

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

MARYSE DESROCHERS

Dimensions globales des extensions de Ore et des algèbres de Weyl

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 6, p. 1-31

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A6_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIMENSIONS GLOBALES DES EXTENSIONS DE ORE ET DES ALGÈBRES DE WEYL

par Maryse DESROCHERS

1. Introduction.

La première partie de cet exposé concerne les extensions de Ore. Soit R un anneau muni d'une dérivation D , et soit $S = R[t]$, l'extension de Ore associée à D . S est additivement le groupe des polynômes en une indéterminée t avec $tr = rt + D(r)$ pour tout r appartenant à R . L'inégalité $\text{l.gl.dim } S \leq \text{l.gl.dim } R + 1$ a déjà été remarqué par plusieurs auteurs, parmi lesquels K. FIELDS, N. S. GOPALAKRISHNAN et R. SRIDHARAN (cf. [8] et [12]). Nous montrons ici que, dans le cas où R est noethérien à droite et à gauche, de dimension globale à gauche finie, une condition nécessaire et suffisante pour obtenir l'égalité est l'existence d'un S -module M , de type fini sur R , tel que $\text{l. dim}_R M = \text{l.gl.dim } R$. Si, de plus, R est commutatif, nous obtenons une partie du théorème 22 de GOODEARL (cf. [11]).

Dans la deuxième partie sont étudiées les algèbres de Weyl :

$$A_n(R) = R[x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_n],$$

$t_i x_i - x_i t_i = 1$ et $x_i t_j = t_j x_i$ pour i différent de j . Pour R , anneau noethérien à droite et à gauche, on montre que $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + 1$ ou $\text{gl. dim } R + 2$, le second cas se produisant si, et seulement si, il existe un $A_n(R)$ -module à gauche, M , de type fini en tant que R -module, tel que

$$\text{l. dim}_R M = \text{gl. dim } R$$

lorsque $\text{gl. dim } R < \infty$. Si R est un anneau commutatif noethérien contenant les nombres rationnels, on prouve que $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + n$, et si R ne contient pas les nombres rationnels, on introduit m , le maximum des dimensions projectives des R -modules à gauche cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens ; on obtient alors $\text{gl. dim } A_n(R) = \text{gl. dim } R + n$ pour n inférieur ou égal à $\text{gl. dim } R - m$, et $\text{gl. dim } A_n(R) = m + 2n$ pour n supérieur ou égal à $\text{gl. dim } R - m$.

2. Foncteur Tor et intersections.

Dans cette section, nous allons prouver la formule

$$(2.1) \quad \text{Tor}_d^R(N, \cap M_i) = \cap \text{Tor}_d^R(N, M_i)$$

pour R anneau noethérien à droite tel que $\text{w.gl.dim } R = d$, N un R -module à droite, et $\{M_i\}$ une famille de sous-modules d'un R -module à gauche M . On rappelle que

$$\text{w.gl.dim } R = \sup \text{w.r.dim}_R M = \sup \text{w.l.dim}_R N \quad (\text{cf. [15], p. 150})$$

avec M R -module à droite et N R -module à gauche,

où $\text{w.r.dim}_R M$ est la dimension plate de M , c'est-à-dire le plus grand entier positif n tel que $\text{Tor}_n^R(M, N) \neq 0$ pour un certain R -module à gauche N , $\text{w.l.dim}_R N$ étant défini de manière analogue à gauche.

LEMME 2.2. - Soient R un anneau noethérien à droite tel que $\text{w.gl.dim } R = d < \infty$, N un R -module à droite arbitraire, et F le foncteur défini par $F(X) = \text{Tor}_d^R(N, X)$ pour X R -module à gauche quelconque. Alors,

(i) F est exact à gauche (en particulier, si $X' \subset X$ sont deux R -modules à gauche, l'application $F(X') \rightarrow F(X)$ est injective, et nous identifierons $F(X')$ et son image dans $F(X)$;

(ii) Pour toute famille $\{X_i\}$ de R -modules à gauche, l'application $F(\prod X_i) \rightarrow \prod F(X_i)$ induite par les projections est injective.

Démonstration. - Montrons que F est exact à gauche. Soit $0 \rightarrow X' \rightarrow X \rightarrow X'' \rightarrow 0$ une suite exacte de R -modules à gauche. On a alors

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^R(N, X'') \rightarrow \text{Tor}_d^R(N, X') \rightarrow \text{Tor}_d^R(N, X) \rightarrow \text{Tor}_d^R(N, X'') \rightarrow \dots$$

et $\text{Tor}_{d+1}^R(N, X'') = 0$ car $\text{w.gl.dim } R = d$, d'où le résultat. De même, si $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ est une suite exacte de R -modules à droite, $\text{Tor}_{d+1}^R(N'', X) = 0$, et on obtient

$$0 \rightarrow \text{Tor}_d^R(N', X) \rightarrow \text{Tor}_d^R(N, X) \rightarrow \text{Tor}_d^R(N'', X) .$$

Pour démontrer la partie (ii), notons que si Y est un R -module à droite, il y a un homomorphisme canonique $Y \otimes_R \prod X_i \rightarrow \prod (Y \otimes_R X_i)$ provenant des projections (cf. [4], p. 90). Cet homomorphisme est bijectif si Y est de type fini sur R . En effet, soient $y_1, y_2, \dots, y_n$ des générateurs de Y , et soit $\{z_i \otimes x_i\}$ un élément quelconque de $\prod (Y \otimes_R X_i)$. On a $z_i = \sum_{j=1}^n y_j r_{i,j}$, et l'élément $\sum_{j=1}^n (y_j \otimes \{r_{i,j} x_i\})$ de $Y \otimes_R \prod X_i$ s'envoie bien sur $\{z_i \otimes x_i\}$, d'où la surjectivité. Pour montrer l'injectivité, introduisons une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow F \rightarrow Y \rightarrow 0 ,$$

où F est un R -module libre de type fini, et N le noyau de l'homomorphisme $F \rightarrow Y$. Comme R est noethérien à droite, N est aussi de type fini sur R . De plus, F étant libre sur R , $F \otimes_R \prod X_i \rightarrow \prod (F \otimes_R X_i)$ est injectif (cf. [4], p. 92, corollaire 3). Mais le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} N \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & F \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & Y \otimes_R \prod X_i & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \prod (N \otimes_R X_i) & \longrightarrow & \prod (F \otimes_R X_i) & \longrightarrow & \prod (Y \otimes_R X_i) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

(cf. [4], p. 86, proposition 5, et [4], p. 23, proposition 5, pour obtenir les suites exactes horizontales), d'où l'injectivité de

$$Y \otimes_R \prod X_i \longrightarrow \prod (Y \otimes_R X_i) .$$

Notons maintenant que le foncteur H commute avec le produit direct (cf. [6], p. 98, proposition 9.3) et que, si Y est une résolution projective de N , alors $\text{Tor}_n^R(N, M)$ et $H_n(Y \otimes_R M)$ sont isomorphes pour tout $n \geq 0$ et tout R -module à gauche M (cf. [15], p. 127, théorème 4). On a donc

$$\begin{aligned} \text{Tor}_n^R(N, \prod X_i) &= H_n(Y \otimes_R \prod X_i) \longrightarrow H_n(\prod (Y \otimes_R X_i)) = \prod (H_n(Y \otimes_R X_i)) \\ &= \prod \text{Tor}_n^R(N, X_i) , \end{aligned}$$

ce qui nous donne un homomorphisme

$$\varphi_n : \text{Tor}_n^R(N, \prod X_i) \longrightarrow \prod \text{Tor}_n^R(N, X_i) .$$

Mais comme R est noethérien à droite, si N est de type fini sur R , N possède une résolution projective de R -modules de type fini (cf. [6], p. 78, proposition 1.3.). D'où les φ_n sont des isomorphismes si N est de type fini.

Maintenant, pour tout R -module à droite N , et pour tout sous-module N' de N , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} F(\prod X_i) = \text{Tor}_d^R(N, \prod X_i) & \xrightarrow{\varphi_d} & \prod \text{Tor}_d^R(N, X_i) = \prod F(X_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Tor}_d^R(N', \prod X_i) & \xrightarrow{\varphi'_d} & \prod \text{Tor}_d^R(N', X_i) \end{array}$$

où, grâce à (i), les flèches verticales sont les monomorphismes induits par l'injection $N' \rightarrow N$ (cf. [4], p. 23, proposition 5). De plus, $F(\prod X_i)$ est la réunion des sous-groupes $\text{Tor}_d^R(N', \prod X_i)$, où N' parcourt les sous-modules de N de type fini sur R car N est la limite directe de ses sous-modules de type fini, et les foncteurs Tor_n^R commutent avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3.). Donc tout élément de $\text{Ker } \varphi_d$ doit appartenir à $\text{Tor}_d^R(N', \prod X_i)$ pour N' sous-module de type fini. Mais comme alors φ'_d et les deux flèches verticales sont injectives, on a bien $\text{Ker } \varphi_d = 0$, d'où l'injectivité.

LEMME 2.3. - Soit F un foncteur de la catégorie des R -modules à gauche dans la catégorie des groupes abéliens qui satisfassent aux conditions (i) et (ii) du lemme 2.2. Alors, pour tout R -module à gauche M et pour toute famille $\{M_i\}$ de sous-modules de M , on a

$$\cap F(M_i) = F(\cap M_i) .$$

Démonstration. - Notons respectivement p_i et q_i les projections $\prod M/M_i \rightarrow M/M_i$ et $M \rightarrow M/M_i$. Le foncteur F étant exact à gauche, et le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \cap M_i & \longrightarrow & M \xrightarrow{\prod q_i} \prod (M/M_i) \\ & & \parallel & & \downarrow p_j \\ & & M & \xrightarrow{q_i} & M/M_j \end{array}$$

étant commutatif avec la suite exacte à la première ligne, on obtient un second diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & F(\cap M_i) & \longrightarrow & F(M) & \xrightarrow{F(\prod q_i)} & F(\prod (M/M_i)) \\
& & & & \parallel & & \downarrow \prod F(p_i) \\
0 & \longrightarrow & \cap F(M_i) & \longrightarrow & F(M) & \xrightarrow{\prod F(q_i)} & \prod F(M/M_i)
\end{array}$$

où chacune des lignes est une suite exacte. En effet, $q_j = p_j \circ \prod q_i$, d'où $F(q_j) = F(p_j) \circ F(\prod q_i)$, d'où

$$\prod F(q_i) = \prod (F(p_i)) \circ F(\prod q_i),$$

et $0 \longrightarrow M_i \longrightarrow M \xrightarrow{q_i} M/M_i$, d'où

$$0 \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M) \xrightarrow{F(q_i)} F(M/M_i),$$

donc $\text{Ker}(F(q_i)) = F(M_i)$, ce qui donne

$$\text{Ker}(\prod F(q_i)) = \cap F(M_i).$$

Mais alors $\prod F(p_i) \circ F(\prod q_i) = \prod F(q_i)$, et $\prod F(p_i)$ est injective grâce à la condition (ii), donc

$$\text{Ker}(\prod F(q_i)) = \text{Ker}(F(\prod q_i)),$$

ce qui donne bien $F(\cap M_i) = \cap F(M_i)$.

Il est clair que les lemmes 2.2 et 2.3 prouvent (2.1).

3. Extensions de Ore - Première partie

Soit R un anneau muni d'une dérivation D , et soit $S = R[t]$ l'extension de Ore correspondante. Si $\text{w.gl.dim } R = d < \infty$, nous allons tirer certaines conclusions de l'égalité $\text{w.gl.dim } S = d + 1$.

Introduisons d'abord, pour tout S -module à gauche M , le complexe suivant de S -modules à gauche :

$$(3.1) \quad 0 \longrightarrow S \otimes_R M \xrightarrow{a_e(M)} S \otimes_R M \xrightarrow{b_e(M)} M \longrightarrow 0,$$

où la structure de S -module à gauche de $S \otimes_R M$ est définie par

$$s(s' \otimes m) = ss' \otimes m,$$

s et s' appartenant à S , m appartenant à M , et où $a_e(M)$ et $b_e(M)$ sont définies par

$$a_e(s \otimes m) = st \otimes m - s \otimes tm,$$

$$b_e(s \otimes m) = sm.$$

Nous allons montrer qu'il s'agit en fait d'une suite exacte de S -modules à gauche. En effet, la surjectivité de $b_e(M)$ est évidente ; soit maintenant u un élément quelconque de $\text{Ker}(a_e(M))$. Notons que tout élément de $S \otimes_R M$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{i=0}^n t^i \otimes m_i$ avec m_i appartenant à M pour $0 \leq i \leq n$ car S est libre sur R de base $1, t, t^2, \dots$. On a donc $u = \sum_{i=0}^n t^i \otimes m_i$,

$$(a_e(M))(u) = \sum_{i=0}^{n+1} t^i \otimes m'_i,$$

avec $m'_0 = -tm_0$, $m'_i = m_{i-1} - tm_i$ pour $1 \leq i \leq n$, $m'_{n+1} = m_n$; or
 $(a_e(M))(u) = 0$, donc $m'_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n+1$, donc $m_i = 0$ pour $0 \leq i \leq n$.
 On a bien $\text{Ker}(a_0(M)) = 0$; d'où l'injectivité de $a_e(M)$. De même, soit u appartenant à $\text{Ker}(b_e(M))$: $u = \sum_{i=0}^n t^i \otimes m_i$ avec $m_0 + tm_1 + \dots + t^n m_n = 0$. Il s'agit de trouver un élément $v = \sum_{i=0}^{n-1} t^i \otimes m'_i$ tel que $a_e(M)(v) = u$, c'est-à-dire tel que

$$\begin{aligned} -tm'_0 &= m_0 \\ m'_{i-1} - tm'_i &= m_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1 \\ m'_{n-1} &= m_n. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} m'_{n-1} &= m_n \\ m'_{n-2} &= m_{n-1} + tm_n \\ m'_{n-3} &= m_{n-2} + tm_{n-1} + t^2 m_n \\ &\vdots \\ m'_1 &= m_2 + tm_3 + \dots + t^{n-2} m_n \\ m'_0 &= m_1 + tm_2 + \dots + t^{n-1} m_n \end{aligned}$$

et alors

$$-tm'_0 = -tm_1 - t^2 m_2 - \dots - t^n m_n = m_0$$

d'où l'exactitude de (3.1).

Soient N un S -module à droite, et Z une S -résolution projective de N définie par la suite exacte

$$\dots \rightarrow Z_i \xrightarrow{h_i} Z_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow Z_1 \xrightarrow{h_1} Z_0 \xrightarrow{h_0} N \rightarrow 0,$$

où les Z_i sont des S -modules à droite projectifs et les h_i des S -homomorphismes. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} Z_i \otimes_R M & \xrightarrow{h_i \otimes 1_M} & Z_{i-1} \otimes_R M & & Z_0 \otimes_R M \xrightarrow{h_0 \otimes 1_M} N \otimes_R M \\ \downarrow & & \downarrow & , \quad i \geq 1, \text{ et } & \downarrow & \downarrow \\ Z_i \otimes_R M & \xrightarrow{h_i \otimes 1_M} & Z_{i-1} \otimes_R M & & Z_0 \otimes_R M \xrightarrow{h_0 \otimes 1_M} N \otimes_R M \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par $z \otimes m \mapsto zt \otimes m - z \otimes tm$, sont commutatifs, donc

$$\alpha(z \otimes m) = zt \otimes m - z \otimes tm$$

définit un endomorphisme du complexe $Z \otimes_R M$. De plus, on vérifie facilement que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z \otimes_S S \otimes_R M & \xrightarrow{1 \otimes a_e(M)} & Z \otimes_S S \otimes_R M \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z \otimes_R M & \xrightarrow{\alpha} & Z \otimes_R M \end{array}$$

où les flèches verticales sont définies par $z \otimes s \otimes m \mapsto zs \otimes m$, est également

commutatif. Mais comme S est un R -module libre, une S -résolution projective est aussi une R -résolution projective donc, en passant aux groupes d'homologie, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} \text{Tor}^S(N, S \otimes_R M) & \xrightarrow{\text{Tor}^S(N, a_e(M))} & \text{Tor}^S(N, S \otimes_R M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Tor}^R(N, M) & \xrightarrow{\text{Tor}^R(\alpha)} & \text{Tor}^R(N, M) \end{array}$$

(cf. [15], p. 127, théorème 4), et les flèches verticales sont des isomorphismes car S est plat sur R (cf. [6], p. 117, proposition 4.1.1).

LEMME 3.3. - Soit R un anneau tel que $\text{w.gl.dim } R = d < \infty$. Alors V , le noyau de l'endomorphisme $\text{Tor}_d^R(\alpha)$, est isomorphe à $\text{Tor}_{d+1}^S(N, M)$.

Démonstration. - La longue suite exacte pour le foncteur Tor^S , induite par (3.1), donne

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^S(N, S \otimes_R M) \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^S(N, M) \rightarrow \text{Tor}_d^S(N, S \otimes_R M) \\ \xrightarrow{\text{Tor}_d^S(N, a_e(M))} \text{Tor}_d^S(N, S \otimes_R M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Mais $\text{Tor}^S(N, S \otimes_R M) \simeq \text{Tor}^R(N, M)$, d'où

$$\text{Tor}_{d+1}^S(N, S \otimes_R M) \simeq \text{Tor}_{d+1}^R(N, M) \text{ avec } \text{w.gl.dim. } R = d,$$

ce qui donne $\text{Tor}_{d+1}^S(N, S \otimes_R M) = 0$. On en déduit

$$\text{Tor}_{d+1}^S(N, M) \simeq \text{Ker}(\text{Tor}_d^S(N, a_e(M)))$$

avec, par (3.2),

$$\text{Ker}(\text{Tor}_d^S(N, a_e(M))) \simeq \text{Ker}(\text{Tor}_d^R(\alpha)),$$

d'où le résultat.

Maintenant soit M' un R -sous-module du S -module M . Pour $i = 0, 1, 2, \dots$, on pose

$$K_i = \{x \text{ de } M' ; t^j x \in M', j = 0, 1, 2, \dots, i\}.$$

Il est clair que $K_i \supseteq K_{i+1}$ et une induction triviale sur j montre que

$$(3.4) \quad \begin{aligned} t^j r &= r t^j + j D(r) t^{j-1} + \dots + D^j(r) \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} D^i(r) t^{j-i} \end{aligned}$$

pour tout r appartenant à R . Donc si r est un élément quelconque de R , x un élément quelconque de K_i ,

$$t^j(rx) = \sum_{\ell=0}^j \binom{j}{\ell} D^\ell(r) t^{j-\ell} x ; \text{ pour } j \leq i,$$

$j - \ell$ est inférieur ou égal à i , donc $t^{j-\ell} x$ appartient au R -module M' , donc $t^j(rx)$ aussi. Par conséquent, les K_i sont des R -sous-modules de M' .

Définissons $\pi_i : K_i \rightarrow M/M'$ par $\pi_i(x) = t^{i+1} x + M'$. On a

$$\begin{aligned}
\pi_i(rx) &= t^{i+1} rx + M' \text{ pour } r \text{ appartenant à } R \\
&= rt^{i+1} x + \sum_{j=1}^{i+1} \binom{i+1}{j} D^j(r) t^{i+1-j} x + M' \text{ par (3.4)} \\
&= rt^{i+1} x + M' = r(t^{i+1} x + M') = r\pi_i(x) .
\end{aligned}$$

Les π_i sont donc des R -homomorphismes, d'où la suite exacte de R -modules :

$$(3.5) \quad 0 \longrightarrow K_{i+1} \longrightarrow K_i \xrightarrow{\pi_i} M/M' .$$

LEMME 3.6. - Soit R un anneau tel que $w.gl.dim R = d < \infty$. En identifiant $Tor_d^R(N, K_i)$ à son image dans $Tor_d^R(N, M)$ par le lemme 2.2 (i), on a, pour tout v appartenant à $V \cap Tor_d^R(N, K_i)$

$$Tor_d^R(N, \pi_i)(v) = 0 .$$

Démonstration. - Soit Z une S -résolution projective de N , définie par la suite exacte

$$\dots \longrightarrow Z_{n+1} \xrightarrow{\delta_{n+1}} Z_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{\delta_0} N \longrightarrow 0 .$$

On a

$$Tor_d^R(N, M) \simeq H_d(Z \otimes_R M) = \text{Ker}(\delta_d \otimes 1_M) / \text{Im}(\delta_{d+1} \otimes 1_M) .$$

Soit f un cocycle représentant la classe de cohomologie de v . Toujours par le lemme 2.2 (i), on peut supposer

$$f = \sum z_h \otimes k_h \text{ avec } z_h \in Z_d, k_h \in K_i .$$

Puisque v est dans V , la classe de cohomologie de $\alpha(f)$ est nulle, donc on peut trouver un élément w de $Z_{d+1} \otimes_R M$ tel que

$$\begin{aligned}
\alpha(f) &= \sum z_h t \otimes k_h - \sum z_h \otimes tk_h \\
&= (\delta_{d+1} \otimes 1_M)(w) .
\end{aligned}$$

Une induction triviale sur n montre que

$$\begin{aligned}
\alpha^n(z \otimes k) &= zt^n \otimes k - nzt^{n-1} \otimes tk + \binom{n}{2} zt^{n-2} \otimes t^2 k \dots \pm z \otimes t^n k \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} zt^{n-i} \otimes t^i k .
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\alpha^{i+1}(f) &= \alpha^{i+1}(\sum_h z_h \otimes k_h) = \sum_h \alpha^{i+1}(z_h \otimes k_h) \\
&= \sum_h \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j \binom{i+1}{j} z_h t^{i+1-j} \otimes t^j k_h
\end{aligned}$$

avec $t^j k_h$ dans M' pour $0 \leq j \leq i$, d'où, modulo $Z \otimes M'$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_h z_h \otimes t^{i+1} k_h &\equiv \pm \alpha^{i+1}(f) = \pm \alpha^i(\delta_{d+1} \otimes 1)(w) \\
&= \pm (\delta_{d+1} \otimes 1)(\alpha^i(w))
\end{aligned}$$

car α est un endomorphisme du complexe $Z \otimes_R M$. Mais $Tor_d^R(N, \pi_i)(v)$ est représenté dans $Z \otimes_R M/M'$ par $\sum_h z_h \otimes t^{i+1} k_h + M'$, donc est bien un cobord dans $Z \otimes M/M'$, ce qui prouve le lemme.

Pour tout R -sous-module M' de M , soit $K(M') = K = \bigcap K_i$, le plus grand S -sous-module de M contenu dans M' .

LEMME 3.7. - Si R est noethérien à droite avec $w.gl.dim R = d < \infty$, et si M' est un sous-module de M tel que $w. dim_R K < d$, alors $V \cap \text{Tor}_d^R(N, M') = 0$.

Démonstration. - Par (2.1) on a $\text{Tor}_d^R(N, K) = \bigcap \text{Tor}_d^R(N, K_i)$ avec $w. dim_R K < d$, donc $\bigcap \text{Tor}_d^R(N, K_i) = 0$. Ainsi, en utilisant l'identification du lemme 2.2 (i), la famille des $\text{Tor}_d^R(N, K_i)$ forme une chaîne descendante de sous-groupes de $\text{Tor}_d^R(N, M')$ dont l'intersection est nulle. D'où, si v est un élément non nul de $V \cap \text{Tor}_d^R(N, M')$, il existe un entier i tel que v soit dans $\text{Tor}_d^R(N, K_i)$ et non dans $\text{Tor}_d^R(N, K_{i+1})$. Mais, par (3.5) et le lemme 2.2 (i), la suite

$$0 \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N, K_{i+1}) \longrightarrow \text{Tor}_d^R(N, K_i) \xrightarrow{\text{Tor}_d^R(N, \pi_i)} \text{Tor}_d^R(N, M/M')$$

est exacte (cf. [5], p. 25, proposition 4.3 (a)). Donc $\text{Tor}_d^R(N, \pi_i)(v) \neq 0$, ce qui est en contradiction avec le lemme 3.6 : on a bien

$$V \cap \text{Tor}_d^R(N, M') = 0.$$

THÉOREME 3.8. - Soit R un anneau noethérien à droite et à gauche avec $gl. dim R = w.gl. dim R = d < \infty$, et soit $S = R[t]$ l'extension de Ore de R associée à une dérivation D . Si M est un S -module à gauche tel que $w. dim_S M = d + 1$ alors M contient un S -sous-module M_0 de type fini sur R , et

$$\dim_R M = w. dim_R M_0 = d.$$

Démonstration. - On rappelle que si R est un anneau noethérien à gauche et à droite, alors

$$w.gl. dim R = r.gl. dim R = l.gl. dim R$$

(cf. [15], p. 153, théorème 20), et pour tout R -module à gauche A de type fini sur R , on a

$$w. dim_R A = l. dim_R A$$

(cf. [15], p. 153, théorème 19).

Puisque $w. dim_S M = d + 1$, il existe un S -module à droite N tel que

$$\text{Tor}_{d+1}^S(N, M) \neq 0.$$

Soit M' un R -sous-module de M de type fini sur R . Comme R est noethérien à gauche, $K(M') = K$, R -sous-module de M' , est également de type fini. Si le théorème était faux, on aurait donc $w. dim_R K(M') < d$, et le lemme 3.7 donnerait

$$V \cap \text{Tor}_d^R(N, M') = 0$$

pour tous les R -sous-modules M' de M , de type fini sur R . Or on remarque que M est la limite directe de ses sous-modules de type fini, et comme le foncteur

Tor^R commute avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3), l'identification du lemme 2.2 (i) nous permet d'écrire

$$\text{Tor}_d^R(N, M) = \bigcup \text{Tor}_d^R(N, M'),$$

où M' parcourt tous les R -sous-modules de type fini de M . Par conséquent,

$$\begin{aligned} V &= V \cap \text{Tor}_d^R(N, M) \\ &= V \cap \bigcup_{M'} \text{Tor}_d^R(N, M') \\ &= \bigcup (V \cap \text{Tor}_d^R(N, M')) = 0 \end{aligned}$$

ce qui contredit le lemme 3.3 puisque $\text{Tor}_{d+1}^S(N, M)$ est non nul, d'où le théorème.

4. Le cas commutatif.

Si R est commutatif, nous allons déduire une partie du théorème 22 de [11] à partir du théorème 3.8.

LÈMME 4.1. - Soient R un anneau commutatif noethérien tel que $\text{gl. dim } R = d < \infty$, $\mathcal{M}$ l'ensemble des idéaux maximaux de R , et M un R -module à gauche de type fini tel que $\dim_R M = d$. Alors il existe un élément m_0 de $\mathcal{M}$ tel que $\dim_R R/m_0 = d$, et un élément non nul de M , x , avec $m_0 x = 0$.

Démonstration. - Comme M est de type fini sur R noethérien, on a

$$d = \dim_R M = \sup_{m \in \mathcal{M}} \dim_{R_m} M_m$$

(cf. [15], p. 188, théorème 11). Donc il existe un élément m_0 de $\mathcal{M}$ tel que $d = \dim_{R_{m_0}} M_{m_0}$. Et, toujours parce que R est commutatif noethérien, on a aussi

$$d = \text{gl. dim } R = \sup_{m \in \mathcal{M}} \text{gl. dim } R_m \text{ et } \text{gl. dim } R_m = \dim_R R/m$$

(cf. [15], p. 195, théorème 19). Donc $\text{gl. dim } R_{m_0} \leq d$ avec $\dim_{R_{m_0}} M_{m_0} = d$ ce qui

donne $\dim_R R/m_0 = \text{gl. dim } R_{m_0} = \dim_{R_{m_0}} M_{m_0} = d$. Si on remarque encore que R_{m_0} est local d'idéal maximal $R_{m_0} m_0$ (cf. [15], p. 187, proposition 2), on sait alors qu'il existe un élément non nul x/s de M_{m_0} dont l'annulateur soit $R_{m_0} m_0$ (cf. [1], p. 396, proposition 2.2, et p. 392, lemme 1.1 (b)). L'anneau R étant noethérien, m_0 a un nombre fini de générateurs : $h_1, \dots, h_n$. Il existe donc des éléments $s_1, \dots, s_n$ de $R - m_0$ tels que $s_i h_i x = 0$. Maintenant $R - m_0$ est un ensemble multiplicatif fermé, car m_0 est maximal donc premier, d'où $s_1 \dots s_n \in R - m_0$ et, en particulier, est non nul. Il est évident que $m_0(s_1 \dots s_n x) = 0$, et l'élément $s_1 \dots s_n x$ est non nul dans M sinon x/s serait nul dans M_{m_0} , d'où le lemme.

Notons que si R est noethérien à droite (à gauche), S , extension de Ore est associée à une dérivation D de R , l'est aussi (cf. [7], p. 352, proposition 7.27)

THÉOREME 4.2. - Soit R un anneau commutatif noethérien avec $\text{gl. dim } R = d < \infty$, et soit $S = R[t]$, l'extension de Ore de R associée à une dérivation D . Si on a

gl. $\dim S = d + 1$, alors il existe un idéal maximal m_0 de R tel que

$$\dim_R R/m_0 = d ,$$

et soit $D(m_0) \subset m_0$, soit il existe un premier rationnel dans m_0 .

Démonstration. - Par le théorème 3.8, nous savons qu'il existe un S -module à gauche M , de type fini en tant que R -module, avec $w. \dim_R M = \dim_R M = d$. Soit m_0 l'idéal maximal de R satisfaisant aux conditions du lemme 4.1, et x un élément non nul de M avec $\text{Ann}_R(x) = m_0$. Introduisons également

$$M' = \{y \in M ; \text{Ann}_R(y) \supset m_0^{n(y)}\} .$$

On a M' R -sous-module de M car, si y, y' sont deux éléments de M' ,

$$m_0^{\max\{n(y), n(y')\}}(y + y') = 0$$

donc $m_0^{\max\{n(y), n(y')\}} \subset \text{Ann}_R(y + y')$ et $y + y' \in M'$. De même, si r appartient à R ,

$$m_0^{r(y)} \subset \text{Ann}_R(y) \subset \text{Ann}_R(ry) ,$$

d'où $ry \in M'$. De plus, x appartient à M' avec $r(x) = 1$ donc M' est non nul. Mieux encore, pour $y \in M$, si $r_1 y = r_2 y = 0$, alors

$$(r_1 r_2)t = r_1(r_2 t) = r_1(tr_2 - D(r_2))$$

et

$$(r_1 r_2)ty = (r_1 t)r_2 y - r_1 D(r_2)y = 0 ,$$

d'où $\text{Ann}_R(ty) \supset (\text{Ann}_R(y))^2$ d'où M' est également un S -module.

Le module M' est un R -sous-module de M avec R noethérien et M de type fini, donc M' est aussi de type fini sur R . Soient $m_1, \dots, m_s$ des générateurs de M' , $n = \max \{n(m_1), \dots, n(m_s)\}$, et $r_1, \dots, r_s$ des éléments quelconques de R . Alors

$$m_0^{(n)} \subset \bigcap_{i=1}^s \text{Ann}_R(m_i) \subset \bigcap_{i=1}^s \text{Ann}_R(r_i m_i) \subset \text{Ann}_R(\sum_{i=1}^s r_i m_i) .$$

donc il existe un entier n tel que $m_0^{(n)} \subset \text{Ann}_R(M')$ avec m_0 maximal. Ainsi l'idéal $\text{Ann}_R(M')$ est primaire, de radical m_0 (cf. [17], p. 153, corollaire 1). Comme M' est un S -module, si r est dans $\text{Ann}_R(M')$

$$(tr - rt)(m') = (D(r))m' = trm' - rtm' = 0 \text{ pour tout } m' \text{ de } M' ,$$

donc

$$D(\text{Ann}_R(M')) \subset \text{Ann}_R(M') .$$

L'idéal m_0 étant le radical de $\text{Ann}_R(M')$, pour tout r de m_0 , il existe un nombre entier ℓ tel que r^ℓ est dans $\text{Ann}_R(M')$, et $r^{\ell-1}$ n'est pas dans $\text{Ann}_R(M')$. Alors $D(r^\ell) = [\ell D(r)]r^{\ell-1}$ est dans $\text{Ann}_R(M')$, et comme $\text{Ann}_R(M')$ est primaire, on obtient que $\ell D(r)$ est dans l'idéal premier m_0 . En particulier, si m_0 ne contient aucun premier rationnel, $D(r)$ appartient à m_0 pour tout r de m_0 , d'où le théorème.

Le théorème 22 de [11] est le suivant : soit R un anneau commutatif noethérien muni d'une dérivation D avec $\text{gl. dim } R = n < \infty$. Soit $\mathcal{M}$ la famille de tous les idéaux maximaux m de R tels que $D(m) \subset m$ ou tels que la caractéristique de R/m soit non nulle, et soit

$$k = \sup \{ \text{rg}(m) , m \in \mathcal{M} \}$$

(si $\mathcal{M}$ est vide, on pose $k = -\infty$). Alors si S est l'extension de Ore de R associée à D ,

$$\text{gl. dim } S = \max \{ n , k + 1 \} .$$

Notons d'abord que, pour tout idéal maximal m de R ,

$$\text{rg}(m) = \text{gl. dim } R_m = \dim_R (R/m) \leq n$$

(cf. [11], p. 71, proposition 9), donc $k \leq n$. Mais alors le théorème 4.2 montre que si $\text{gl. dim } S = n + 1$, alors $k = n$, donc on a bien

$$\text{gl. dim } S = \max \{ n , k + 1 \} .$$

Le théorème 1.1 de [2] est également une conséquence immédiate de ce dernier résultat. En effet, ce théorème dit que si R est un anneau de Dedekind contenant $\mathbb{Q}$, et D une dérivation de R telle que, pour tout idéal maximal m de R , on a $D(m) \not\subset m$, alors $\text{gl. dim } S = 1$, où S est l'extension de Ore de R associée à D .

Ecartons d'abord les cas $\text{gl. dim } R = 0$ ou $\text{gl. dim } S = 0$. En effet, soit A un anneau noethérien tel que $\text{gl. dim } A = 0$, alors A est semi-simple (cf. [6], p. 111 corollaire 2.7) donc A est artinien (cf. [5], p. 21, exemple 1, p. 27, corollaire, et p. 49, théorème 2), et si A est aussi intègre, alors A est un corps. Donc si $\text{gl. dim } R = 0$, R est un corps. On suppose donc $\text{gl. dim } R \geq 1$, mais alors S n'est pas un corps, donc $\text{gl. dim } S \geq 1$. Or R étant anneau de Dedekind, on a $\text{gl. dim } R = 1$ (cf. [6], p. 134, et p. 112, proposition 2.8), d'où $1 \leq \text{gl. dim } S \leq 2$. De plus, si on avait $\text{gl. dim } S = 2 = 1 + \text{gl. dim } R$, par le théorème 4.2, il existerait un idéal maximal m_0 de R tel que $D(m_0) \subset m_0$ ou tel que m_0 contienne un premier rationnel, ce qui est en contradiction avec les hypothèses $D(m_0) \not\subset m_0$ et $\mathbb{Q} \subset R$, d'où $\text{gl. dim } S = 1$.

5. Extensions de Ore - Deuxième partie.

Soit R un anneau muni d'une dérivation D , et soit $S = R[t, D]$, l'extension de Ore de R associée à D . Soit M un S -module à gauche (à droite), on a toujours la suite exacte de S -modules à gauche

$$(5.1) \quad 0 \longrightarrow S \otimes_R M \xrightarrow{a_e(M)} S \otimes_R M \xrightarrow{b_e(M)} M \longrightarrow 0 \quad (\text{cf. (3.1)}) .$$

Les applications correspondantes pour les S -modules à droite seront notées a_r et b_r .

LEMME 5.2. - Soit M un S -module à gauche. On définit une action à droite de S

sur $M^* = \text{Hom}_R(M, R)$ par
 $(ft)(m) = f(tm) - D(f(m))$
 $(fr)(m) = f(m)r$

pour f appartenant à M^* , m appartenant à M . Cette action donne à M^* une structure de S -module à droite. De plus, si $F = F(M)$ est l'endomorphisme du groupe abélien $\text{Hom}_R(M, S)$, défini par $F(g)(m) = tg(m) - g(tm)$, alors le diagramme

$$(5.3) \quad \begin{array}{ccc} M^* \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(M^*)} & M^* \otimes_R S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}_R(M, S) & \xrightarrow{F(M)} & \text{Hom}_R(M, S) \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par

$$f \otimes s \longmapsto \{m \longmapsto f(m)s\}$$

est commutatif.

Démonstration. - En effet, pour obtenir la première partie du lemme, il suffit de vérifier que $f(tr) = f(rt) + fD(r)$. Or, pour m appartenant à M , on a

$$f(tr)(m) = (ft)r(m) = ft(m)r = f(tm)r - D(f(m))r$$

et

$$\begin{aligned} f(rt)(m) &= (fr)t(m) = fr(tm) - D(fr(m)) \\ &= f(tm)r - D(f(m)r) \\ &= f(tm)r - D(f(m))r - f(m)D(r) \\ &= f(tm)r - D(f(m))r - fD(r)(m), \end{aligned}$$

d'où la structure de S -module à droite pour M^* . Et, si $f \otimes s$ est un élément quelconque de $M^* \otimes_R S$, on a

$$f \otimes s \longmapsto \{m \longmapsto f(m)s\} \xrightarrow{F(M)} \{m \longmapsto tf(m)s - f(tm)s\}$$

et

$$\begin{aligned} f \otimes s &\xrightarrow{a_r(M^*)} f \otimes ts - ft \otimes s \\ &\longmapsto \{m \longmapsto f(m)ts - ft(m)s \\ &\quad = tf(m)s - D(f(m))s - f(tm)s + D(f(m))s \\ &\quad = tf(m)s - f(tm)s\} \end{aligned}$$

d'où la commutativité du diagramme (5.3).

PROPOSITION 5.4. - Soient R un anneau noethérien à gauche, et M un S -module à gauche, de type fini sur R . Alors, pour tout $i > 1$,

$$\text{Ext}_S^i(M, S) \simeq \text{Ext}_R^{i-1}(M, R).$$

Démonstration. - Soit $X = \dots \xrightarrow{\delta_2} X_1 \xrightarrow{\delta_1} X_0 \xrightarrow{\delta_0} M \rightarrow 0$ une S -résolution projective de M ; on considère les deux complexes $X^* \otimes_R S$ et $\text{Hom}_R(X, S)$. Les différentielles de X étant des homomorphismes de S -modules à gauche, $a_r(X^*)$ et $F(X)$ sont des applications de complexes. La commutativité de (5.3) induit alors un diagramme commutatif de complexes auquel on applique le foncteur homologique H

pour obtenir le diagramme commutatif de groupes d'homologie :

$$(5.5) \quad \begin{array}{ccc} H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{H(a_r(X^*))} & H(X^* \otimes_R S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H(\text{Hom}_R(X, S)) & \xrightarrow{H(F(X))} & H(\text{Hom}_R(X, S)) \end{array}$$

Or S étant libre sur R , le foncteur $T(A) = A \otimes_R S$ de R -modules à droite est exact et covariant, d'où l'isomorphisme

$$H(X^* \otimes_R S) \simeq H(X^*) \otimes_R S \quad (\text{cf. [15], p. 93, théorème 1}).$$

De plus, X est aussi une résolution projective de M en tant que R -module à gauche, donc

$$H(X^*) \simeq \text{Ext}_R(M, R) \quad (\text{cf. [15], p. 133, théorème 9}).$$

Mieux encore, les différentielles $\delta_i^* : f \rightarrow f \circ \delta_i$ de X^* sont des homomorphismes de S -modules à droite pour la structure de S -module à droite de X^* donnée par le lemme 5.2. En effet,

$$\begin{aligned} \delta_i^*(ft) &= ft \circ \delta_i = (f\delta_i)t = \delta_i^*(f)t, \\ \delta_i^*(fr) &= fr \circ \delta_i = (f\delta_i)r = \delta_i^*(f)r. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{Ext}_R(M, R)$ possède également une structure de δ -module à droite, et on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S \\ H(a_r(X^*)) \downarrow & & \downarrow a_r(\text{Ext}_R(M, R)) \\ H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{\sim} & \text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S \end{array}$$

Le R -module S étant plat, on obtient

$$H(\text{Hom}_R(X, S)) \simeq H(\text{Hom}_S(S \otimes_R X, S)) \simeq \text{Ext}_S(S \otimes_R M, S)$$

car X étant une R -résolution projective de M , $S \otimes_R X$ est une S -résolution projective de $S \otimes_R M$ (cf. [6], p. 118, proposition 4.1.3, et [15], p. 133, théorème 9). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H(\text{Hom}_R(X, S)) & \longrightarrow & H(\text{Hom}_S(S \otimes_R X, S)) \\ H(F(X)) \downarrow & & \downarrow H(\text{Hom}(a_e(X), S)) \\ H(\text{Hom}_R(X, S)) & \longrightarrow & H(\text{Hom}_S(S \otimes_R X, S)) \end{array}$$

est commutatif car, si A est un S -module à gauche quelconque, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(A, S) & \longrightarrow & \text{Hom}_S(S \otimes_R A, S) \\ F(A) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(a_e(A), S) \\ \text{Hom}_R(A, S) & \longrightarrow & \text{Hom}_S(S \otimes_R A, S) \end{array}$$

est bien commutatif.

$$\begin{aligned}
\varphi \in \text{Hom}_R(A, S) &\longmapsto \{\psi : s \otimes a \longmapsto s\varphi(a)\} \\
&\xrightarrow{\text{Hom}(a_e(A), S)} \{\psi \circ a_e(A) : s \otimes a \xrightarrow{a_e(A)} st \otimes a - s \otimes ta \\
&\quad \xrightarrow{\psi} st\varphi(a) - s\varphi(ta)\}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varphi \in \text{Hom}_R(A, S) &\xrightarrow{F(A)} t\varphi(a) - \varphi(ta) \\
&\longmapsto \{s \otimes a \longmapsto s(t\varphi(a) - \varphi(ta))\}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, l'isomorphisme $H(\text{Hom}_R(X, S) \simeq \text{Ext}_S(S \otimes_R M, S)$ transforme $H(F(X))$ en $\text{Ext}(a_e(M), S)$. On obtient, en groupant les résultats ci-dessus,

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(\text{Ext}_R(M, R))} & \text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S \\
\downarrow \sim & \searrow H(a_r(X^*)) & \downarrow \sim \\
H(X^* \otimes_R S) & \xrightarrow{\quad} & H(X^* \otimes_R S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H(\text{Hom}_R(X, S)) & \xrightarrow{H(F(X))} & H(\text{Hom}_R(X, S)) \\
\downarrow \sim & \searrow \text{Ext}(a_e(M), S) & \downarrow \sim \\
\text{Ext}_S(S \otimes_R M, S) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_S(S \otimes_R M, S)
\end{array}$$

d'où on tire le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S & \xrightarrow{a_r(\text{Ext}_R(M, R))} & \text{Ext}_R(M, R) \otimes_R S \\
\downarrow & \searrow \text{Ext}(a_e, S) & \downarrow \\
\text{Ext}_S(S \otimes_R M, S) & \xrightarrow{\quad} & \text{Ext}_S(S \otimes_R M, S).
\end{array}$$

Mais on remarque que pour déterminer l'application

$$\text{Hom}_R(X, R) \otimes_R S \longrightarrow \text{Hom}_R(X, S),$$

on peut remplacer X par une R -résolution projective Y de M . Or, R étant noethérien à gauche et M de type fini sur R , on peut choisir Y constitué de R -modules libres de type fini (cf. [15], p. 146, proposition 8). Mais si W est un R -module à gauche libre de type fini, l'application

$$\text{Hom}_R(W, R) \otimes_R S \longrightarrow \text{Hom}_R(W, S),$$

donnée par $(f \otimes s)(w) = f(w)s$ est un isomorphisme car c'est certainement vrai pour $W = R$, et si $W = R^{(n)}$, la distributivité de Hom et du produit tensoriel sur les sommes directes finies donnent le résultat. Les flèches verticales de (5.6) sont donc des $\mathbb{Z}$ -isomorphismes.

Considérons maintenant l'analogue à droite de la suite exacte (5.1). Les applications $a_r(\text{Ext}_R(M, R))$ étant injectives, par (5.6), les applications $\text{Ext}(a_1, S)$ également, d'où la longue suite exacte pour Ext , provenant de (5.1), se décompose en une série de suites exactes de la forme :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_S^i(S \otimes_R M, S) \xrightarrow{\text{Ext}(a_e, S)} \text{Ext}_S^i(S \otimes_R M, S) \longrightarrow \text{Ext}_S^{i+1}(M, S) \longrightarrow 0.$$

De même, toujours par (5.1), on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, R) \otimes_R S \xrightarrow{a_r(\text{Ext}_R^i(M, R))} \text{Ext}_R^i(M, R) \otimes_R S \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, R) \longrightarrow 0.$$

On obtient donc

$$\text{CoKer}(\text{Ext}(a_e, S)) \simeq \text{Ext}_S^{i+1}(M, S)$$

et

$$\text{CoKer}(a_r(\text{Ext}_R^i(M, R)) \simeq \text{Ext}_R^i(M, R).$$

Mais les flèches verticales du diagramme commutatif (5.6) étant des isomorphismes, les deux conoyaux sont isomorphes, d'où la proposition.

COROLLAIRE 5.7. - Soit M un S -module à gauche.

(a) On a $w.\dim_R M \leq w.\dim_S M \leq w.\dim_R M + 1$, d'où
 $w.gl.\dim S \leq w.gl.\dim R + 1$.

(b) Si $M \neq 0$ est de type fini sur R noethérien à gauche avec $l.\dim_R M$ finie
alors $l.\dim_S M = l.\dim_R M + 1$.

Démonstration. - La première inégalité résulte du fait que S étant libre, donc plat sur R , toute S -résolution plate de M est aussi une R -résolution plate. La deuxième inégalité est évidente si $w.\dim_R M$ est infinie. On suppose donc $w.\dim_R M = n < \infty$. Soit alors N un S -module à droite quelconque, on a

$$\text{Tor}_m^R(N, M) = 0 \text{ pour } m \geq n + 1 \text{ (cf. [15], p. 149, lemme 3)}.$$

Mais toujours parce que S est plat sur R , on a également

$$\text{Tor}_m^R(N, M) \simeq \text{Tor}_m^S(N, S \otimes_R M) = 0$$

pour tout $m \geq n + 1$ et pour tout S -module à droite N . Or, la longue suite exacte pour le foncteur Tor , provenant de (5.1), donne

$$\dots \longrightarrow \text{Tor}_{n+2}^S(N, S \otimes_R M) \longrightarrow \text{Tor}_{n+2}^S(N, M) \longrightarrow \text{Tor}_{n+1}^S(N, S \otimes_R M) \longrightarrow \dots$$

Par conséquent, $\text{Tor}_{n+2}^S(N, M) = 0$ pour tout S -module à droite N , c'est-à-dire $w.\dim_S M \leq n + 1$.

Pour prouver (b), nous allons d'abord montrer que si $l.\dim_R M = i$, alors $\text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0$. En effet, R étant noethérien à gauche et M de type fini sur R , il existe un R -module à gauche B de type fini tel que $\text{Ext}_R^i(M, B) \neq 0$ (cf. [15], p. 147, proposition 9). On construit alors une suite exacte de R -modules à gauche $0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow B \longrightarrow 0$ avec F libre sur R de base finie. Cette suite induit pour le foncteur Ext la suite

$$\dots \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, F) \longrightarrow \text{Ext}_R^i(M, B) \longrightarrow \text{Ext}_R^{i+1}(M, A) \longrightarrow \dots$$

avec $\text{Ext}_R^{i+1}(M, A) = 0$. On a donc aussi

$$\text{Ext}_R^i(M, F) \neq 0 \text{ et } F \simeq R^{(n)}.$$

Comme le foncteur Ext commute avec la somme directe finie (cf. [6], p. 107, proposition 1.2) on obtient $\text{Ext}_R^i(M, R) \neq 0$. Mais alors la proposition 5.4 nous donne $\text{Ext}_S^{i+1}(M, S) \neq 0$, donc $\text{l. dim}_S M \geq i + 1$ et, par (a),

$$\text{w. dim}_S M = \text{l. dim}_S M \leq i + 1,$$

d'où le corollaire.

Remarques. - La première partie de ce corollaire a aussi été prouvée par FIELDS (cf. [8]) en utilisant les mêmes méthodes. La deuxième partie a été démontrée, de manière tout à fait différente, dans le cas R semi-premier et noethérien à droite, par GOODEARL (cf. [11]), p. 68, théorème 7). De nombreux résultats peuvent être déduits immédiatement de cette deuxième partie. Par exemple, la proposition 1 et le théorème 2 de [12], le lemme 6, le théorème 8 et le corollaire 9 de [10]. En effet, la proposition 1 de [12] dit que si R est un anneau local, commutatif, noethérien, d'idéal maximal m , et D une dérivation telle que $D(R) \subset m$, alors l'extension de Ore, associée à R et D , S , est telle que $\text{l.gl.dim } S = \text{l.gl.dim } R + 1$ quand $\text{l.gl.dim } R < \infty$. Mais considérons le R -module à gauche R/m . Puisque $D(R) \subset m$, on peut munir R/m d'une structure de S -module à gauche en posant $t(r + m) = 0$. L'anneau R étant local, $\text{l.gl.dim } R = \text{l. dim}_R R/m$ (cf. [15], p. 194, théorème 16). Enfin, R/m est un R -module cyclique engendré par la classe de 1, donc de type fini sur R . On applique le corollaire 5.7 (b) à R/m pour obtenir $\text{l.gl.dim } S \geq \text{l. dim}_S R/m = \text{l.gl.dim } R + 1$, d'où la proposition.

De même, pour le théorème 2, si R est un anneau commutatif noethérien, D une dérivation de R telle que soit $D(R) \subset \text{radical de } R$, soit $D(R)$ engendre un idéal propre de R , et $\text{Krull dim } R_m$ est la même pour tous les idéaux maximaux m de R , alors $\text{l.gl.dim } R < \infty$ donne

$$\text{l.gl.dim } S = 1 + \text{l.gl.dim } R.$$

En effet, on a $\text{l.gl.dim } R = \sup_m \text{l.gl.dim } R_m$, où m parcourt les idéaux maximaux de R , et $\text{gl. dim } R_m = \text{dim}_R R/m$ (cf. [15], p. 195, théorème 19). Si nous nous trouvons dans la première hypothèse, il existe un idéal maximal m_0 tel que $\text{dim}_R R/m_0 = \text{gl. dim } R$ et on a $D(R) \subset m_0$, donc les mêmes arguments que précédemment nous donnent le résultat. Dans la deuxième, il existe m_0 maximal tel que $D(R) \subset m_0$ et on a

$$\text{l.gl.dim } R = \sup_m \text{gl. dim } R_m$$

avec $\text{gl. dim } R_m = \text{Krull dim } R_m$ (cf. [11], p. 71, proposition 9), donc en particulier

$$\text{gl. dim } R_{m_0} = \text{dim}_R R/m_0 = \text{gl. dim } R,$$

d'où le résultat.

Le lemme 6, le théorème 8 et le corollaire 9 de [10] expriment respectivement que, si R est un anneau différentiel commutatif noethérien de dimension globale n finie avec R local d'idéal maximal M différentiel, $\text{r.gl.dim } S = n + 1$; si R est un anneau différentiel commutatif noethérien avec $\text{gl. dim } R = n < \infty$, et si R pos-

soit un idéal différentiel premier P tel que $\dim_R(R/P) = n$, alors

$$\text{r.gl.dim } S = n + 1.$$

Enfin, si R est un anneau différentiel commutatif noethérien avec $\text{gl.dim } R = n < \infty$ et R de caractéristique p premier, si encore R a un idéal premier Q tel que $\delta^p(Q) \subseteq Q$ et $\dim_R(R/Q) = n$, alors $\text{r.gl.dim } S = n + 1$. En effet, pour démontrer les deux premiers résultats, notons que R/M (ou R/P) peut encore être muni d'une structure de S -module en posant

$$f \in \text{Hom}_Z(R/M, R/M) \quad f(r + M) = D(r) + M;$$

alors

$$f(r(r' + M)) - rf(r' + M) = D(r).(r' + M)$$

et on utilise la remarque (2.3) de [12] (p. 67). Le troisième résultat découle facilement du théorème 8 (cf. [10], p. 320).

On peut aussi démontrer entièrement le théorème 22 de [11] déjà étudié dans la section 4 : on a déjà montré que si $\text{gl. dim } S = n + 1$, on a bien

$$\text{gl. dim } S = \max \{k, n + 1\}.$$

Et si $\text{gl. dim } S < n + 1$, alors $\text{gl. dim } S \geq \text{gl. dim } R = n$ (cf. [10], p. 316, proposition 3), donc $\text{gl. dim } S = n$. On veut donc montrer $k < n$. Or si $k = n$, il doit exister un idéal maximal de R , m , tel que $\dim_R(R/m) = n$ avec $D(m) \subset m$ ou $A|m$ de caractéristique non nulle. La deuxième hypothèse est écartée par la proposition 10 de [11] (p. 72), et la première par le corollaire 5.7 (b) puisqu'alors R/m est aussi un S -module de type fini sur R , donc $\dim_S(R/m) = n + 1$, ce qui contredit $\text{gl. dim } S = n$.

COROLLAIRE 5.8. - Soient R un anneau noethérien à droite et à gauche avec $\text{gl. dim } R = d < \infty$, D une dérivation de R , et $S = R[t]$ l'extension de Ore de R associée à D . Alors $\text{gl. dim } S = d$ ou $d + 1$, et $\text{gl. dim } S = d + 1$ si, et seulement si, il existe un S -module à gauche M de type fini sur R tel que $1. \dim_R M = d$.

Démonstration. - Par le corollaire 5.7 (a), $\text{gl. dim } S \leq d + 1$, et par la proposition 3 de [10] (p. 316), $\text{gl. dim } S \geq d$. D'où on a bien $\text{gl. dim } S = d$ ou $d + 1$. De plus, si $\text{gl. dim } S = d + 1$, alors il existe un S -module à gauche M tel que $1. \dim_S M = d + 1$. Mais, par le théorème 3.8, on peut trouver M_0 un S -sous-module de M qui soit de type fini sur R avec $1. \dim_R M_0 = d$, d'où le résultat. Réciproquement, si M existe avec M S -module à gauche de type fini sur R , et $1. \dim_R M = d$, alors le corollaire 5.7 (b) donne $1. \dim_S M = d + 1$, donc $\text{gl. dim } S = d + 1$, d'où le corollaire 5.8.

6. Algèbres de Weyl.

Soit R un anneau quelconque, et $A_n(R)$ l'algèbre de Weyl en n variables asso-

ciée à R , c'est-à-dire $A_n(R) = R[X_1, \dots, X_n, t_1, \dots, t_n]$, où les X 's et les t 's sont des indéterminées sur R commutant avec les éléments de R , et où $t_i X_i - X_i t_i = 1$, $t_i X_j = X_j t_i$ pour $i \neq j$. Notons alors que si R est noethérien à gauche (ou à droite), $A_n(R)$ l'est aussi.

LEMME 6.1. - On a $w.gl.dim R + n \leq w.gl.dim A_n(R) \leq w.gl.dim R + 2n$.

Démonstration. - Puisque $A_n(R) = A_1(A_{n-1}(R))$, il suffit de montrer le lemme pour $n = 1$. Mais, par induction sur i , on a $tX^i = X^i t + iX^{i-1}$, donc

$$A_1(R) = R[X][t, d/dX].$$

De plus, $w.gl.dim R[X] = w.gl.dim R + 1$ (cf. [13], p. 45, théorème 5.5). Alors le corollaire 5.7 (a) nous donne

$$w.gl.dim A_1(R) \leq w.gl.dim R[X] + 1 = w.gl.dim R + 2,$$

d'où la seconde inégalité du lemme.

L'anneau R étant facteur direct de $A_1(R)$ en tant que R -bimodule, on a

$$w.gl.dim R \leq w.gl.dim A_1(R).$$

En effet, soit A un R -module à gauche quelconque, alors $B = A_1(R) \otimes_R A$ est un $A_1(R)$ -module à gauche, et si $A_1(R) = R \oplus T$, alors $B \simeq A \oplus T \otimes_R A$ en tant que R -module. Le foncteur Tor commute avec la somme directe (cf. [6], p. 107, proposition 1.2a), donc $w. \dim_R B = \max(w. \dim_R A, w. \dim_R T \otimes_R A)$, ce qui entraîne $w. \dim_R A \leq w. \dim_R B$. De plus, par le corollaire 5.7 (a),

$$w. \dim_R B \leq w. \dim_{R[X]} B \leq w. \dim_{A_1(R)} B.$$

On obtient $w. \dim_R A \leq w. \dim_{A_1(R)} B$ pour tout R -module à gauche A , donc $w.gl.dim R \leq w.gl.dim A_1(R)$. En particulier, si $w.gl.dim R$ est infinie, le lemme 2.1 est prouvé.

Supposons maintenant que $w.gl.dim R = d < \infty$. Alors $w.gl.dim R[X] = d + 1$. Soit M un $R[X]$ -module à gauche tel que $w. \dim_{R[X]} M = d + 1$. On a une suite exacte de $R[X]$ -modules

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow A_1(R) \otimes_{R[X]} M \longrightarrow \bar{M} \longrightarrow 0$$

($\bar{M} = A_1(R) \otimes_{R[X]} M / \{1\} \otimes_{R[X]} M$), qui donne, pour tout $R[X]$ -module à droite N ,

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow \text{Tor}_{d+2}^{R[X]}(N, \bar{M}) &\longrightarrow \text{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N, M) \\ &\longrightarrow \text{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N, A_1(R) \otimes_{R[X]} M) \longrightarrow \text{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N, \bar{M}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

On a $\text{Tor}_{d+2}^{R[X]}(N, \bar{M}) = 0$. Comme il existe N tel que $\text{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N, M) \neq 0$, il existe N tel que $\text{Tor}_{d+1}^{R[X]}(N, A_1(R) \otimes_{R[X]} M) \neq 0$, donc

$$w. \dim A_1(R) \otimes_{R[X]} M = d + 1;$$

et par le corollaire 5.7 (a), on a

$$w.gl.dim A_1(R) \geq w. \dim_{A_1(R)} A_1(R) \otimes_{R[X]} M \geq w. \dim_{R[X]} A_1(R) \otimes_{R[X]} M = d + 1,$$

d'où le lemme.

Notons que dans le cas $w.gl.dim R < \infty$, ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3 de [10] (p. 316) puisqu'elle nous donne

$$w.gl.dim R[X] \leq w.gl.dim A_1(R) \leq 1 + w.gl.dim R[X]$$

et que l'on a

$$w.gl.dim R[X] = 1 + w.gl.dim R.$$

THÉOREME 6.2. - Soit R un anneau noethérien à droite et à gauche, de dimension globale finie d . Alors $gl. dim A_1(R) = d + 2$ si, et seulement si, il existe un $A_1(R)$ -module à gauche M qui soit de type fini sur R avec $l. dim_R M = d$.

Démonstration. - Le lemme 6.1 nous donne déjà $gl. dim A_1(R) \leq d + 2$. Si un tel M existe, alors $A_1(R) = R[X, 0][t, d/dX]$, et en appliquant le corollaire 5.7 (b) deux fois, on obtient

$$l. dim_{R[X]} M = l. dim_R M + 1 < \infty$$

d'où

$$l. dim_{A_1(R)} M = l. dim_{R[X]} M + 1 = l. dim_R M + 2 = d + 2.$$

Pour prouver que la condition est également nécessaire, supposons que $gl. dim A_1(R) = d + 2$. L'anneau R est noethérien à gauche, donc $A_1(R)$ aussi, il existe donc un $A_1(R)$ -module à gauche de type fini, M , tel que

$$l. dim_{A_1(R)} M = d + 2$$

(cf. [15], p. 147, proposition 10). Soit F la famille des $A_1(R)$ -sous-modules M' de M tels que $l. dim_{A_1(R)} M/M' = d + 2$. Puisque F contient 0 , donc n'est pas vide, et que M est noethérien, car de type fini sur $A_1(R)$ noethérien, F contient un élément maximal M'_0 . On en déduit que si $M' \supset M'_0$, alors

$l. dim_{A_1(R)} (M/M') < d + 2$. La longue suite exacte pour le foncteur Ext provenant de

$$0 \longrightarrow M'/M'_0 \longrightarrow M/M'_0 \longrightarrow M/M' \longrightarrow 0$$

donne, pour tout $A_1(R)$ -module à gauche N ,

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M/M', N) &\longrightarrow Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M/M'_0, N) \\ &\longrightarrow Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M'/M'_0, N) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Or $Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M/M', N) = 0$, et il existe N tel que $Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M/M'_0, N) \neq 0$, ce qui donne

$$Ext_{A_1(R)}^{d+2}(M'/M'_0, N) \neq 0.$$

On avait déjà $l. dim_{A_1(R)} M'/M'_0 \leq d + 2$, donc $l. dim_{A_1(R)} M'/M'_0 = d + 2$. Quitte à remplacer M par M/M'_0 , on peut donc supposer que tout $A_1(R)$ -sous-module à gauche de M , non nul, a $d + 2$ comme dimension projective, car tout $A_1(R)$ -sous-module

non nul de M/M'_0 est de la forme M'/M'_0 avec $M' \supset M'_0$.

On peut appliquer le théorème 3.8 à M , car $\text{gl. dim } R[X] = d + 1$: M contient un $A_1(R)$ -sous-module M_0 de type fini sur $R[X]$ avec $1. \dim_{R[X]} M_0 = d + 1$, donc $1. \dim_{A_1(R)} M_0 = d + 2$ par le corollaire 5.7 (b). Quitte à remplacer M par M_0 , on peut donc supposer encore que M est de type fini sur $R[X]$ et que $1. \dim_{R[X]} M = d + 1$, car tout $A_1(R)$ -sous-module de M_0 est aussi un $A_1(R)$ -sous-module de M , donc de dimension projective $d + 2$. En appliquant le théorème 3.8 une nouvelle fois, on sait qu'il existe $\bar{M}$, $R[X]$ -sous-module de M , de type fini sur R , avec $1. \dim_R \bar{M} = d$. Soit maintenant

$$\bar{M} = A_1(R)\bar{M} = \sum_0^\infty t^i \bar{M}.$$

Comme $Xt^i = t^i X - t^{i-1}$, on obtient une chaîne ascendante $\sum_0^k t^i \bar{M}$ de $R[X]$ -sous-modules de $\bar{M}$, car le degré en t reste inférieur ou égal à k quand on multiplie par x . Mais $R[X]$ est noethérien à gauche, M est de type fini sur $R[X]$, donc noethérien, et $\bar{M}$ est un $R[X]$ -sous-module de M , donc il doit exister $k \in \mathbb{N}$, tel que $\bar{M} = \sum_0^k t^i \bar{M}$. Mais alors le $A_1(R)$ -module $\bar{M}$ convient, car chaque $t^i \bar{M}$, $0 \leq i \leq k$, est de type fini sur R puisque $\bar{M}$ l'est, donc $\bar{M}$ est de type fini sur R . De plus, $\bar{M}$ est un $A_1(R)$ -sous-module à gauche non nul de M , donc $1. \dim_{A_1(R)} \bar{M} = d + 2$, et en appliquant le corollaire 5.7 (a) deux fois, on obtient

$$w. \dim_{A_1(R)} \bar{M} \leq w. \dim_{R[X]} \bar{M} + 1 \leq w. \dim_R \bar{M} + 2,$$

donc $1. \dim_R \bar{M} \geq d$ avec $\text{gl. dim } R = d$, ce qui donne $1. \dim_R \bar{M} = d$, d'où le théorème.

En général, si R est un anneau noethérien à droite et à gauche arbitraire, il semble difficile d'appliquer ce théorème pour calculer $\text{gl. dim } A_n(R)$. Cependant il est possible d'obtenir des réponses assez précises quand R est commutatif. Nous commençons par quelques résultats préliminaires : si R est un anneau quelconque, soit $m = m(R)$ le maximum des dimensions faibles des R -modules à gauche cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens.

LEMME 6.3. - Soit R un anneau noethérien à droite et à gauche qui ne contient pas les nombres rationnels

(a) Il y a des R -modules cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens et, pour tout R -module à gauche M qui soit un groupe de torsion abélien, on a
 $w. \dim_R M \leq m(R)$.

(b) $m(A_1(R)) = m(R) + 2$.

Démonstration. - Puisque R ne contient pas les nombres rationnels on peut trouver un entier k dont l'image dans R ne soit pas une unité. Alors $Rk \subset R$ et R/Rk est un R -module cyclique engendré par la classe de 1. On a aussi $k \cdot \bar{r} = 0$ pour tout élément $\bar{r}$ de R/Rk , donc R/Rk est également un groupe de torsion abélien.

Considérons maintenant l'inégalité $m(R) \geq w.\dim_R M$, où M est un R -module à gauche et un groupe de torsion abélien. Si $m(R) = \infty$, il n'y a rien à montrer, nous allons supposer $m(R) = d < \infty$, et démontrer d'abord cette inégalité dans le cas où M est de type fini, cela par induction sur le nombre de générateurs minimum de M . En effet, si ce nombre est 1, M est cyclique, donc c'est vrai par définition. Si ce nombre est strictement supérieur à 1, on introduit une suite exacte $0 \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow 0$ où C est un R -module cyclique, où Q a moins de générateurs que M , et où C et Q sont deux groupes de torsion abéliens. Par exemple, si $M = Re_1 + \dots + Re_n$, on prend $C = Re_1$ et $Q = M/C$, engendré par les classes de $e_2, \dots, e_n$. Par l'hypothèse de récurrence, on a $w.\dim_R Q \leq d$, et si N est un R -module à droite quelconque, on a la suite exacte

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^R(N, C) \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^R(N, M) \rightarrow \text{Tor}_{d+1}^R(N, Q) \rightarrow \dots$$

avec $\text{Tor}_{d+1}^R(N, C) = \text{Tor}_{d+1}^R(N, Q) = 0$, donc $\text{Tor}_{d+1}^R(N, M) = 0$, ce qui donne $w.\dim_R M \leq d$. L'inégalité est donc vérifiée pour M de type fini. Mais étant donné que tout module est la limite directe de ses sous-modules de type fini, que tout sous-module de M est aussi un groupe de torsion abélien si M l'est, et que le foncteur Tor commute avec les limites directes (cf. [6], p. 107, proposition 1.3.), on a le résultat pour tout R -module à gauche M qui est un groupe de torsion abélien.

Pour prouver (b), introduisons M , un $A_1(R)$ -module à gauche qui soit un groupe de torsion abélien. Par le corollaire 5.7 (a), on a

$$w.\dim_{A_1(R)} M \leq w.\dim_{R[X]} M + 1 \leq w.\dim_R M + 2 \leq m(R) + 2$$

par (a), d'où

$$m(A_1(R)) \leq m(R) + 2.$$

Maintenant soit M_0 R -module à gauche cyclique et groupe de torsion abélien, et soit $L = A_1(R)t + A_1(R)X^2$. Alors $A_1(R)/L$ est isomorphe en tant que R -bimodule au R -module libre engendré par les images de 1, X dans $A_1(R)/L$. D'où $M = A_1(R)/L \otimes_R M_0$ est un $A_1(R)$ -module à gauche qui, en tant que R -module, est isomorphe à la somme directe de 2 copies de M_0 . En particulier, M est de type fini sur R , et $l.\dim_R M = l.\dim_R M_0$ puisque le foncteur Ext_R commute avec les sommes directes finies (cf. [6], p. 107, proposition 1.2). De plus, M est aussi un groupe de torsion abélien. Par (a) et le corollaire 5.7 (a),

$$m(A_1(R)) \geq w.\dim_{A_1(R)} M \geq w.\dim_R M$$

donc $m(A_1(R)) \geq w.\dim_R M_0$ pour tout M_0 , R -module à gauche cyclique et groupe de torsion abélien. Donc $m(A_1(R)) \geq m(R)$. En particulier, si $m(R) = \infty$, on a le résultat.

Supposons alors $m(R) = d < \infty$. Puisque $l.\dim_R M \leq d$, on peut appliquer le corollaire 5.7 (b) pour obtenir

$$1. \dim_{A_1(R)} M = 1. \dim_R M + 2 = 1. \dim_R M_0 + 2.$$

On a

$$m(A_1(R)) \geq w. \dim_{A_1(R)} M = w. \dim_R M_0 + 2$$

et par conséquent $m(A_1(R)) \geq m(R) + 2$, d'où le lemme.

LEMME 6.4. - Soit R un anneau commutatif noethérien, et soit $M \neq 0$ un $A_1(R)$ -module à gauche de type fini sur R , alors M est un groupe de torsion abélien.

Démonstration. - Soit I l'annulation de M dans $A_1(R)$. Alors I est un idéal bilatère de $A_1(R)$, et c'est le noyau de l'homomorphisme d'anneaux

$$\varphi : A_1(R) \longrightarrow \text{End}_R(M)$$

donné par la structure de $A_1(R)$ -module à gauche de M . Puisque R est commutatif, et M de type fini sur R , $\text{End}_R(M)$ est aussi un R -module de type fini (cf. [15], p. 148), par conséquent tous ses éléments sont entiers sur R . En particulier, l'image de X dans $\text{End}_R(M)$ est donc un entier sur R ; il existe un polynôme unitaire f à coefficients dans R tel que $f(\varphi.X) = 0$; mais alors $\varphi(f(X)) = 0$, donc $f(X) \in I$. Or $tf.ft = df/dx$ dans $A_1(R)$, d'où $df/dx \in I$. Toutes les dérivées de f sont alors dans I et, en particulier, si f est de degré k , on a $k!$ dans I , donc $k!M = 0$, d'où le lemme.

Remarque. - Le théorème 6.2 et le lemme 6.4 montrent que si R est un anneau noethérien commutatif de dimension globale d , contenant les nombres rationnels, alors $gl. \dim A_1(R) = d + 1$. En effet, nous avons déjà $d + 1 \leq gl. \dim A_1(R) \leq d + 2$ par le lemme 6.1, et par le théorème 6.2, nous savons que si $gl. \dim A_1(R) = d + 2$, alors il existe M , $A_1(R)$ -module à gauche, qui soit de type fini sur R avec $1. \dim_R M = d$, donc $M \neq 0$. Mais alors, par le lemme 6.4, M serait un groupe de torsion abélien : $m \in M$, il existe un entier p tel que $pm = 0$. Or $\mathbb{Q} \subset R$, donc $1/p \in R$, on a alors $(1/p)pm = 0$, d'où $m = 0$, et donc $M = 0$, ce qui est impossible. Notons que ce résultat, dans le cas R local, est exactement le théorème 2.3 de [2].

LEMME 6.5. - Soit R un anneau noethérien commutatif, et X une indéterminée sur R . Notons $R(x)$ l'anneau des fractions de $R[X]$ par rapport à l'ensemble multiplicatif des polynômes unitaires. Alors

$$gl. \dim R(x) = gl. \dim R.$$

Démonstration. - L'ensemble multiplicatif des polynômes unitaires ne contient pas de diviseurs de zéro. De plus, l'algorithme de la division euclidienne peut être utilisé dans $R[X]$ si le diviseur est unitaire. Par conséquent, tout élément de $R(x)$ peut être écrit sous la forme $q + (r/m)$ où q , r et m sont dans $R[X]$, m est unitaire, et $\deg(r) < \deg(m)$ si r est non nul. De plus, q est unique, car si $q + (r/m) = q' + (r'/m')$ on a

$$mm'(q - q') = r'm - rm'.$$

Si $q - q' \neq 0$,

$$\deg mm'(q - q') \geq \deg m + \deg m',$$

car m et m' sont unitaires et

$$\deg(mr' - rm') \leq \max(\deg m + \deg r, \deg m' + \deg r)$$

si $r, r' \neq 0$, donc

$$\deg r < \deg m, \quad \deg r' < \deg m'.$$

On doit donc avoir $r = r' = 0$, ce qui donne $q = q'$ en contradiction avec $q - q' \neq 0$: dans tous les cas, $q + (r/m) = q' + (r'/m')$ donne $q = q'$, $r'm = rm'$.

Maintenant soit T l'ensemble des éléments de $R(x)$ tels que $q(0) = 0$. Il est clair que T est un R -sous-module de $R(x)$, et que $R(x) = R \oplus T$. Le R -module $R(x)$ étant plat (cf. [15], p. 169, théorème 5, et p. 170, théorème 6), le même raisonnement que dans la preuve du lemme 6.1 montre que $w.gl.dim R \leq w.gl.dim R(x)$. Puisque R , et par conséquent $R(x)$, sont des anneaux noethériens (cf. [15], p. 185, proposition 1), on obtient

$$gl. dim R \leq gl. dim R(x) \quad (\text{cf. [15], p. 153, théorème 20}).$$

Alors le lemme est prouvé si $gl. dim R$ est infinie.

Supposons donc $gl. dim R = d < \infty$. Puisque

$$gl. dim R[X] = w.gl.dim R[X] = d + 1, \text{ et } gl. dim R(x) \leq gl. dim R[X]$$

(cf. [15] p. 185, théorème 8), on a

$$gl. dim R(x) \leq d + 1.$$

Si $gl. dim R(x) = d + 1$, soit M un $R(x)$ -module à gauche tel que $w.dim_{R(x)} M = d + 1$. Alors $w.dim_{R(x)} M \leq w.dim_{R[X]} M$ (cf. [15], p. 186, théorème 9), donc

$$w.dim_{R[X]} M = d + 1 = gl. dim R[X].$$

D'où, par le théorème 3.8, M contient un $R[X]$ -sous-module non nul de type fini sur R . De même que dans la preuve du lemme 6.4, cela veut dire que ce sous-module est annulé par un polynôme unitaire en X . Mais cela est impossible puisque M est un $R(x)$ -module, donc on a $gl. dim R(x) \leq d$, d'où le lemme.

THÉOREME 6.6. - Soit R un anneau commutatif noethérien.

(a) Si R contient les nombres rationnels, alors $gl. dim A_n(R) = gl. dim R + n$.

(b) Si R ne contient pas les nombres rationnels, soit $m = m(R)$ le maximum des dimensions projectives des R -modules cycliques qui sont des groupes de torsion abéliens. Alors

$$gl. dim A_n(R) = gl. dim R + n \quad \text{si} \quad n \leq gl. dim R - m(R)$$

et

$$gl. dim A_n(R) = m(R) + 2n \quad \text{si} \quad n \geq gl. dim R - m(R).$$

Démonstration. - Notons d'abord que, grâce au lemme 6.1, il n'y a rien à prouver si $\text{gl. dim } R = \infty$. Nous allons donc supposer $\text{gl. dim } R = d < \infty$. Il est alors suffisant de prouver que

$$(6.7) \quad m = m(R) \leq d - n \text{ entraîne } \text{gl. dim } A_n(R) \leq d + n.$$

En effet, si on suppose cela démontré, dans le cas (a), on a $m(R) = -\infty$, donc $\text{gl. dim } A_n(R) \leq d + n$, ce qui, avec le lemme 6.1, donne

$$\text{gl. dim } A_n(R) = d + n.$$

De même, dans le cas (b), lorsque $n \leq d - m$. Supposons donc $n \geq d - m$. On a toujours

$$\text{gl. dim } A_{d-m}(R) = 2d - m,$$

et des applications répétées du lemme 6.3 (b) montrent que

$$m(A_{d-m}(R)) = m + 2(d - m) = \text{gl. dim } A_{d-m}(R).$$

De plus, si R' est un anneau noethérien à droite et à gauche avec $m(R') = \text{gl. dim } R'$ on a

$$\text{gl. dim } A_k(R') = \text{gl. dim } R' + 2k.$$

En effet, par le lemme 6.1 $\text{gl. dim } A_k(R') \leq \text{gl. dim } R' + 2k$, et par le lemme 6.3(b), $m(A_k(R')) = m(R') + 2k = \text{gl. dim } R' + 2k$; comme

$$m(A_k(R')) \leq w.\text{gl. dim } A_k(R') = \text{gl. dim } A_k(R'),$$

on a l'égalité. Donc si $n = d - m + k$,

$$\begin{aligned} \text{gl. dim } A_n(R) &= \text{gl. dim } A_k(A_{d-m}(R)) \\ &= \text{gl. dim } A_{d-m}(R) + 2k = 2d - m + 2k = m + 2n \end{aligned}$$

d'où le théorème.

Prouvons alors (6.7) par induction sur n . Si $n = 0$, $A_0(R) = R$ et $\text{gl. dim } A_0(R) \leq d + 0$, c'est donc vérifié. Si $n > 0$, introduisons

$$T(x_n) = A_{n-1}(R(x_n))[t_n, d/dx_n],$$

et soit M un $R(x_n)$ -module à gauche qui soit un groupe de torsion abélien. On obtient

$w.\text{dim}_{R(x_n)} M \leq w.\text{dim}_{R[x_n]} M \leq w.\text{dim}_R M + 1 \leq m(R) + 1 \leq d - n + 1 = d - (n - 1)$
par le corollaire 5.7 (a) et le lemme 6.3 (a). D'où

$$m(R(x_n)) \leq d - (n - 1) = \text{gl. dim } R(x_n) - (n - 1)$$

par le lemme 6.5. Par induction, on a donc

$$\text{gl. dim } A_{n-1}(R(x_n)) \leq \text{gl. dim } R(x_n) + (n - 1) = d + (n - 1).$$

Or $T(x_n)$ est l'anneau des polynômes différentiels de $A_{n-1}(R(x_n))$ par rapport à la dérivation d/dx_n . Par conséquent, le corollaire 5.7 (a) donne

$$\begin{aligned} \text{w.gl.dim } T(X_n) = \text{gl. dim } T(X_n) &\leq \text{w.gl.dim } A_{n-1}(R(X_n)) + 1 = \\ &\text{gl. dim } A_{n-1}(R(X_n)) + 1 \leq d + n . \end{aligned}$$

Supposons que $d' = \text{gl. dim } A_n(R) > d + n$. L'anneau $A_n(R)$ est noethérien à gauche, on peut donc trouver N , un $A_n(R)$ -module à gauche de type fini tel que

$$1. \dim_{A_n(R)} N = d' \quad (\text{cf. [15], p. 147, proposition 10}).$$

Comme dans la preuve du théorème 6.2, on peut supposer que tous les $A_n(R)$ -sous-modules de N sont également de dimension projective d' . Mais il est clair que $T(X_n) \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} A_n(R)$ en tant que $A_n(R)$ -module à droite, et similairement à gauche. En effet, soit f appartenant à $T(X_n)$, on a

$$f = \sum_{\text{finie}, i, j} m_{i, j} f_{i, j} t_n^i, \quad f_{i, j} \in A_{n-1}(R), \quad m_{i, j} \in R(X_n),$$

donc il existe $m \in R[X_n]$ tel que $mf \in A_n(R)$. Et si $mf = m'f$ dans $A_n(R)$, par exemple $\deg m > \deg m'$ donc $m/m' \in R[X_n]$, et alors

$$1/m' \otimes m'f = (1/m')(m'/m)(m/m') \otimes m'f = (1/m')(m'/m) \otimes (m/m')m'f = 1/m \otimes mf.$$

L'application $f \mapsto 1/m \otimes mf$ est alors une bijection. De plus, g appartenant à $A_n(R)$,

$$fg = (1/m)(mfg) \mapsto 1/m \otimes mfg = (1/m \otimes mf)g,$$

d'où l'isomorphisme de $A_n(R)$ -modules à droite.

Puisque $R(X_n)$ est plat en tant que $R[X_n]$ -module, on voit que $T(X_n)$ est plat à droite et à gauche en tant que $A_n(R)$ -module. Par conséquent, toute $R(X_n)$ -résolution plate d'un $T(X_n)$ -module à gauche est aussi une $A_n(R)$ -résolution plate, et on obtient

$$\text{w. dim}_{A_n(R)} T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \leq \text{w. dim}_{T(X_n)} T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \leq \text{gl. dim } T(X_n) \leq d + n.$$

Maintenant soit

$$\begin{aligned} \bar{N} = T(X_1) \otimes_{A_n(R)} N \oplus T(X_2) \otimes_{A_n(R)} N \oplus \dots \oplus T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \\ \oplus T(t_1) \otimes_{A_n(R)} N \oplus \dots \oplus T(t_n) \otimes_{A_n(R)} N. \end{aligned}$$

Comme les $T(X_i)$ et les $T(t_j)$ se comportent comme $T(X_n)$, on déduit que

$$\text{w. dim}_{A_n(R)} \bar{N} \leq d + n < d'.$$

Mais

$$T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} A_n(R) \otimes_{A_n(R)} N \simeq R(X_n) \otimes_{R[X_n]} N.$$

Donc le noyau de l'application canonique $N \rightarrow T(X_n) \otimes_{A_n(R)} N$ est constitué des éléments de N annulés par des polynômes unitaires en X_n . En effet, le noyau de $N \rightarrow R(X_n) \otimes_{R[X_n]} N$ est constitué des éléments de N , n , tels que $1/(1+n) = 0$ dans N_S , où S est l'ensemble multiplicatif des polynômes unitaires en X_n , donc tels que $mn = 0$, $m \in S$. C'est pourquoi si z appartient à $\text{Ker}(N \rightarrow \bar{N})$, alors

z doit être annulé par des polynômes unitaires en chacun des $X_1, \dots, X_n, t, \dots, t_n$.
Donc il existe $i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n$, tels que

$$X_k^{i_k+1} z = f_k(X_k) z, \quad f_k \in R[X], \quad \deg f_k \leq i_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

$$t_\ell^{j_\ell+1} z = g_\ell(t_\ell) z, \quad g_\ell \in R[X], \quad \deg g_\ell \leq j_\ell, \quad 1 \leq \ell \leq n,$$

donc l'ensemble des $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} t_1^{\ell_1} \dots t_n^{\ell_n}$ pour $k_\ell \leq i_\ell, 1 \leq \ell \leq n$, et $\ell_k \leq j_k, 1 \leq k \leq n$, forme un ensemble générateur sur R . Par conséquent, il est évident que $\bar{N} = A_n(R)z$ est de type fini sur R , et c'est un groupe de torsion abélien par le lemme 6.4. Si $\bar{N} \neq 0$, alors $\bar{N}$ étant un sous- $A_n(R)$ -module de N , $l.\dim_{A_n(R)} \bar{N} = d' > d + n$. Or des applications répétées du corollaire 5.7 (b) montrent que

$$l.\dim_{A_n(R)} \bar{N} = l.\dim_R \bar{N} + 2n \leq m(R) + 2n$$

par le lemme 6.3 (a). On obtient $m(R) + 2n > d + n$, d'où $m(R) > d - n$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent, $\bar{N} = 0$, et $N \rightarrow \bar{N}$ est une injection, d'où la suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow \bar{N} \rightarrow \bar{N}/N \rightarrow 0,$$

et la longue suite exacte pour le foncteur $\text{Tor}^{A_n(R)}$ avec C , $A_n(R)$ -module à droite quelconque :

$$\dots \rightarrow \text{Tor}_{d'+1}^{A_n(R)}(C, \bar{N}/N) \rightarrow \text{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C, N) \rightarrow \text{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C, \bar{N}) \rightarrow \dots$$

Puisque $w.\dim_{A_n(R)} N = d'$, il existe C tel que $\text{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C, N) \neq 0$, et comme

$w.\dim_{A_n(R)} \bar{N} < d'$, $\text{Tor}_{d'}^{A_n(R)}(C, \bar{N}) = 0$, donc il faut

$$\text{Tor}_{d'+1}^{A_n(R)}(C, \bar{N}/N) \neq 0.$$

Mais alors $w.\dim_{A_n(R)} \bar{N}/N > d'$, ce qui est impossible, car $gl.\dim A_n(R) = d'$. Ainsi (6.7) et le théorème 6.6 sont prouvés.

COROLLAIRE 6.8. - R étant un anneau noethérien commutatif de dimension globale finie d , $gl.\dim A_1(R) = d + 2$ si, et seulement si, R possède un corps quotient F de caractéristique finie avec $l.\dim_R F = d$.

Démonstration. - Le théorème 6.6 montre que $gl.\dim A_1(R) = d + 2$ si, et seulement si, $m(R) = d$. Donc si un tel F existe, c'est un R -module cyclique et un groupe de torsion abélien, d'où on a bien $m(R) = d$.

Réciproquement, si $m(R) = d$, il existe un R -module cyclique, donc un idéal I de R , tel que R/I soit un groupe de torsion abélien avec

$$w.\dim_R R/I = l.\dim_R R/I = d.$$

L'idéal I doit être propre. Supposons que, pour tous les idéaux maximaux de R ,

$m \supset I$, l'on ait $l. \dim_{R_m} R_m/IR_m \leq d - 1$. Alors pour U , R -module à droite quelconque, et pour tout idéal maximal m ,

$$[\mathrm{Tor}_i^R(U, (R/I))]_m \simeq \mathrm{Tor}_i^R(U_m, (R_m/IR_m)) = 0$$

pour $i \geq d$ (cf. [15], p. 171, théorème 7). Mais alors $\mathrm{Tor}_i^R(U, (R/I)) = 0$ pour $i \geq d$ (cf. [15], p. 187, lemme 2) et par conséquent, $w. \dim_R R/I \leq d - 1$, ce qui est impossible. Il existe donc $m \supset I$, maximal, tel que $l. \dim_{R_m} R_m/IR_m = d$. Or

$$gl. \dim R_m = l. \dim_R R/m \leq d \quad (\text{cf. [15], p. 195, théorème 19}).$$

On a donc $l. \dim_R F = d$, où $F = R/m$. De plus, F est de caractéristique finie, car R/I étant un groupe de torsion abélien, il existe un entier k tel que $k(1 + I) = 0$, donc tel que $k \in I$. Mais alors $k \in m$, donc $k(1 + m) = 0$, d'où car $F > 0$.

Remarques. - Dans le cas où R est un corps commutatif de caractéristique 0, le théorème 6.6(a) est démontré par ROOS (cf. [16], p. 23, théorème 1). Il a aussi été prouvé par BHATWADEKAR dans le cas général (cf. [2], p. 224, corollaire 2.6) par des méthodes similaires. Enfin, les deux parties de ce théorème ont été démontrées par GOODEARL utilisant des méthodes différentes (cf. [11], p. 82, théorème 24). En effet, GOODEARL démontre que si R est un anneau commutatif noethérien de dimension globale finie d , et $k = \sup \{rg(m), m \text{ idéal maximal de } R/\text{car}(R/m) > 0\}$ (Si R n'a pas de tels idéaux maximaux, $k = -\infty$), alors pour tout entier positif n ,

$$r.gl.\dim A_n(R) = \max \{d + n, k + 2n\}.$$

Or si $Q \subset R$, $k = -\infty$, et on a $gl. \dim A_n(R) = d + n$. Sinon il suffit de montrer que $k = m(R)$. Or, pour m maximal, $rg(m) = \dim_R(R/m)$ (cf. [11], p. 71, proposition 9 (b)), on a donc certainement $k \leq m(R)$, car chaque R/m est un R -module cyclique et un groupe de torsion abélien, puisque de caractéristique non nulle.

Maintenant, soit I idéal propre de R tel que $\dim_R R/I = m(R)$, R/I groupe de torsion abélien; de la même manière que dans le corollaire 6.8, il doit exister $m \supset I$ tel que $\dim_R R/m \geq m(R)$, d'où $m(R) \leq k$.

Notons que l'anneau $T(X_1) \oplus T(X_2) \oplus \dots \oplus T(X_n) \oplus T(t_1) \oplus \dots \oplus T(t_n)$ n'est pas nécessairement fidèlement plat sur $A_n(R)$, d'où l'impossibilité d'utiliser le lemme 2.b.4 de [3] pour montrer (6.7). En effet, ce lemme affirme que, si $A \subset B$ sont deux anneaux noethériens de dimensions globales finies avec B fidèlement plat à gauche et à droite sur A , alors $gl. \dim A \leq gl. \dim B$. Si donc

$$B = T(X_1) \oplus \dots \oplus T(X_n) \oplus T(t_1) \oplus \dots \oplus T(t_n)$$

était fidèlement plat sur $A_n(R)$, on aurait

$$gl. \dim A_n(R) \leq gl. \dim B \leq \sup_{1 \leq i \leq n} gl. \dim T(t_i), T(X_i) \leq d + n,$$

d'où (6.7). En effet, si ce maximum est d' fini, car inférieur ou égal à $d + n$, soit M un B -module quelconque, pour chaque $T(X_i)(T(t_i))$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow P_{d'}^{X_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0^{X_1} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec des $T(X_1)$ - (ou $T(t_1)$)-modules projectifs, alors on a

$$0 \longrightarrow \bigoplus^{2n} P_{d'}^{X_1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \bigoplus P_0^{X_1} \oplus P_0^{t_1} \longrightarrow \bigoplus^{2n} M \longrightarrow 0 ,$$

donc

$$1. \dim_B \bigoplus^{2n} M = \dim_B M \leq d' .$$

Nous pouvons effectivement produire l'exemple suivant : soit R un corps commutatif de caractéristique 2 et $n = 1$. Alors X_1^2 et t_1^2 sont des éléments centraux de $A_1(R)$ qui engendrent un idéal propre I . En fait, $A_1(R)/I \simeq R_2$, l'anneau des matrices 2×2 sur R . Cependant, puisque X_1^2 est une unité dans $T(X_1)$, et t_1^2 une unité dans $T(t_1)$, il est clair que $I(T(X_1) \oplus T(t_1)) = T(X_1) \oplus T(t_1)$, donc $T(X_1) \oplus T(t_1)$ n'est pas fidèlement plat sur $A_1(R)$.

7. Exemples.

Soit R un anneau de dimension globale à gauche finie. Posons

$$\Delta_n(R) = 1.\text{gl.dim } A_n(R) - 1.\text{gl.dim } A_{n-1}(R) .$$

Alors on a $\Delta_n(R) = 1$ ou 2 . En effet, par le lemme 6.1, on a

$$1.\text{gl.dim } A_n(R) \geq w.\text{gl.dim } A_n(R) \geq w.\text{gl.dim } R + n$$

et

$$1.\text{gl.dim } A_{n-1}(R) \geq w.\text{gl.dim } A_{n-1}(R) \geq w.\text{gl.dim } R + n - 1 ,$$

donc $\Delta_n(R) \geq 1$. De plus,

$$A_n(R) = A_1(A_{n-1}(R)) = A_{n-1}(R)[X_n][t_n, d/dX_n] ,$$

donc

$$1.\text{gl.dim } A_n(R) \leq 1.\text{gl.dim } A_{n-1}(R)[X_n] + 1 = 1.\text{gl.dim } A_{n-1}(R) + 2$$

(cf. [8], p. 528), donc $\Delta_n(R) \leq 2$.

Le théorème 6.6 montre qu'il n'y a que deux cas possibles si R est un anneau commutatif noethérien : si R contient le corps des nombres rationnels, alors $\Delta_n(R) = 1$ pour tout n , et sinon, on a $\Delta_n(R) = 1$ pour $n \leq k$, et $\Delta_n(R) = 2$ pour $n > k$. Un exemple de ce second cas est le suivant. Prenons

$$R = \underline{Q}[w_1, \dots, w_k] \oplus \underline{Z}/2\underline{Z} ,$$

où $w_1, \dots, w_k$ sont des indéterminées sur $\underline{Q}$. Ici,

$$\text{gl. dim } R = \max \{ \text{gl. dim } \underline{Q}[w_1, \dots, w_k] , \text{gl. dim } \underline{Z}/2\underline{Z} \} = \max \{ k + 0 , 0 \} = k ,$$

et $m(R) = 0$, car si I est un idéal propre de R contenant un nombre entier n , alors $n \in I \cap \underline{Q}[X] \subset \underline{Q}[X]$, ce qui entraîne $I \cap \underline{Q}[X] = \underline{Q}[X]$ ($X = w_1, \dots, w_k$), d'où $\underline{Q}[w_1, \dots, w_k] \subseteq I$, d'où

$$I = \underline{Q}[w_1, \dots, w_k] \oplus I \cap (\underline{Z}/2\underline{Z})$$

ce qui donne $I = \mathbb{Q}[w_1, \dots, w_k]$ ou $I = R$ et, dans les deux cas, on a $\dim_R R/I = 0$. Puisque

$$A_n(R) = A_n(\mathbb{Q}[w_1, \dots, w_k]) \oplus A_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

le théorème 6.6 montre que

$$\begin{aligned} \text{gl. dim } A_n(R) &= \max \{ \text{gl. dim } A_n(\mathbb{Q}[w_1, \dots, w_k]), \text{gl. dim } A_n(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \} \\ &= \max \{ k + n, 2n \}. \end{aligned}$$

Donc $\Delta_n(R) = 1$ pour $n \leq k$, et $\Delta_n(R) = 2$ pour $n > k$.

Dans le cas non commutatif, la situation peut être plus complexe, ce qui est illustré dans les exemples suivants.

Exemple 7.1 - Par [9] (p. 513), nous savons que $A_S(\mathbb{Q})$ possède un corps de fractions que nous noterons R . Notons encore u_i et v_i les X_i et les t_i dans R . Si $n \leq s$, le groupe additif de R a une structure de $A_n(R)$ -module à gauche donnée par la R -structure à gauche usuelle et par $X_i r = r v_i$, $t_j r = r u_j$. On a alors R noethérien à gauche et R , $A_n(R)$ -module à gauche de type fini sur R , donc

$$1. \dim_{A_n(R)} R = 1. \dim_R R + 2n = 2n \text{ par le corollaire 5.1 (b).}$$

De plus, par le lemme 6.1,

$$\text{gl. dim } A_n(R) \leq \text{gl. dim } R + 2n,$$

donc $\text{gl. dim } A_n(R) = 2n$ pour $n \leq s$, ce qui donne $\Delta_n(R) = 2$ pour $n < s$.

D'autre part, il est clair que, pour tout n , $A_n(R)$ peut être obtenu à partir de $A_{n+s}(\mathbb{Q})$ en tant qu'anneau de fractions. Ainsi $A_n(R)$ est plat à la fois en tant que $A_{n+s}(\mathbb{Q})$ -module à gauche et $A_{n+s}(\mathbb{Q})$ -module à droite (cf. [15], p. 170, théorème 6) et

$$A_n(R) \otimes_{A_{n+s}(\mathbb{Q})} A_n(R) \simeq A_n(R) \text{ (cf. [15], p. 169, théorème 5)}$$

Par conséquent, par le lemme 2.b.2 de [3] (p. 69), on a

$$\text{gl. dim } A_n(R) \leq \text{gl. dim } A_{n+s}(\mathbb{Q}) = n + s.$$

Mais alors si $n > s$, $n + s < 2n$, donc $\Delta_n(R) = 1$.

Exemple 7.2. - Soit R le corps gauche défini dans l'exemple 7.1. Alors

$$A_n(R[w_1, \dots, w_k]) = A_n(R)[w_1, \dots, w_k],$$

d'où

$$\text{gl. dim } A_n(R[w_1, \dots, w_k]) = \text{gl. dim } A_n(R) + k.$$

et si $S = R[w_1, \dots, w_k] \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on aura $\Delta_n(S) = 2$ pour $n \leq s$ ou $n > s + k$, et $\Delta_n(S) = 1$ sinon. En effet,

$$\begin{aligned} \text{gl. dim } A_n(S) &= \max \{ \text{gl. dim } A_n(R[w_1, \dots, w_k]), \text{gl. dim } A_n(R/2R) \} \\ &= \max \{ \text{gl. dim } A_n(R) + k, 2n \}. \end{aligned}$$

Si $n \leq s$, le maximum est $2n + k$, donc $\Delta_n(S) = 2$. Si $n > s$,

$$\text{gl. dim } A_n(R) = n + s ,$$

car $\text{gl. dim } A_s(R) = 2s$, et $\Delta_n(R) = 1$ pour $n > s$. Pour $n > s + k$, $n + s + k < 2n$, donc $\Delta_n(S) = 2$ et, pour $n \leq s + k$ et $n \leq s$, $n + s + k > 2n$, donc $\Delta_n(S) = 1$.

Exemple 7.3. - Soit de nouveau R le corps gauche de l'exemple 7.1 avec $s > 1$, et $R' = R \oplus \mathbb{Q}[w_1, \dots, w_k]$ avec $k < s$. Alors on a $\text{gl. dim } A_n(R') = n + k$ pour $0 \leq n \leq k$, $2n$ pour $k \leq n \leq s$, et $n + s$ pour $s \leq n$. En effet,

$$\text{gl. dim } A_n(R') = \max \{ \text{gl. dim } A_n(R) , k + n \} .$$

Si $n \leq s$, $\text{gl. dim } A_n(R) = 2n$, donc $\text{gl. dim } A_n(R') = 2n$ si $n \geq k$, $k + n$ si $n \leq k$; et si $n \geq s$, $\text{gl. dim } A_n(R') = \max \{ n + s , n + k \}$ avec $k < s$, donc $\text{gl. dim } A_n(R') = n + s$. D'où $\Delta_n(R') = 1$ pour $0 \leq n \leq k$, 2 pour $k < n \leq s$, et 1 pour $s < n$. Cet exemple est dû à K. R. GOODEARL et à J. T. STAFFORD, indépendamment. Nous avons donc exhibé les suites possibles suivantes pour $\Delta_n(R)$:

1 , 1 , 1 , ...
 1 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ...
 2 , 2 , ... , 1 , 1 , ...
 2 , 2 , 2 , ... , 2 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ...
 1 , 1 , 1 , ... , 1 , 2 , 2 , ... , 2 , 1 , 1 , ...

En effet, GOODEARL et STAFFORD ont remarqué indépendamment que l'on pouvait construire un anneau R tel que $\Delta_n(R)$ soit n'importe quelle suite de 1 et de 2 , à condition qu'elle soit constante à partir d'un certain rang.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.) and BUCHSBAUM (D.). - Homological dimension in local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 85, 1957, p. 390-405.
- [2] BHATWADEKAR (S. M.). - On the global dimension of Ore-extensions, Nagoya math. J., t. 50, 1973, p. 217-225.
- [3] BJÖRK (J. E.). - The global homological dimension of some algebras of differential operators, Invent. Math., t. 17, 1972, p. 67-78.
- [4] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 2. - Paris, Hermann, 1962 (Act. scient. et ind., 1236 ; Bourbaki, 6).
- [5] BOURBAKI (N.). - Algèbre. Chap. 8. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1261 ; Bourbaki, 23).
- [6] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [7] FAITH (C.). - Algebra : Rings, modules and categories, I. - Berlin, Springer-Verlag, 1973 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 190).
- [8] FIELDS (K.). - On the global dimension of skew polynomial rings. An addendum, J. of Algebra, t. 14, 1970, p. 528-530.
- [9] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). - Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie. - Paris, Presses universitaires de France, 1966 (Institut des Hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 31, p. 5-20).

- [10] GOODEARL (K. R.). - Global dimension of differential operator rings, Proc. Amer. math. Soc., t. 45, 1974, p. 315-322.
- [11] GOODEARL (K. R.). - Global dimension of differential operator rings, II, Trans. Amer. math. Soc., t. 209, 1975, p. 65-85.
- [12] GOPALAKRISHNAN (N. S.) and SRIDHARAN (R.). - Homological dimension of Ore-extensions, Pacific J. Math., t. 19, 1966, p. 67-75.
- [13] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - London, Queen Mary College, Dept of Math., 1966 (Queen Mary College. Mathematics Notes).
- [14] KAPLANSKY (I.). - Commutative rings. - Boston, Allyn and Bacon, 1970.
- [15] NORTHCOTT (D. G.). - An introduction to homological algebra. - Cambridge, at the University Press, 1966.
- [16] ROOS (J. E.). - Détermination de la dimension homologique globale des algèbres de Weyl, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 23-26.
- [17] ZARISKI (O.) and SAMUEL (P.). - Commutative algebra. - Princeton, D. Van Nostrand - Reinhold, 1958.

(Texte reçu le 6 juin 1977)

Maryse DESROCHERS
Cascadilla Hall, Room 431
Cornell University
ITHACA, N. Y. 14853 (Etats-Unis)
