in T(x^n)$$

(alors I et J sont inférieurs à $rs\ |u|\ |v|$ ($\leqslant$)).

2) $T(x^n)$ est un langage rationnel infini contenant au moins l'un des deux ensembles

$$\alpha u^{p - |v| r!} (u^{r!})^* \beta v^q \gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha u^p \beta v^{q - |u| r!} (v^{r!})^* \gamma$$

Preuve

Soit $\alpha u^p \beta v^q \gamma \in T(x^n)$, alors il existe un mot h du langage rationnel R défini par le théorème 0 tel que :

$$\varphi(h) = x^n \quad , \quad \psi(h) = \alpha u^p \beta v^q \gamma$$

où φ est la projection de $(X \cup Y)^*$ sur X^*, ψ celle de $(X \cup Y)^*$ sur Y^*. Soit r l'index de la congruence droite définie par R.

Remarquons tout d'abord qu'on peut supposer qu'il existe au plus un facteur composé d'au moins $(r + r!)$ occurrences consécutives de x dans h.

En effet, s'il existe au moins deux tels facteurs, on peut poser :

$$h = w_1 x^{r+r!} w_2 x^{r+r!} w_3$$

Or, d'après le lemme 2, on a :

$$w_1 x^r (x^{r!})^* w_2 x^r (x^{r!})^* w_3 \subseteq R$$

Donc le mot $h' = w_1 x^{r+2r!} w_2 x^r w_3$ appartient à R, et $\varphi(h') = \varphi(h) = x^n$, $\psi(h') = \psi(h) = \alpha u^p \beta v^q \gamma$.

Il est clair qu'on peut répéter ce procédé autant de fois qu'il est nécessaire pour regrouper tous les x excédentaires de $x^{r+r!}$ en un seul facteur.

L'égalité $\psi(h) = \alpha u^p \beta v^q \gamma$ entraîne l'existence d'une factorisation de h en :

$$h = f_1 g_1 \dots g_p f_2 h_1 \dots h_Q f_3,$$

avec

$$\psi(g_i) = u \qquad (\text{pour } i = 1, \dots p)$$
$$\psi(h_j) = v \qquad (\text{pour } j = 1, \dots q)$$

Posons :

$$\left.\begin{array}{l} G_1 = g_1 \dots g_r\,; \\ G_2 = g_{r+1} \dots g_{2r} \\ \dotfill \\ G_i = g_{(i-1)r+1} \dots g_{ir} \\ \dotfill \\ G_{p'} = g_{(p'-1)r+1} \dots g_{p'r} \end{array}\right\} p = p'r + p''\,; p'' < r$$

et de la même manière :

$$\left.\begin{array}{l} H_1 = h_1 \dots h_r \\ \dotfill \\ H_{q'} = h_{(q'-1)r+1} \dots h_{q'r} \end{array}\right\} q = q'r + q'' \quad ; \quad q'' < r$$

On obtient ainsi une nouvelle expression de h :

$$h = f_1 G_1 \dots G_{p'} g_{p'r+1} \dots g_p H_1 \dots H_{q'} h_{q'r+1} \dots h_q f_3$$

D'après le lemme 1, chaque facteur G_i se factorise lui-même en $G_i = G_i' G_i'' G_i'''$, et chaque facteur H_j et $H_j' H_j'' H_j'''$ d'une manière telle que :

L'expression régulière obtenue en substituant $G_i'(G_i'')^* G_i'''$ à $G_i (i = 1, \dots p')$ et $H_j'(H_j'')^* H_j'''$ à $H_j (j = 1, \dots q')$ dans h est celle d'un langage inclus dans R.

La remarque que nous avons faite au sujet des facteurs de $(r + r!)$ occurrences consécutives de x au moins nous permet de supposer qu'au plus un facteur G_i'' contient au moins $(r + r!) \cdot |u| \cdot r$ occurrences de x et au plus un facteur H_j'' contient au moins $(r + r!) \cdot |v| \cdot r$ occurrences de x. L'application du principe des tiroirs permet d'affirmer :

$(p' - 1)$ facteurs G_i'' au moins sont tels que :

$$0 \leqslant |G_i''|_x \leqslant (r + r!) \cdot |u| \cdot r.$$

$(q' - 1)$ facteurs H_j'' au moins sont tels que :

$$0 \leqslant |H_j''|_x \leqslant (r + r!) \cdot |v| \cdot r.$$

Soit λ le quotient de la division de $(p' - 1)$ par $(r + r!) \cdot |u| \cdot r$.

Soit μ le quotient de la division de $(q' - 1)$ par $(r + r!) \cdot |v| \cdot r$.

λ facteurs G_i'' au moins ont le même nombre θ d'occurrences de x, et $0 \leqslant \theta \leqslant (r + r!) \cdot |u| \cdot r$

μ facteurs de H_j'' au moins ont le même nombre η d'occurrences de x, et $0 \leqslant \eta \leqslant (r + r!) \cdot |v| \cdot r$.

Si $\lambda \geqslant (r + r!) \cdot |v| \cdot r$, alors $\lambda \geqslant \eta$, et si $\mu \geqslant (r + r!) \cdot |u| \cdot r$, alors $\mu \geqslant \theta$.

On peut donc extraire de la suite des λ facteurs G_i'' tels que $|G_i''|_x = \theta$ une sous-suite S de η facteurs, et de la suite des μ facteurs H_j'' tels que $|H_j''|_x = \eta$ une sous-suite S'' de θ tels facteurs.

On a alors :

$$\sum_{i \in S} |G''_i|_x = \sum_{j \in S'} |H''_j|_x = \theta \,.\, \eta$$

Soient $\hat{h}$ et $\check{h}$ les deux mots définis par :

$$\hat{h} = f_1 \hat{G}_1 \hat{G}_2 \dots \hat{G}_{p'} \dots g_p f_2 \hat{H}_1 \dots \hat{H}_{q'} \dots h_q f_3$$
$$\check{h} = f_1 \check{G}_1 \dots \check{G}_{p'} \dots g_p f_2 \check{H}_1 \dots \check{H}_{q'} \dots h_q f_3$$

avec
$$\begin{cases} \hat{G}_i = G_i & \text{si} \notin i \quad S, & G'_i G'''_i & \text{si} \quad i \in S \\ \hat{H}_j = H_j & \text{si} \notin j \quad S', & H'_j (H''_j)^2 H'''_j & \text{si} \quad j \in S' \end{cases}$$
$$\begin{cases} \check{G}_i = G_i & \text{si} \notin i \quad S, & G'_i (G''_i)^2 G'''_i & \text{si} \quad i \in S \\ \check{H}_j = H_j & \text{si} \notin j \quad S', & H'_j H'''_j & \text{si} \quad j \in S' \end{cases}$$

On a :

$$\varphi(\hat{h}) = \varphi(\check{h}) = \varphi(h) = x^n;$$
$$\psi(\hat{h}) = \alpha u^{p-I} \beta v^{q+J} \gamma \quad ; \quad \psi(\check{h}) = \alpha u^{p+I} \beta v^{q-J} \gamma$$

avec $\eta \leqslant I \leqslant r\eta$ et $\theta \leqslant J \leqslant r\theta$.

1) Si $\eta\theta \neq 0$, alors $I \cdot J \neq 0$. On se trouve devant la première éventualité.

On a de plus : $I \leqslant r^2 \cdot (r + r\,!)\,|v|$, $J \leqslant r^2(r + r\,!)\,|u|$, d'où le majorant commun $\sqrt{rs\,|u|\,|v|}$, avec $s = r^3(r + r\,!)^2\,|u|\,|v|$.

2) Si $\eta\theta = 0$, alors $\eta = 0$ ou $\theta = 0$ (ou les deux). Ces deux cas étant symétriques, nous n'envisagerons en détail que le cas $\theta = 0$.

Dans ce cas, l'hypothèse $\lambda \geqslant r(r + r\,!)\,|v|$ que nous avons formulée montre l'existence de $(r + r\,!)\,|v|$ facteurs G''_i dans h, tous égaux à une certaine puissance $u^m (m \neq 0\,; m < r)$.

Le mot h' obtenu en enlevant à $h\,(r\,!/m) \cdot |v|$ de ces facteurs est donc tel que $\varphi(h') = x^n$, $\psi(h') = \alpha u^{p-r\,|v|} \beta v^q \gamma$.

De plus, chacun de ces facteurs G''_i peut être répété un nombre arbitraire de fois ($|G''_i|_x = \theta = 0$).

Donc $\alpha u^{p-r!\,|v|} (u^{r!})^* \beta v^q \gamma \subseteq T(x^n)$.

Le cas $\eta = 0$ entraîne de la même manière l'inclusion : $\alpha u^p \beta v^{q-r!\,|u|} (v^{r!})^* \gamma$.

Enfin, dans chacun de ces cas, $T(x^n)$ est un rationnel infini, puisque $\{ x^n \}$ est un langage fini et T une transduction rationnelle, le caractère infini résultant des inclusions précédentes.

Pour conclure cette preuve, il reste à déterminer à partir de quelles valeurs de p et q nos déductions s'appliquent. Il suffit pour cela de reprendre les définitions de λ et μ :

Si $\lambda \geqslant (r + r!)\,|v|\,r$	alors	$(p' - 1) \geqslant r^2(r + r!)^2\,|u| \cdot |v|$
	donc	$p \geqslant r + r^3(r + r!)^2\,|u|\,|v|$
Si $\mu \geqslant (r + r!)\,|u|\,r$	alors	$(q' - 1) \geqslant r^2(r + r!)^2\,|u| \cdot |v|$
	donc	$q \geqslant r + r^3(r + r!)^2\,|u|\,|v|$

Reprenant la définition de s :

$$s = r^3(r + r!)^2\,|u| \cdot |v|$$

nous avons : $p \geqslant r + s$, $q \geqslant r + s$, valeur à partir de laquelle les divisions successives de la preuve donnent des quotients λ et μ assez grands.

Q.E.D.

Preuve du Théorème 1

D'après la proposition 1, il existe deux entiers r et s $(s = r^3(r + r!)^2)$ tels que :

Si $\alpha u^p \beta v^q \gamma \in T(x^n)$ et si p et q sont supérieurs à $r + s$, alors l'une au moins des deux éventualités suivantes est vérifiée :

— Il existe deux entiers non-nuls I et J tels que

$$\alpha u^{p-I} \beta v^{q+J} \gamma \in T(x^n) \qquad \text{et} \qquad \alpha u^{p+I} \beta v^{q-J} \gamma \in T(x^n)$$

et
$$I, J \leqslant \sqrt{rs\,|u|\,|v|}$$

— $T(x^n)$ est un langage rationnel infini contenant

$$\alpha u^{p-r!|v|}(u^{r!})^* \beta v^q \gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha u^p \beta v^{q-r!|u|}(v^{r!})^* \gamma$$

Comme I et $J \leqslant \sqrt{rs\,|u|\,|v|}$, la somme $I + J$ est toujours inférieure $(\leqslant)$ à $2\sqrt{rs\,|u|\,|v|}$

$I \cdot J$ étant non-nul, $I + J \geqslant 2$

Posons $N = \lambda(r + s)\,;\ \lambda = (2\sqrt{rs\,|u|\,|v|} + 1)(r!)((2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!)$
$S = (2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$

Si $w = \alpha u^p \beta v^q \gamma \in T(x^n)$, avec $p, q \geqslant N$, alors w admet λ factorisations du type :

$$\begin{aligned} w &= \alpha_k u^{r+s} \beta_k v^{r+s} \gamma_k \quad ; \quad \alpha_k = \alpha u^{(k-1)(r+s)} \\ \beta_k &= u^{p-k(r+s)} \beta v^{(k-1)(r+s)} \\ \gamma_k &= v^{q-k(r+s)} \gamma \qquad (1 \leqslant k \leqslant \lambda) \end{aligned}$$

Chacune de ces factorisations permet l'application de la proposition 1 :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_k u^{r+s-I_k}\beta_k v^{r+s+J_k}\gamma_k \in T(x^n) \text{ et} \\ \alpha_k u^{r+s+I_k}\beta_k v^{r+s-J_k}\gamma_k \in T(x^n)\end{array}\right\} 1^{\text{ère}} \text{ éventualité : cas 1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_k u^{r+s+r!|v|}(u^{r!})^*\beta_k v^{r+s}\gamma_k \subseteq T(x^n) \text{ ou} \\ \alpha_k u^{r+s}\beta_k v^{r+s-r!|u|}(v^{r!})^*\gamma_k \subseteq T(x^n)\end{array}\right\} 2^{\text{ème}} \text{ éventualité : cas 2 et cas 3}$$

Remarquons que la substitution d'exposants :
$(r + r \pm I_k)$, $(r + s \pm J_k)$, $(r + s + (\gamma - |v|)r!)$ ou $(r + s + (\gamma - |u|)r!)$
aux exposants $(r + s)$ correspondants selon les cas ne modifie pas les substitutions possibles pour les factorisations $\alpha_l u^{r+s}\beta_l v^{r+s}\gamma_l$ si $l \neq k$: les facteurs du mot de R de projections x^n et $\alpha u^p \beta v^q \gamma$ considéré étant disjoints, la modification des facteurs opérée dans la transformation de $\alpha_k u^{r+s}\beta_k v^{r+s}\gamma_k$ n'altère pas les facteurs concernés par la transformation de $\alpha_l r^{r+s}\beta_l v^{r+s}\gamma_l$.

Comme $2 \leqslant (I_k + J_k) \leqslant 2\sqrt{rs\,|u|\,|v|}$ dans le cas 1, et comme $\lambda = (2\sqrt{rs\,|u|\,|v|} + 1)!\,r!$, le principe des tiroirs permet d'affirmer que l'une des trois éventualités suivantes se présente :

1) Une même somme $(I_k + J_k)$ peut être associée à $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$ factorisations distinctes au moins.

2) Le cas 2 se présente pour $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$ factorisations distinctes au moins.

3) Le cas 3 se présente pour $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})! \cdot r!$ factorisations distinctes au moins.

Dans la première éventualité, l'inégalité $I_k + J_k \leqslant 2\sqrt{rs\,|u|\,|v|}$ implique que $(I_k + J_k)$ divise $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$. Il existe donc un entier m tel que $m(I_k + J_k) = 2\sqrt{rs\,|u|\,|v|}!\,r!$

Il suffit alors de prendre m couples (I_l, J_l) de somme $I_l + J_l = I_k + J_k$ et de calculer les sommes $i = \Sigma I_l, j = \Sigma I_l$ correspondantes :
on a : $\alpha u^{p-i}\beta v^{q+j}\gamma \in T(x^n)$ et $\alpha u^{p+i}\beta v^{q-j}\gamma \in T(x^n)$

$$\text{avec} \qquad i + j = (2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r! = S\,; \qquad ij \neq 0$$

Dans la deuxième éventualité, il suffit d'opérer $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!$ substitutions de $u^{r+s}u^{r!}$ à u^{r+s} parmi les $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$ possibles à gauche de β.

On a alors :

$$\alpha u^{p+i}\beta v^{q-j}\gamma \in T(x^n), \qquad \text{avec} \qquad i = S \quad , \quad j = 0$$

On peut également opérer $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!$ substitutions de $u^{r+s-r!}$ à u^{r+s} parmi les $(2\sqrt{rs\,|u|\,|v|})!\,r!$ possibles à gauche de β.

On a alors :

$$\alpha u^{p-i}\beta v^{q+j}\gamma \in T(x^n), \qquad \text{avec} \qquad i = S \quad , \quad j = 0$$

De plus, d'après la proposition 1, on a l'inclusion

$$\alpha u^{p-i}(u^{r!})^*\beta v^q\gamma \subseteq T(x^n)$$

Comme $i = S$ et que $r!$ divise S,

$$\alpha u^{p-i}(u^i)^*\beta v^q\gamma \subseteq T(x^n)$$

Cette deuxième éventualité couvre donc le cas $j = 0$.

La troisième éventualité se traite de manière symétrique et couvre le cas $i = 0$.

Q.E.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Berstel et L. Boasson, *Une suite décroissante de cônes rationnels*, *in* : Loeckx (Ed.), Automata, Languages and Programming, 2nd Colloquium, Saarbrücken, Springer-Verlag 1974, 383-397.

[2] L. Boasson et M. Nivat, *Sur diverses familles de langages fermées par transduction rationnelle*, Acta Informatica *2* (1973), 180-188.

[3] R. V. Book, *Tally languages and complexity classes*, Information and Control, *26* (1974), 186-193.

[4] S. Eilenberg, *Automata*, *Languages and Machines*, vol. A, Academic Press, 1974.

[5] S. Ginsburg and J. Goldstine, *Intersection closed full AFL and the recursively enumerable languages*, Information and Control, *22* (1973), 201-231.

[6] J. Goldstine, *Substitution and bounded languages*, Journal of Computer and System Science, *6*, 1972, 9-29.

[7] S. A. Greibach, *An infinite hierarchy of context-free languages*, J. Assoc. Comp. Mach., *16* (1969), 91-106.

[8] M. Nivat, *Transductions des langages de Chomsky*, Annales de l'Institut Fourier, *18* (1968), 339-456.