REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE INFORMATIQUE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. INFORMATIQUE THÉORIQUE

PHILIPPE FLAJOLET
JEAN-MARC STEYAERT

Une généralisation de la notion d'ensemble immune

Revue française d'automatique informatique recherche opérationnelle. Informatique théorique, tome 8, nº R1 (1974), p. 37-48
<http://www.numdam.org/item?id=ITA_1974__8_1_37_0>

R.A.I.R.O.
(8e année, R-1, 1974, p. 37-48)

UNE GENERALISATION DE LA NOTION D'ENSEMBLE IMMUNE

par Philippe FLAJOLET et Jean-Marc STEYAERT*

Communiqué par M. NIVAT

Résumé. — *Nous introduisons une généralisation des notions d'ensembles simples et immunes; un ensemble est dit immune vis-à-vis d'une famille d'ensembles $\mathcal{B}$ s'il ne possède aucun sous-ensemble non trivial (i-e infini) dans $\mathcal{B}$. On donne une construction telle que lorsque $\mathcal{B}$ est subrécursive, l'ensemble obtenu est récursif. Lorsque $\mathcal{B}$ est une classe de complexité, on est conduit à la notion d'ensemble n'ayant que des sous-ensembles difficiles à reconnaître. On déduit de l'existence de ces ensembles des résultats d'indécidabilité concernant les classes subrécursives permettant notamment de préciser le degré d'indécidabilité des problèmes étudiés. Ces résultats peuvent alors être appliqués à l'étude des propriétés de compacité de programmes dans des langages de programmation subrécursifs de puissances différentes.*

1. CONSTRUCTION DE BASE ET PROPRIETES

Soit E un ensemble, $\mathcal{B}$ une famille de parties de E encore appelée classe : $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$. Nous remarquons d'abord qu'un ensemble $I \subset E$ n'a aucun sous-ensemble infini appartenant à $\mathcal{B}$ ssi (1) son complément coupe les éléments de $\mathcal{B}$ qui sont infinis. Ceci découle de l'équivalence entre les conditions (1) et (2) ci-dessous :

(1) $\forall A$ infini $[A \subset I \rightarrow A \notin \mathcal{B}]$

(2) $\forall A$ infini $[A \in \mathcal{B} \rightarrow A \cap \bar{I} \neq \emptyset]$.

Le problème de la détermination d'un ensemble I vérifiant ces conditions a toujours une solution triviale qui consiste à prendre I fini et $S = \bar{I}$ cofini. Écartant ces solutions, nous posons :

Définition. — Un ensemble est $\mathcal{B}$-immune ssi il est infini et n'a aucun sous-ensemble infini dans la famille $\mathcal{B}$.

* I.R.I.A. 78-Rocquencourt, France.

(1) Si et seulement si.

Un ensemble est $\mathcal{B}$-simple ssi il est co-infini et coupe tout élément de la classe $\mathcal{B}$.

Comme indiqué précédemment, un ensemble est $\mathcal{B}$-simple ssi son complémentaire est $\mathcal{B}$-immune. Remarquons que de tels ensembles n'existent pas toujours, en particulier si l'on prend $\mathcal{B} = \mathcal{P}(N)$. Par la suite nous nous restreindrons à l'étude du cas où E est dénombrable — le plus souvent N — et où $\mathcal{B}$ est une famille dénombrable de parties de E.

EXEMPLE : 1. Ces deux concepts sont des extensions naturelles des notions correspondantes d'ensemble simple et d'ensemble immune en récursivité, cf. Rogers [1]. Pour nous un ensemble immune est un ensemble r.e-immune (immune vis-à-vis des récursivement énumérables) et un ensemble simple est un ensemble r.e-simple qui est lui-même r.e.

2. Soit $\mathcal{A} = \{ A_{mn} \}$ avec $A_{mn} = \{ mt + n \mid t \in N \}$ l'ensemble des progressions arithmétiques et soient K l'ensemble des carrés et P l'ensemble des nombres premiers; le fait que K et P soient $\mathcal{A}$-immunes traduit des propriétés arithmétiques élémentaires de ces ensembles.

3. Soient Rat $[\Xi]$ la famille des parties rationnelles (ou régulières) et Alg $[\Xi]$ la famille des parties algébriques (ou context-free) sur un alphabet Ξ. Une application simple du théorème de l'étoile montre que le langage $L = \{ a^n b^n \}$ est Rat $[\{ a, b \}]$-immune. De même une application du théorème de la double étoile montre que $L' = \{ a^n b^n a^n \}$ est Alg $[\{ a, b \}]$ immune.

Lemme : Pour toute famille dénombrable de parties de N, $\mathcal{B}$, il existe un ensemble $\mathcal{B}$-immune.

Démonstration : Le principe est analogue à celui de la construction de Post décrit dans Rogers [1]. Soit B une énumération (1) de $\mathcal{B}$. Un ensemble $\mathcal{B}$-simple S s'obtient en choisissant un élément dans chaque membre de $\mathcal{B}$ qui est infini tout en s'assurant que $I = \bar{S}$ est infini. Pour cela on considère l'ensemble :

$$C(\mathcal{B}) = \{ (x, y) \mid y \in B_x \wedge y > 2 \cdot x \}$$

Un ensemble $\mathcal{B}$-simple s'obtient par un choix dans $C(\mathcal{B})$ selon la première coordonnée; c'est-à-dire que pour chaque x on choisit — au moyen d'un certain procédé de choix — un y, s'il en existe, tel que $(x, y) \in C(\mathcal{B})$; l'ensemble des y ainsi obtenus constitue un ensemble $\mathcal{B}$-simple, soit S.

(1) Un prédicat binaire sur N, soit A, est une énumération d'une classe $\mathcal{A}$ de prédicats unaires (ensembles) si $\mathcal{A}$ coïncide avec la famille $\{ A_n \}_{n \in N}$ obtenue en fixant le premier argument de A. Une fonction f est fonction énumérante d'un ensemble E si $E = f(N)$.

En effet, cet ensemble coupe tout élément infini de la famille $\mathcal{B}$. D'autre part, pour tout n, $S \cap [0\,; 2 \cdot n]$ contient au plus des éléments choisis dans $B_0, B_1, \dots B_{n-1}$. Donc $\forall\, n \operatorname{card}(S \cap [0\,; 2n]) \leqslant n$ ce qui montre que $\bar{S}$ est infini. $\otimes$

Remarquons que tout sous-ensemble infini d'un ensemble $\mathcal{B}$-immune étant lui-même $\mathcal{B}$-immune, il existe même une infinité continue d'ensembles $\mathcal{B}$-immunes.

En particulier, lorsque $\mathcal{B}$ est la famille des récursivement énumérables (r.e) munie d'une énumération standard, $C(\mathcal{B})$ est récursivement énumérable. L'application du théorème du choix récursivement énumérable — fondée sur une fonction énumérante — fournit alors un ensemble r.e-simple qui est lui-même r.e, cf. Rogers [1] ; on obtient ainsi la construction de Post. Plus précisément soit $f \in N \to N^2$ une fonction récursive qui énumère $C(\mathcal{B})$ et soient $(\ )_1$ et $(\ )_2$ les deux fonctions projections. On définit un choix de couples dans $C(\mathcal{B})$ par g récursive telle que :

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g(t+1) = f[\mu k \quad \forall\, j \leqslant t \quad (\, f(k)\,)_1 \neq (\, g(j)\,)_1] \end{cases}$$

L'ensemble simple est obtenu comme l'ensemble des seconds éléments des couples ainsi constitués et se trouve donc énuméré récursivement par

$$h(x) = (\, g(x)\,)_2.$$

Théorème 1 (Post) : Il existe un ensemble simple.

Par la suite nous nous intéresserons à des classes dénombrables possédant une énumération récursive; il est alors nécessaire d'adopter un opérateur de choix différent, de sorte à obtenir des ensembles simples et immunes récursifs; on utilisera l'opérateur « bord » : pour tout x on choisit le plus petit y — s'il existe — tel que $(x, y) \in C(\mathcal{B})$. L'ensemble $\mathcal{B}$-simple S est ainsi défini par :

$$y \in S \quad \text{ssi} \quad \exists\, x[(x, y) \in C(\mathcal{B}) \wedge \forall\, t < y \qquad (x, t) \notin C(\mathcal{B})]$$

Soit

$$y \in S \quad \text{ssi} \quad \exists\, x[y \in B_x \wedge y > 2 \cdot x \wedge \forall\, t < y \qquad t > 2 \cdot x \to t \notin B_x]$$

Or une expression du type $\exists\, x[y > 2 \cdot x \wedge \dots]$ peut se remplacer par $\exists\, x < y[y > 2 \cdot x \wedge \dots]$. D'où la relation définissant S :

$$y \in S \quad \text{ssi} \quad \exists\, x < y[y > 2 \cdot x \wedge y \in B_x \wedge \forall\, t < y[t > 2 \cdot x \to t \in B_x]]$$

De même $I = \bar{S}$ est défini par :

$$y \in I \quad \text{ssi} \quad \forall x < y[y > 2 \cdot x \wedge y \in B_x \rightarrow \exists t < y[t \notin B_x \wedge t > 2 \cdot x]]$$

Cette construction peut se résumer par le théorème suivant :

Théorème 2 : Soit $\mathcal{C}$ une classe de prédicats sur N, $\mathcal{B}$ une famille de parties de N. Si $\mathcal{C}$ vérifie les conditions :

(α) $\mathcal{C}$ contient une énumération de $\mathcal{B}$ ainsi que la relation $\lambda uv \cdot u > 2 \cdot v$.

(β) $\mathcal{C}$ est close par opérations booléennes, quantifications bornées et changement de variables,

alors $\mathcal{C}$ contient un ensemble $\mathcal{B}$-immune.

Soient $\mathcal{E}^n$ les classes subrécursives de Grzegorczyk [2], $\mathcal{R}^n$ les classes de Peter [3]. Le théorème 2 entraîne :

Corollaire : (α) Pour tout n, il existe dans $\mathcal{R}^{n+1}$ un ensemble $\mathcal{R}^n$-immune. (β) Pour tout $n \geqq 3$, il existe dans $\mathcal{E}^{n+1}$ un ensemble $\mathcal{E}^n$-immune.

En particulier, il existe dans $\mathcal{R}^1 = \bigcup_{n \in N} \mathcal{E}^n$ un ensemble $\mathcal{E}^3$-immune, ou encore : il existe un ensemble récursif primitif (infini) dont tous les sous-ensembles infinis sont non-élémentaires. Si donc l'on considère comme faciles à reconnaître les ensembles élémentaires et corrélativement comme complexes, les ensembles non-élémentaires, on a construit un ensemble récursif qui n'a que des sous-ensembles complexes; de surcroît, la « complexité » même de cet ensemble est bornée supérieurement puisqu'on détermine également qu'il est récursif primitif. Cette remarque peut recevoir une formulation précise dans le cadre des classes de complexité axiomatiquement introduites par Blum [4] et des classes de complexité de calcul par machines de Turing. Les résultats correspondants se trouvent exposés dans [5]. On établit notamment le résultat suivant obtenu indépendamment par Constable [6] au moyen d'une construction différente :

Théorème : Étant donnée une mesure de complexité Φ quelconque, il existe une fonction récursive r telle que pour toute classe de complexité R_t^{Φ} définie par une borne t honnête, il existe dans la classe $R_{r_0 t}^{\Phi}$ un ensemble R_t^{Φ}-immune.

Dans le cas des calculs par machines de Turing, une évaluation du coût du processus de diagonalisation est possible. Citons par exemple :

Proposition : Il existe un ensemble reconnaissable en temps exponentiel par machine de Turing qui ne possède aucun sous-ensemble infini reconnaissable en temps polynômial.

Indiquons encore deux prolongements possibles de cette construction. Le premier montre qu'il existe un ensemble immune inclus dans tout ensemble infini.

Proposition : Pour tout A infini, il existe I inclus dans A tel que I est $\mathfrak{B}$-immune.

Démonstration : On modifie la construction de base, de sorte à obtenir un ensemble S-simple qui contienne le complémentaire de A. $S = \bar{A} \cup S_A$ où S_A est obtenu en relativisant à A le procédé de choix c'est-à-dire en considérant : $C_A(\mathfrak{B}) = \{(x, y) \mid B_x(y) \wedge y > 2 \cdot x \wedge y \in A\}$, puis S_A est obtenu par un choix sur $C_A(\mathfrak{B})$ selon la première coordonnée. ⊗

Les théorèmes 1 et 2 s'étendent alors :

$\forall A$ récursif infini $\exists I[I \subset A \wedge I$ immune] (immunité au sens classique).

$\forall \mathfrak{B} \forall A$ récursif infini $\exists I$ récursif $[I \subset A \wedge I$ $\mathfrak{B}$-immune].

Le second prolongement est constitué par la notion d'ensemble fortement $\mathfrak{B}$-simple :

Un ensemble est dit fortement $\mathfrak{B}$-simple s'il coupe tout élément infini de $\mathfrak{B}$ en une infinité de points; il est clair qu'un ensemble fortement $\mathfrak{B}$-simple est $\mathfrak{B}$-simple.

Proposition : Pour toute classe $\mathfrak{B}$ dénombrable, il existe un ensemble S qui est fortement $\mathfrak{B}$-simple.

Démonstration : Soit r une fonction de grande amplitude c'est-à-dire telle que $\forall x \overset{\infty}{\exists} y[r(y) = x]$. Soit B une énumération de $\mathfrak{B}$; on considère $\tilde{B}$ défini par $\tilde{B}(x, y) = B(r(x), y)$. $\tilde{B}$ énumère $\mathfrak{B}$, et de plus à tout élément B_i de $\mathfrak{B}$ correspond une infinité d'index dans $\tilde{B}$ à savoir $r^{-1}(i)$. Soit alors $\tilde{C}(\mathfrak{B}) = \{(x, y) \mid y \in \tilde{B}_x \wedge y > 2 \cdot x\}$; on construit $\tilde{S}$ par un choix sur $\tilde{C}(\mathfrak{B})$. Soit B_i un élément infini de $\mathfrak{B}$ et $R = r^{-1}(i)$. Pour tout σ dans R, $\tilde{B}_\sigma = B_i$; d'autre part d'après la construction de base $\tilde{B}_\sigma \cap \tilde{S} = B_i \cap \tilde{S}$ contient un $x_\sigma > 2 \cdot \sigma$. R étant infini $B_i \cap \tilde{S}$ qui contient l'ensemble des x_σ est infini. ⊗

Prenant pour r une fonction récursive on étend le théorème 2 de la manière suivante :

$$\forall \mathfrak{C} \text{ récursive } \exists S \text{ récursif } S \text{ est fortement } \mathfrak{C}\text{-simple.}$$

Indiquons finalement un cas assez important où les notions d'ensembles $\mathfrak{D}$-simple et fortement $\mathfrak{D}$-simple coïncident; c'est celui où les classes sont finiment invariantes, soit : Pour tout P dans $\mathfrak{D}$, tout ensemble Q dont la différence symétrique avec P est finie appartient également à $\mathfrak{D}$.

En effet, soit S un ensemble $\mathfrak{D}$-simple; soit B infini $\in \mathfrak{D}$; on définit par récurrence des éléments x_k et des ensembles B_k, qui appartiennent à $\mathfrak{D}$, par :

$$\begin{cases} B_0 = B \\ x_0 \in B \cap S \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} B_{k+1} = B_k - \{ x_k \} \\ x_{k+1} \in B_{k+1} \cap S \end{cases}$$

Soit $X = \{ x_k \mid k \in N \}$; X est infini et $X \subset B \cap S$.

En particulier tout ensemble (r.e)-simple est fortement r.e-simple.

2. APPLICATION AUX PROBLEMES D'APPARTENANCE ET DE HIERARCHIE

Dans cette section, nous utilisons les ensembles immunes généralisées pour étudier le problème suivant : Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux classes dénombrables de parties de N telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ et soit B une énumération de $\mathcal{B}$; le problème d'appartenance APPART $[B ; \mathcal{A}]$ encore noté $[B ; \mathcal{A}]$ est un prédicat unaire défini par :

$$[B ; \mathcal{A}](x) \quad \text{ssi} \quad B_x \in \mathcal{A}.$$

Ainsi, prenant pour $\mathcal{A}$ la classe des ensembles récursifs élémentaires, pour $\mathcal{B}$ la classe des ensembles récursifs primitifs munie d'une énumération standard B, le problème $[B ; \mathcal{A}]$ est le problème de déterminer si un schéma récursif primitif représente un ensemble récursif élémentaire.

Par la suite, nous supposerons pour l'étude de problèmes $[B ; \mathcal{A}]$ que B est récursive et que $\mathcal{A}$ est une classe récursive, c'est-à-dire possède une énumération récursive A. Le problème $[B ; \mathcal{A}]$ qui s'écrit :

$$[B ; \mathcal{A}](x) \quad \text{ssi} \quad \exists\, y\, \forall\, t [B_x(t) \equiv A_y(t)]$$

est donc un problème Σ_2 au sens de la hiérarchie arithmétique de Kleene [1].

Un cas particulier de problème d'appartenance est le problème $[B ; \mathcal{F}]$ où $\mathcal{F}$ est la classe des parties finies de N. $[B ; \mathcal{F}]$ est alors le problème de finitude pour B encore noté FIN $[B]$; il s'exprime également sous forme Σ_2. Bien que ce problème ne soit pas toujours indécidable — cf. les grammaires rationnelles et algébriques pour lesquelles il est décidable — il est souvent possible de montrer qu'il est Σ_2-complet ; il suffit pour cela que $\mathcal{B}$ permette de coder un mécanisme d'évaluation de toutes les semi-fonctions récursives, par exemple les suites de calcul de machines de Turing ou de machine à registres.

Plus précisément :

B est une base forte pour les r.e. s'il existe ρ récursive et un codage récursif de N^2 sur N noté $\langle x, y \rangle$ tel que

$$\forall i \forall x[x \in W_i \equiv \exists y \langle x, y \rangle \in B_{\rho(i)}] \wedge \forall i \forall x\ !y[\langle x, y \rangle \in B_{\rho(i)}] \text{ (1)}$$

Lemme : Si B est une base forte pour les r.e., alors le problème de la finitude pour B est Σ_2-complet.

En effet W_i fini ssi $B_{\rho(i)}$ fini.

Nous allons maintenant réduire sous certaines conditions le problème FIN [B] au problème [B ; $\mathcal{A}$] en utilisant la notion d'ensemble $\mathcal{A}$-immune.

Définition : Soient H et K deux parties de N; on définit la composition spéciale de H et K comme l'ensemble des éléments de H dont le rang dans l'énumération naturelle de H appartient à K, soit :

$$y \in H*K \quad \text{ssi} \quad y \in H \wedge \text{card}\, \{ u \mid u \in H \wedge u \leqslant y \} \in K$$

Remarquons que si h est la semi-fonction d'énumération naturelle de H alors $H*K = h(K)$.

Théorème 3 : Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ énuméré par B vérifient les conditions suivantes :

(α) $\mathcal{A}$ contient les ensembles finis.

(β) $\mathcal{B}$ contient un ensemble $\mathcal{A}$-immune.

(γ) $\mathcal{B}$ énuméré par B est effectivement clos par composition spéciale, alors FIN [B] est réductible à [B ; $\mathcal{A}$]. En particulier si FIN [B] est Σ_2-complet [B ; $\mathcal{A}$] est aussi Σ_2-complet.

Démonstration : $\mathcal{B}$ énuméré par B est effectivement clos par composition spéciale s'il existe une fonction récursive totale τ qui représente la composition spéciale sur B c'est-à-dire tel que : $B_i * B_j = B_{\tau(i,j)}$.

Soit Δ un ensemble $\mathcal{A}$-immune et soit S un ensemble quelconque dans $\mathcal{B}$; considérons $\Delta * S$. Deux cas se présentent :

— si S est fini $\Delta * S$ est un sous-ensemble fini de Δ, et d'après la condition (α) $\Delta * S \in \mathcal{A}$;

— si S est infini, $\Delta * S$ est un sous-ensemble infini de Δ qui n'appartient pas à $\mathcal{A}$ d'après la propriété d'immunité de Δ.

La réduction est effective soit δ un index de Δ dans B nous avons :

— si $S = B_x$ est fini alors $B_\delta * B_x = B_{\tau(\delta,x)} \in \mathcal{A}$,

— si $S = B_x$ est infini alors $B_\delta * B_x = B_{\tau(\delta,x)} \notin \mathcal{A}$.

(1) $!\, y$ signifie « il existe au plus un y tel que... ».
W désigne une énumération standard des r.e.

La fonction $v(x) = \tau(\delta, x)$ assure alors la réduction FIN $[B]$ à $[B ; \mathcal{A}]$ car FIN $[B](x)$ ssi $[B ; \mathcal{A}](v(x))$. $\otimes$

Le problème de hiérarchie est une extension naturelle du problème de l'appartenance. Soit $\{ \mathcal{A}_i \}_{i \in N}$ une hiérarchie de classes de parties de N avec $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_{i+1}$ et soit $\mathcal{B}$ l'union des $\mathcal{A}_i$. B étant une énumération de $\mathcal{B}$, la fonction de hiérarchie μ_B de B vis-à-vis des $\mathcal{A}_i$ est une fonction de N dans N définie par $\mu_B(x) = n$ ssi $B_x \in \mathcal{A}_n / \mathcal{A}_{n-1}$. Le problème de hiérarchie de B vis-à-vis des $\mathcal{A}_i$ est la relation binaire $\mu_B(x) = n$.

Nous étudierons par la suite le cas où les $\mathcal{A}_i$ possèdent une énumération récursive uniforme c'est-à-dire qu'il existe un prédicat récursif $A(i, s, x)$ tel que pour chaque i, A_i énumère la classe $\mathcal{A}_i$. Il en découle que $\mathcal{B}$ est elle-même récursive étant énumérée par $A(|z|_1, |z|_2, x)$ où $\|_1$ et $\|_2$ sont des fonctions de décodage de N sur N^2.

Le théorème 3 s'étend alors de la manière suivante :

Théorème 4 : Soient $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}$ et B définis comme ci-dessus ; si les conditions suivantes sont vérifiées :

(α) les parties finies $\mathcal{F}$ sont contenues dans l'un des $\mathcal{A}_i$ soit $\mathcal{A}_{i_0}$,

(β) pour chaque i, $\mathcal{B}$ contient un ensemble $\mathcal{A}_i$-immune,

(γ) $\mathcal{B}$ énuméré par B est effectivement clos par composition spéciale,

(δ) le problème de finitude pour B est Σ_2-complet.

alors le problème de hiérarchie pour B par rapport aux $\mathcal{A}_i$ est strictement Δ_3. Il est de plus *tt*-complet dans la clôture booléenne de Σ_2.

Démonstration : Le problème de hiérarchie s'écrit :

$$\mu_B(x) = i \quad \text{ssi} \quad [B ; \mathcal{A}_i](x) \wedge \neg [B ; \mathcal{A}_{i-1}](x)$$

$$\text{ssi} \quad \exists\, t\, \forall\, n[B(x, n) \equiv A(i, t, n)] \wedge \forall\, t\, \exists\, n[B(x, n) \not\equiv A(i-1, t, n)]$$

et se trouve par conséquent dans la clôture Booléenne de Σ_2 donc *a fortiori* dans Δ_3. Le graphe d'une fonction arithmétique totale étant toujours dans l'un des Δ_i, il suffit de démontrer que le problème de hiérarchie qui est le graphe de μ_B n'est pas dans Δ_2.

D'après le théorème précédent, pour $i \geqslant i_0$ chacun des problèmes d'appartenance $[B ; \mathcal{A}_i]$ est Σ_2-complet; c'est le cas notamment pour $[B ; \mathcal{A}_{i_0}]$. Or $[B ; \mathcal{A}_{i_0}](x)$ ssi $\mu_B(x) \leqslant i_0$ ssi $\bigvee_{j \leqq i_0} \mu_B(x) = j$.

Si le problème de hiérarchie était Δ_2 alors $[B ; \mathcal{A}_{i_0}]$ le serait aussi ce qui est contradictoire. Cette écriture montre de plus qu'un problème Σ_2-complet est *tt*-réductible au problème de hiérarchie qui est par conséquent *tt*-complet dans la clôture booléenne de $\Sigma_2 \cdot \otimes$.

EXEMPLE : Soit $CS[\Xi]$ la classe des langages context-sensitive sur un alphabet Ξ ; on a vu que les langages de $CS[\{a, b\}]$,

$$L_1 = \{ a^n b^n \mid n \in N \} \text{ et } L_2 = \{ a^n b^n a^n \mid n \in N \}$$

sont respectivement Reg $[\{a, b\}]$-immune et Alg $[\{a, b\}]$-immune. L'opération de composition spéciale initialement définie sur les parties de N s'étend naturellement aux langages sur un alphabet fini au moyen de l'assimilation des nombres à une repésentation conventionnelle unaire ou binaire. Il est clair dans ces conditions que $CS[\{a, b\}]$ est clos par composition spéciale. D'autre part le problème de la finitude pour $CS[\{a, b\}]$ est Σ_2-complet car $CS[\{a, b\}]$ constitue une base forte pour les récursivement énumérables; ceci se montre par une simulation de machines de Turing par des MLB reconnaissant les langages context-sensitive, cf. [7]. L'application du théorème 3 permet de retrouver le résultat connu, cf. Cudia [8], selon lequel déterminer si un langage context-sensitive est rationnel ou algébrique constitue un problème Σ_2-complet.

Applications : Les applications des deux derniers théorèmes sont le plus souvent fondées sur la combinaison du théorème 2 avec l'un des théorèmes 3 ou 4. En particulier si $\mathcal{B}$ énuméré par B possède des propriétés de clôture suffisantes alors le problème d'appartenance $[B ; \mathcal{A}]$ est Σ_2-complet pour toutes les classes récursives $\mathcal{A}$ contenant les ensembles finis et possédant une énumération récursive dans $\mathcal{B}$. Dans ce cas la propriété est également héréditaire, c'est-à-dire que sous les hypothèses du théorème 3 le problème d'appartenance $[B ; \mathcal{A}']$ est aussi Σ_2 complet pour toutes les classes récursives $\mathcal{A}'$ telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Ces remarques sont à rapprocher de résultats obtenus indépendamment par Lewis [9].

Soient R^n et E^n des énumérations standards des classes $\mathcal{R}^n$ et $\mathcal{E}^n$ précédemment introduites on obtient un corollaire qui renforce les résultats d'indécidabilité de Meyer-Ritchie [10].

Corollaire : (α) Pour chaque $n \geqq 3$ le problème $[E^{n+1}; \mathcal{E}^n]$ est Σ_2-complet.

(β) Pour chaque $n \geqq 1$ le problème $[R^{n+1}; \mathcal{R}^n]$ est Σ_2-complet.

(γ) Le problème de hiérarchie de R^1 (énumération des récursifs primitifs) vis-à-vis des classes $\mathcal{E}^n$ est strictement Δ_3.

Démonstration : Elle découle des corollaires au théorème 2, des théorèmes 3 et 4 et des propriétés de clôture des classes $\mathcal{E}^n$ et $\mathcal{R}^n$ · $\otimes$

Soit $\mathcal{T}^n$ la classe des langages reconnaissables par automates finis déterministes à n têtes à mouvement dans les deux sens, cf. Ibarra [11]. Il est clair que la hiérarchie $\mathcal{T}^n$ possède une énumération récursive uniforme. Soit T une énumération récursive de $\mathcal{T} = \bigcup_n \mathcal{T}^n$; on a alors le résultat que la minimalisation du nombre de têtes nécessaires à la reconnaissance des langages de $\mathcal{C}$ est une fonction non calculable ; ce résultat est un parallèle de celui de Rosenberg [12] concernant les automates à mouvement dans un seul sens; plus précisément :

Corollaire : Le problème de hiérarchie de T vis-à-vis de $\{ \mathcal{C}^n \}$ est strictement Δ_3.

Démonstration : Une démonstration complète se trouve dans Flajolet-Steyaert [13].

3. COMPACITE DES PROGRAMMES

Meyer-Fischer [14] ont démontré que des descriptions par grammaires algébriques d'ensembles rationnels peuvent être arbitrairement plus compactes que les expressions régulières correspondantes. Blum [4] a obtenu un résultat similaire : les descriptions d'algorithmes primitifs récursifs peuvent être rendues arbitrairement plus courtes par l'utilisation de commandes « tant que » (while statements).

Dans cette section, nous montrons que les propriétés des ensembles immunes ainsi que les résultats d'indécidabilité nous permettent d'obtenir des propriétés concernant la compacité des programmes dans des langages subrécursifs de puissances différentes. Rappelons la notion de taille de programmes (« size measure ») introduite axiomatiquement par Blum [4]. D_i dénote l'ensemble fini d'indice canonique i.

Définition : Une fonction récursive $s : N \to N$ est appelée une mesure de taille ssi :

(1) il existe un nombre fini de programmes de taille donnée c'est-à-dire que pour tout y, $s^{-1}(y)$ est fini.

(2) L'ensemble fini $s^{-1}(y)$ peut être obtenu effectivement à partir de y, c'est-à-dire qu'il existe t récursive telle que $s^{-1}(y) = D_{t(y)}$.

Théorème 5 : Si le problème d'appartenance $[B ; \mathcal{A}]$ est $\Sigma_2 - \Pi_2$ alors B permet une compactification de programmes pour $\mathcal{A}$; c'est-à-dire que étant donné une énumération récursive quelconque A de $\mathcal{A}$ et deux mesures de taille $\|_A$ et $\|_B$:

$$\forall f \text{ récursive } \exists B_i [B_i \in A \wedge \forall j [A_j = B_i \to |j|_A > f(|i|_B)]].$$

En d'autres termes pour toute fonction récursive f arbitrairement grande, il existe un programme écrit dans le langage B dont la taille est plus courte dans un rapport f, que la taille de tous les programmes équivalents écrits dans le langage A.

Démonstration : Supposons au contraire qu'il existe f récursive telle que

$$\forall\, i[B_i \in A \rightarrow \exists\, j[A_j = B_i \wedge |j|_A \leqslant f(|i|_B)]]$$

Remarquons que dans tous les cas :

$$\forall\, i[B_i \notin A \rightarrow \forall\, j[\,|j|_A \leqslant f(\,|i|_B) \rightarrow A_j \neq B_i]]$$

Nous aurions donc :

$$B_i \in A \quad \text{ssi} \quad \exists\, j[\,|i|_A \leqslant f(\,|i|_B \wedge \forall\, x[A_j(x) \equiv B_i(x)]].$$

Les propriétés des mesures de taille assurent que le j cherché se trouve dans un ensemble fini dont l'index peut se calculer à partir de i : $\bigcup_{k \leqslant f(i)} D_{t(k)}$. Par conséquent le problème de l'appartenance serait seulement Π_1 ce qui contredit l'hypothèse du théorème. ⊗

Comme corollaires nous obtenons que le langage R^1 permet une compactification arbitraire de programmes pour la classe $\mathcal{E}^3$ des ensembles élémentaires, les grammaires algébriques permettent une compactification arbitraire pour la classe des langages rationnels; ce dernier résultat est établi au moyen d'un procédé différent dans Meyer-Fischer [14].

De plus si les conditions du théorème 3 sont remplies on peut montrer que la compactification existe même vis-à-vis des ensembles finis :

Théorème 6 : Sous les hypothèses du théorème 3, FIN $[B]$ étant Σ_2-Π_2, B présente une compactification arbitrairement grande pour $\mathcal{A}$ sur ensembles finis, c'est-à-dire :

$$\forall f \text{ récursive } \exists\, B_i \text{ fini } \forall\, j[A_j = B_i \rightarrow |j|_A > f(\,|i|_B)]$$

Démonstration : Supposons au contraire qu'il existe f récursive telle que

$$\forall\, B_i[B_i \text{ fini} \rightarrow \exists\, j[\,|j|_A \leqslant f(\,|i|_B) \wedge A_j = B_i]]$$

Utilisant les notations de la preuve du théorème 3 :

si B_x est fini alors $B_{\tau(\delta,x)}$ est fini

si B_x est infini alors $B_{\tau(\delta,x)} \notin \mathcal{A}$

Nous aurions alors : B_x fini ssi $B_{\tau(\delta,x)}$ fini

$$\text{ssi} \quad \exists\, j[\,|j|_A \leqslant f(\,|\tau(\delta, x)|_B \wedge A_j = B_{\tau(\delta,x)}];$$

par conséquent, la taille de j pouvant être bornée effectivement le problème de finitude FIN $[B]$ serait seulement Π_1 . ⊗