Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique

J. Hardouin-Duparc

Paradis terrestre dans l'automate cellulaire de Conway

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique, tome 8, nº R3 (1974), p. 63-71

<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1974__8_3_63_0>

© AFCET, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(8e année, R-3, 1974, p. 63 à 71)

PARADIS TERRESTRE DANS L'AUTOMATE CELLULAIRE DE CONWAY

par J. HARDOUIN-DUPARC [1]

Communiqué par J.-F. PERROT

Résumé. — *L'auteur donne une méthode faisant intervenir un automate fini, qui lui a permis d'exhiber une configuration sans antécédent dans l'automate cellulaire de Conway.*

I. INTRODUCTION

1° Automate cellulaire

La notion d'automate cellulaire a été dégagée vers 1950 par Von Neumann [10 cité par 2]. Von Neumann a été amené à cette notion dans la recherche d'un modèle d'autoreproduction d'un automate ; par la suite, elle a été développée pour diverses applications, par exemple : modélisation en biologie, en physique nucléaire, reconnaissance de formes [13].

Un automate cellulaire repose sur un espace cellulaire de structure régulière; dans le cas d'un espace cellulaire à 2 dimensions on peut envisager, par exemple, sur un plan, un pavage polygonal régulier dont chaque polygone constitue une cellule, généralement on choisit un pavage carré; sur un tore, un découpage par deux familles de cercles.

Chaque cellule peut prendre un nombre fini d'états; une configuration de l'automate est déterminée par les états de l'ensemble des cellules. La mesure du temps est discrète, connaissant une configuration à l'instant t on peut évaluer une configuration à l'instant $t + 1$; l'état d'une cellule à l'instant $t + 1$ ne dépend que des états, à l'instant t, d'elle-même et d'un

(1) U.E.R. de Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux I, Talence.

ensemble fini de cellules dit ensemble des voisins; la fonction qui permet d'évaluer cet état est dite fonction de transition.

L'automate cellulaire est dit uniforme si l'ensemble des voisins est défini de la même manière pour toutes les cellules; il est dit déterministe si une configuration au temps t est issue d'une seule configuration au temps $t - 1$ et donne une seule configuration au temps $t + 1$. Si une configuration au temps t peut donner plusieurs configurations au temps $t + 1$, il est dit probabiliste.

2° Automate cellulaire de Conway

Il est naturel de chercher à définir un automate cellulaire ayant une fonction de transition simple et dont l'étude n'apparaisse pas triviale. En particulier, vérifiant les conditions suivantes :

— Il n'y a pas de configurations simples aboutissant manifestement à une croissance infinie.

— Il existe des configurations qui paraissent devoir provoquer une croissance infinie.

— Les configurations simples ne doivent se ramener à un phénomène stable (disparition totale, configuration figée ou périodique) qu'après un temps « assez long ».

Un automate cellulaire répondant à ces critères, a été proposé par John Horton Conway [4] [6].

Cet automate est défini de la façon suivante :

— espace cellulaire : pavage carré du plan,

— ensemble des voisins d'une cellule : les 8 cellules qui la jouxtent soit par un côté, soit par un sommet,

— deux états possibles (habité ou inhabité),

— fonction de transition :

Si à l'instant t la cellule est habitée :

Alors si elle possède 0 ou 1 voisin ou 4 voisins habités au moins
- *Alors* elle meurt de neurasthénie (0 ou 1 voisin habité seulement) ou d'agoraphobie (plus de 4 voisins habités) et la cellule est inhabitée au temps $t + 1$
- *Sinon* la cellule reste habitée au temps $t + 1$

Sinon si elle possède exactement 3 voisins habités
- *Alors* il y a génération spontanée et la cellule est habitée au temps $t + 1$
- *Sinon* la cellule reste inhabitée au temps $t + 1$.

3° Le paradis terrestre

Pour un automate cellulaire non probabiliste, si C est une configuration à l'instant t, nous noterons $\Gamma(C)$ la configuration à l'instant $t + 1$. Étant donné une configuration G, chercher un antécédent C de G (c'est-à-dire déterminer C tel que $G = \Gamma(C)$) n'est pas un problème facile et, généralement, la solution n'est pas unique, ainsi l'automate cellulaire de Conway n'est pas déterministe.

Le problème qui nous intéresse est la recherche d'une configuration sans antécédent ; une telle configuration a été baptisée « Garden of Eden » (ou « Paradis Terrestre ») par John W. Thukey.

Pour des automates cellulaires quelconques, Edward Moore puis John Myhill, et enfin Amoroso et Cooper ont recherché des conditions d'existence de « Garden of Eden » en faisant intervenir les concepts de configurations mutuellement effaçables ou de configurations non distinguables et en s'appuyant sur des bilans de configurations ayant des antécédents [1, 2, 8, 9, 11].

En aucun cas il est donné une méthode de construction effective d'une telle configuration.

Pour l'automate cellulaire de Conway, de nombreux chercheurs ont tenté d'exhiber un tel « paradis terrestre », le seul résultat obtenu à notre connaissance est la démonstration d'existence d'une telle configuration dans un carré de 10^{20} cellules, par Smith (preuve non constructive), en s'appuyant sur le théorème de Moore [8].

Par ailleurs, Banks a proposé en 1971 une configuration dans un rectangle 9×33, qu'il pense être un « Paradis Terrestre » [12].

Nous nous proposons, ici, de montrer comment en établissant une condition suffisante pour qu'une configuration soit un « Paradis Terrestre » et en donnant un algorithme de vérification de cette condition pour des configurations inscrites dans une bande de largeur déterminée, nous avons pu exhiber effectivement un tel « Paradis Terrestre » ; l'algorithme consiste à représenter une telle configuration par un mot d'un monoïde libre ; la vérification de la condition suffisante se ramène à reconnaître que le mot associé n'appartient pas à un certain langage régulier, à l'aide d'un automate fini.

II. METHODE

1° La K-antécédence

La notion d'antécédence étant assez difficile à circonscrire, nous avons défini la notion de K-antécédence, qui possède un certain nombre de propriétés intéressantes et apparaît ainsi plus facile à utiliser.

Donnons d'abord une définition usuelle, *commode pour la manipulation* de l'antécédence. Cette notion a été utilisée dans un autre but par Codd [3 ch(3)].

Définition 1. Nous appellerons rectangle d'ordre 0 *d'une configuration* C, *soit* $R_0(C)$, *le rectangle le plus petit qui contienne toutes les cellules habitées de* C ; *le rectangle d'ordre* $n + 1$, *soit* $R_{n+1}(C)$ *est défini comme la réunion de toutes les cellules appartenant aux voisinages de cellules du rectangle d'ordre* $n \mid R_n(C)$.

Propriété 1. *Le rectangle d'ordre* 0 *du successeur d'une configuration est contenu dans le rectangle d'ordre* 1 *de cette configuration :*

$$R_0(\Gamma(C)) \subseteq R_1(C)$$

En effet, toute cellule habitée dans $\Gamma(C)$ se trouve dans $R_1(C)$: si elle n'était pas habitée dans C, elle avait une voisine habitée dans C.

Par contre, si C est un antécédent de G, on ne peut rien dire de $R_0(C)$; il peut, en effet, remplir l'espace cellulaire tout entier; même si nous nous limitons à considérer le plus petit antécédent, il paraît impossible de donner une valeur i permettant d'affirmer que $R_0(C)$ soit inclus dans $R_i(G)$; la méthode de recherche d'un antécédent ([4] ch. 3, p. 26 à 33) consiste à chercher successivement s'il en existe un, d'abord dans $R_0(G)$, puis en cas d'échec, dans $R_1(G)$, et ainsi de suite; à chaque fois il faut résoudre un programme linéaire en nombres entiers, prouver de cette manière qu'une configuration G est un « Paradis Terrestre » est donc impossible dans un temps fini.

Définition 2. Étant donné une configuration G, *nous appellerons K-antécédent de* G *toute configuration* $M \subset R_1(G)$ *telle que la restriction de* $\Gamma(M)$ *à* $R_0(G)$ *soit identique à* G.

Propriété 2. *Si une configuration* G *possède un antécédent, elle possède un K-antécédent.*

Pour le montrer, il suffit de considérer la restriction à $R_1(G)$ de l'antécédent connu.

Théorème 1. *Une configuration sans K-antécédent est un « Paradis Terrestre ».*

Si une configuration n'est pas un « Paradis Terrestre », elle possède, par définition, au moins un antécédent et, par application de la propriété 2, elle possède également un K-antécédent.

Démontrer que la réciproque du théorème 1 est fausse, apparaît comme une question ouverte et certainement difficile.

On peut, en effet, donner des exemples de configuration G telle qu'il existe un K-antécédent H et qu'il n'existe aucun antécédent de G dont la restriction à $R_1(G)$ soit identique à H; mais la configuration G peut posséder d'autres K-antécédents.

Propriété 3. *Soient G et H deux configurations telles que la restriction de G à $R_0(H)$ est identique à H; si on connaît M qui soit K-antécédent de G, alors la restriction de M à $R_1(H)$ est K-antécédent de H.*

En effet, $\Gamma(M)$ coïncide dans $R_0(G)$ avec G, a fortiori $\Gamma(M)$ coïncide avec H dans $R_0(H)$.

Il est facile de donner des exemples où cette propriété n'est pas vérifiée par l'antécédence.

Propriété 4. *Si une configuration G n'a pas de K-antécédent toute configuration dont la restriction à $R_0(G)$ est identique à G est un « Paradis Terrestre ».*

En effet, si C avait un antécédent tel que la restriction de C à $R_0(G)$ soit identique à G alors la restriction de l'antécédent de C à $R_1(G)$ serait K-antécédent de G.

2° L'automate non déterministe $\mathcal{A}_0$

Les propriétés 3 et 4 incitent à introduire cet automate. A partir de maintenant, nous considérerons des configurations appartenant à une bande horizontale de largeur fixe : n; nous assimilerons les colonnes d'une telle configuration à l'alphabet Σ suivant :

$$\Sigma = \{ 0, 1, 2, ..., 2^n - 1 \}$$

(le caractère associé à une colonne est la valeur d'un nombre écrit en binaire dont le $k^{\text{ème}}$ chiffre est 1 ou 0 selon que la $k^{\text{ème}}$ cellule de la colonne est habitée ou non).

L'ensemble des configurations finies G dans la bande de largeur n est assimilable au monoïde libre Σ^*.

Nous allons construire un automate fini non déterministe $\mathcal{A}_0$ qui reconnaît le langage formé des configurations de largeur n possédant au moins un K-antécédent.

Nous assimilons les colonnes des configurations K-antécédentes aux caractères de l'alphabet $\Sigma' = \{ 0, 1, 2, ..., 2^{n+2} - 1 \}$.

Définition 4. L'automate $\mathcal{A}_0$ est défini par :

– *États : couple de lettres de Σ'.*

— *Fonction de transition*

$$\delta_0((\beta_1, \beta_2), \alpha) = \{ (\beta_2\beta_k) \mid (\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_k) \text{ est } K\text{-antécédent de } \alpha \}$$

avec $\alpha \in \Sigma$; $\beta_1, \beta_2, \beta_k \in \Sigma'$

— *États initiaux : tous les états.*

— *États terminaux : tous les états.*

REMARQUE : Le langage formé des configurations possédant au moins un K-antécédent dans une bande donnée constitue ainsi un langage de Kleene.

Par exemple pour $n = 1$, nous avons :

$$\Sigma = \{0, 1\} \quad , \quad \Sigma' = \{0, 1, \ldots, 7\}$$

$$\delta((0, 0), 0) = (00, 01, 02, 03, 04, 05, 06)$$
$$\delta((0, 0), 1) = (07)$$
$$\delta((0, 1), 0) = (10, 11, 12, 14, 17)$$
$$\delta((0, 1), 1) = (13, 15, 16)$$
$$\delta((1, 0), 0) = (00, 01, 02, 04, 07)$$
$$\delta((1, 0), 1) = (03, 05, 06)$$
$$\delta((0, 2), 0) = (20, 21, 22, 24)$$
$$\delta((0, 2), 1) = (23, 25, 26, 27)$$

et ainsi de suite.

Théorème 2. *Si, quel que soit s état de $\mathcal{A}_0$ la fonction de transition $\delta_0(s, G)$ est non définie, alors G n'a pas de K-antécédent.*

En effet, si G possédait un K-antécédent et si nous appelons β_i, β_j et β_k, β_l respectivement les deux premières et les deux dernières colonnes de ce K-antécédent, nous aurions alors : $(\beta_k, \beta_l) \in \delta_0((\beta_i, \beta_j), G)$ et la fonction de transition serait alors définie pour (β_i, β_j).

3° L'automate déterministe $\mathcal{A}_1$

L'automate $\mathcal{A}_0$ étant non déterministe, nous lui associons l'automate déterministe $\mathcal{A}_1$ obtenu par développement [5].

Nous noterons S_0 l'ensemble des états de $\mathcal{A}_0$.

Définition 5. L'automate $\mathcal{A}_1$ est défini par :

— *États : éléments de l'ensemble des parties de S_0.*

— *Fonction de transition :*

$$\delta_1(S_K, G) = \bigcup_{s_i \in S_K} \delta_0(s_i, G)$$

— *État initial : ensemble $\mathcal{S}_0$ tout entier.*
— *États terminaux : tout état qui contient au moins un état terminal de $\mathcal{A}_0$.*

On remarque que seul l'état $\varnothing$ correspondant à l'ensemble vide n'est pas terminal dans $\mathcal{A}_1$.

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une configuration G n'ait pas de K-antécédent, est que la fonction de transition* $\delta_1(\mathcal{S}_0, G)$ *fournisse l'ensemble vide* $\varnothing$.

Ce théorème constitue la transposition immédiate du théorème 2.

Nous aboutissons ainsi à une condition suffisante pour qu'une configuration soit un « Paradis Terrestre » grâce au théorème 1 et à un moyen permettant de vérifier cette condition grâce au théorème 3.

Par exemple : pour $n = 1$, nous obtenons :

en posant
S_o = ensemble de tous les états de $\mathcal{Q}_o$
$S_1 = S_o - \{17, 37, 47, 53, 55, 56, 57, 67, 73, 75, 76, 77\}$
$S_2 = S_o - \{70\}$
$S_3 = S_1 - \{0\ 0\}$
$S_4 = S_1 - \{07\}$
$S_5 = S_1 - \{71, 72, 74\}$

$\delta_1(S_o, 0) = S_o$	$\delta_1(S_o, 1) = S_1$
$\delta_1(S_1, 0) = S_2$	$\delta_1(S_1, 1) = S_1$
$\delta_1(S_2, 0) = S_2$	$\delta_1(S_2, 1) = S_3$
$\delta_1(S_3, 0) = S_2$	$\delta_1(S_3, 1) = S_4$
$\delta_1(S_4, 0) = S_2$	$\delta_1(S_4, 1) = S_5$
$\delta_1(S_5, 0) = S_2$	$\delta_1(S_5, 1) = S_1$

Ainsi il n'y a pas de paradis terrestre en largeur 1.

III. MISE EN ŒUVRE

Pour $n = 2$ l'automate ne peut plus être développé en mémoire centrale d'un ordinateur à 131 072 octets.

Malgré la simplification apportée à l'étude du problème par la méthode choisie nous ne pouvions pas envisager une étude exhaustive même en faisant appel aux méthodes de Recherche Opérationnelle (par exemple : « Branch and Bound ») : d'une part nous n'avions aucune idée, à priori, de la longueur du mot solution, d'autre part nous ne sommes pas arrivés à dégager un critère permettant de mesurer avec certitude la qualité d'un nœud de l'arborescence à décrire.

Pour exploiter cette méthode nous avons donc opté pour un mode heuristique, adoptant le critère relatif de mesure suivant : *Un état de* $\mathcal{A}_1$ *paraît meilleur qu'un autre s'il correspond à une partie de* $\mathcal{S}_0$ *comportant un plus petit nombre d'états de* $\mathcal{A}_0$; tout en conservant la possibilité de modifier, de l'extérieur, le déroulement de la recherche, nous avons placé dans le programme une heuristique automatique ainsi conçue :

a) conserver pour chaque caractère de Σ le meilleur état trouvé au sens du critère exposé ci-avant;

b) à partir de l'un de ces états non encore exploré, évaluer tous les états pouvant être atteints par chaque caractère de Σ;

c) si certains des états ainsi trouvés apportent une amélioration à la liste des meilleurs états en réserve, effectuer le remplacement et reprendre en *b*);

d) dans le cas contraire, prospecter à nouveau en partant du meilleur état obtenu; toutefois, si aucune amélioration n'est trouvée au bout de quelques pas, on considère cette exploration comme un cul-de-sac et l'on reprend en *b*).

Cette heuristique nous a été inspirée par les résultats obtenus lors des premiers essais en largeur 2, 3, 4 et 5.

Nous avons également essayé d'autres heuristiques, par exemple la concaténation de mots ayant fourni de bons résultats, mais cela s'est avéré décevant.

En largeur 1, 2, 3, 4 et 5, les recherches nous avaient permis d'atteindre des états de $\mathcal{A}_1$ correspondant à des parties de S_0 représentant respectivement : 80, 60, 40, 20 et 8 % des états de $\mathcal{A}_0$; évolution qui nous a encouragés à essayer la largeur 6. Pour obtenir un traitement assez rapide il était nécessaire de mémoriser sur support magnétique l'automate $\mathcal{A}_0$; les moyens à notre disposition ne le permettant pas, et l'expérience des largeurs inférieures nous ayant montré que la densité de population des meilleures configurations était relativement grande, nous n'avons retenu dans Σ que 15 caractères sur 64.

Moyennant ces restrictions, nous avons réussi à exhiber deux « paradis terrestre » de longueur 122 et 117.

Un article plus détaillé a été publié par ailleurs [7].

Nous tenons également à la disposition des chercheurs, la portion, de l'automate $\mathcal{A}_0$, utilisée (environ 2 000 pages) et les 116 états intermédiaires de la seconde solution (également 2 000 pages).

A l'aide de moyens de calculs plus puissants, il serait possible d'envisager une étude exhaustive pour parvenir à déterminer des configurations plus courtes ou dans des largeurs plus grandes des configurations moins étendues, on pourrait également vérifier assez facilement si la configuration proposée par Banks [11] possède ou non des K-antécédents.

La méthode permet également de construire assez commodément un antécédent d'une configuration sans faire appel à des résolutions de programmes linéaires en nombres entiers; il suffira, en effet, de rechercher une configuration K-antécédente, en choisissant de préférence une solution dont les bords de R_1 sont relativement peu habités et, éventuellement, de compléter en dehors de R_1 par des cellules qui auront pour rôle de tuer par agoraphobie les cellules du K-antécédent qui sont dans R_1 et qui ne meurent pas de neurasthénie.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMOROSO S. et COOPER G., *The Garden of Eden for finite configurations*. Proc. American Math. Soc. *26*, 1970, p. 158-164.

[2] BURKS A. W., *Essays on cellular automata*, University of Illinois Press, Urbana, 1970.

[3] CODD E. F., *Cellular Automata*, Academic Press, New-York, 1968.

[4] GARDNER M., *Mathematical Game*, Scientific American, fev. 1971, p. 112-117.

[5] GROSS M. et LENTIN A., *Notions sur les grammaires formelles*, Gauthier-Villars, Paris, 1970.

[6] HANTCHERLIAN G. et HERVIO D., *Automates cellulaires*, roneotype, Université de Grenoble, juin 1972.

[7] HARDOUIN-DUPARC J., *A la recherche du paradis perdu*, Publications Mathématiques de l'Université de Bordeaux I, fascicule 4, 1972-1973, p. 51-89.

[8] MOORE E. F., *Machine Models of self-reproduction*. Proceeding of Symposia in Applied Mathematic, vol. 14, Amer. Math. Soc. Providence, R. I. 1962, p. 17-33.

[9] MYHILL J., *The converse of Moore's Garden of Eden theorem*, Proc. American Math. Soc. *14*, 1963, p. 685-686.

[10] NEUMANN Von J., *Theory of self reproducing automata*, University of Illinois Press, Urbana, 1966.

[11] SKYUM S., *Confusion in the Garden of Eden*, à paraître dans Proc. American Math. Soc.

[12] WAINWRIGHT . T. R., *The Orphan*, Lifeline, septembre 1971 (p. 31), Wilton (Connecticut).

[13] WRIGHT, *Physiological Genetics*, *Ecology of Populations and Natural Selection*, p. 429-475 de « The Evolution of Life 1 », University of Chicago Press, 1960.