

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

DIMITRI LATSIS

Modules tertiaires

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 3, p. 1-20

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A3_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES TERTIAIRES

par Dimitri LATSIS

Tous les anneaux considérés sont unitaires, noethériens à gauche. Tous les modules sont unitaires de type fini.

On note, pour un module M et un sous-module N ,

$$N : M = \{a \in A ; aM \subseteq N\}.$$

C'est un idéal bilatère de A , et si I est un idéal bilatère, on note

$$N : I = \{m \in M ; Im \subseteq N\}.$$

C'est un sous-module de M .

1. Ass M .

Définitions.

Un A -module P non nul est dit premier si, pour tout sous-module non nul N , on a $0 : N = 0 : P$. Il est immédiat que l'idéal bilatère $0 : P$ est alors premier.

Pour un A -module M , on note

$\text{Ass } M$ l'ensemble des annulateurs des sous-modules premiers de M

$\underline{P}(M)$ l'ensemble des annulateurs premiers des sous-modules de M

$$M = \{P \text{ premier de } A ; \exists N \subseteq M, P = 0 : N\}.$$

On a évidemment

$$\text{Ass } M \subseteq \underline{P}(M).$$

PROPOSITION 1. - Soit A un T-anneau à gauche. Alors $\text{Ass } M = \underline{P}(M)$ pour tout A -module de type fini M . (Pour la définition de T-anneau, voir le § 5 ci-après.)

Preuve. - Soit $P \in \underline{P}(M)$, alors il existe un sous-module X de M $0 \neq X$, tel que

$$P = 0 : X, \quad X = M_1 + \dots + M_n, \quad M_i \text{ monogènes.}$$

D'où

$$P = 0 : (M_1 + \dots + M_n) = \bigcap^r 0 : M_i.$$

Comme P est premier, il existe $i \leq k \leq n$ tel que

$$P = 0 : M_k = 0 : A/L,$$

où $M_k \simeq A/L$, L idéal à gauche de A ; d'où

$$P = L : A \subseteq L.$$

Puisque $L : A$ est le plus grand idéal bilatère contenu dans L , l'idéal L/P de

l'anneau A/P n'est pas essentiel dans A/P d'après la condition de Krause, donc il existe $L' \supsetneq P$ tel que $L \cap L' = P$. On a donc

$$0 \neq L'/P \subseteq A/L = M_k,$$

d'où

$$\text{Ass}(L'/P) \subseteq \text{Ass } M_k \subseteq \text{Ass } M \quad (\text{cf. proposition 2}).$$

Mais on peut voir que $\{P\} = \text{Ass}(L'/P)$ et par conséquent $P \in \text{Ass } M$.

Remarque. - On ne connaît pas d'anneau noethérien à gauche tel qu'on puisse trouver un A -module à gauche de type fini avec $\text{Ass } M \neq P(M)$.

Evidemment dans un anneau noethérien commutatif $P(M) = \text{Ass } M$.

PROPOSITION 2 (propriétés de $\text{Ass } M$).

(α) $\text{Ass } M \neq \emptyset$.

(β) Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ est exacte alors $\text{Ass } L \subseteq \text{Ass } M \subseteq \text{Ass } L \cup \text{Ass } N$

(γ) Si $N \triangleleft M$, alors $\text{Ass } N = \text{Ass } M$.

(δ) $\text{Ass}(\bigoplus_I M_i) = \bigcup_I \text{Ass } M_i$.

(ϵ) Si M uniforme, alors $\text{Ass } M = \{P\}$.

(ζ) $\text{Ass } M = \text{Ass } E(M)$.

(η) $\text{Ass } M$ est fini.

Preuve.

(α) Soit $\mathcal{L} = \{0 \neq N \subseteq M\}$. Soit P un élément maximal de $\mathcal{L}$

$$P = 0 \neq N_0 \subseteq M.$$

Si $0 \neq N_1 \subseteq N_0$, alors

$$0 \neq N_1 \supseteq 0 \neq N_0 = P \quad \text{et} \quad P = 0 \neq N_1.$$

(β) Il est immédiat que $\text{Ass } L \subseteq \text{Ass } M$. Soit $P \in \text{Ass } M$, alors

$$P = 0 \neq K, \quad 0 \neq K \subseteq M.$$

Deux cas se présentent ou bien $K \cap L = 0$, et K est isomorphe à un sous-module de N , donc $P \in \text{Ass } N$, ou bien $K \cap L \neq 0$, alors $P = 0 \neq (K \cap L)$, et $P \in \text{Ass } L$.

(δ) On se ramène au cas où I est fini, et il suffit de le prouver pour $I = \{1, 2\}$, cas qui résulte de (β).

(ϵ) P est l'annulateur maximum des sous-modules de M car $M_1 \cap M_2 \neq 0$, $\forall M_1, M_2 \neq 0$, et $P = 0 \neq M$.

(ζ) En effet, $M \triangleleft E(M)$.

(η) Soit $E(M) = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ somme directe d'injectifs indécomposables (cf. 5),
et

$$\text{Ass } M = \text{Ass } E(M) = \bigcup_{i=1}^n \text{Ass } M_i .$$

2. Sous-modules primaires.

Définition 1. - On appelle radical primaire d'un anneau A , noté $R(A)$, l'idéal $R(A) =$ le plus grand idéal nilpotent,

$$= \bigcap P, \quad P \text{ premiers de } A,$$

$$= \bigcap P', \quad P' \text{ premiers minimaux de } A.$$

Preuve. - $R(A)$ existe car, si $I^n = 0$ et $\mathfrak{J}^m = 0$, alors $(I + \mathfrak{J})^{n+m} = 0$. Donc $R(A) = \sum I_\alpha$ nilpotents $= \sum_{i=1}^n I_i$ car A est noethérien. Posons $I = \bigcap P$. On va montrer $R(A) = I$.

Puisque $R^n(A) = 0 \subseteq P$, on a $R(A) \subseteq P$, $\forall P$, d'où $R(A) \subseteq I$. D'autre part, il est connu que, étant donné un idéal bilatère I , il existe des idéaux premiers $P_1, \dots, P_n$ tels que $0 = P_1 P_2 \dots P_n$ avec $I \subseteq P_i$. Donc $I^n \subseteq P_1 P_2 \dots P_n = 0$, et I est nilpotent, d'où $I \subseteq R(A)$.

Pour la dernière égalité, s'il existe un premier P , alors $0 = P_1 P_2 \dots P_n \subseteq P$. Alors il existe i tel que $P_i \subseteq P$. Donc, en choisissant les éléments minimaux de la famille des $\{P_i\}_{i=1, \dots, n}$, on obtient le résultat.

Définition 2. - On appelle radical primaire d'un idéal bilatère I

$$\begin{aligned} R(I) &\equiv R(A/I) = \text{maximum } \{\mathfrak{J} ; \exists n \mathfrak{J}^n \subseteq I\} \\ &= \bigcap_{P \supseteq I} P \text{ premiers.} \end{aligned}$$

PROPOSITION 1. - Soit un idéal bilatère I . Alors

$$(a) \quad I \subseteq R(I),$$

$$(b) \quad I \subseteq \mathfrak{J}, \text{ alors } R(I) \subseteq R(\mathfrak{J}), \quad \mathfrak{J} \text{ idéal bilatère,}$$

$$(c) \quad R(I \cap \mathfrak{J}) = R(I\mathfrak{J}) = R(I) \cap R(\mathfrak{J}).$$

Preuve. - La vérification est facile.

Définition 3. - Soit N un sous-module de M . On appelle radical primaire de N , $R(N)$,

$$R(N) = \text{maximum } \{I \text{ bilatères ; } \exists n \ I^n M \subseteq N\}.$$

Avec ces notations, le radical de M est

$$R(M) = \text{maximum } \{I ; I^n M = 0\}.$$

Si Q est un idéal à gauche,

$$R(Q) = \text{maximum } \{I ; I^n \subseteq Q\} = \bigcap_{P \supseteq Q, A} P \text{ premiers.}$$

Définition 4. - Un sous-module N d'un module M est appelé primaire, s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

$$1^\circ \quad aAX \subseteq N, \quad X \not\subseteq N \implies a \in R(N).$$

$$2^\circ \quad IX \subseteq N, \quad X \not\subseteq N \implies I^n \subseteq N : M.$$

$$3^{\circ} \quad N \subsetneq N : I \implies I \subseteq R(N) .$$

$$4^{\circ} \quad I \not\subseteq R(N) \implies N : I = N .$$

Preuve. - La vérification est la même que dans le cas tertiaire.

PROPOSITION 2. - Si N est primaire, alors $R(N)$ est premier.

Preuve. - Soit $I \subseteq R(N)$, $I \not\subseteq R(N)$, $I \not\subseteq R(N)$, d'où

$$(I \cap N)^n \subseteq N : M \quad \text{et} \quad I(I \cap N)^{n-1} \subseteq N : M .$$

On a $(I \cap N)^{n-1} \subseteq N : M$, car, sinon la relation $(I \cap N)^{n-1} \subseteq N : M$ entraînerait $I \subseteq R(N)$, d'après la définition de primaire.

En appliquant le même raisonnement à $I(I \cap N)^{n-1} \subseteq N : M$, on arrive à $(I \cap N)^{n-1} \subseteq N : M$ et, par récurrence, on obtient $I \subseteq N : M$, qui est impossible.

PROPOSITION 3. - Soient N un sous-module de M , P un idéal bilatère vérifiant

$$(i) \quad IX \subseteq N, \quad X \not\subseteq N \implies I \subseteq P ,$$

$$(ii) \quad \exists n \quad P^n \subseteq N : M ,$$

alors N est P -primaire.

Preuve. - $IX \subseteq N : M$, $X \not\subseteq N$, d'où $I \subseteq P$, et $I^n \subseteq P^n \subseteq N : M$, donc N est primaire.

D'autre part, (ii) entraîne $P \subseteq R(N)$. Soit $R(N)^m \subseteq N : M$ (on peut choisir m minimal). On a $R(N).R(N)^{m-1} \subseteq N : M$ avec $R(N)^{m-1} \not\subseteq N : M$, d'où, d'après (i), $R(N) \subseteq P$, et $R(N) = P$.

PROPOSITION 4. - Tout idéal premier est primaire.

Preuve. - Elle se fait d'après la proposition précédente.

PROPOSITION 5. - Si N_1, N_2 sont P -primaires, alors $N_1 \cap N_2$ est P -primaire.

Preuve. - On vérifie (i) et (ii) de la proposition 3.

(i) $IX \subseteq (N_1 \cap N_2) : M$, $X \not\subseteq N_1 \cap N_2$ entraîne par exemple, que $X \not\subseteq N_1$, d'où $I \subseteq P$, car N_1 est P -primaire.

(ii) $P^m \subseteq N_1 : M$, $P^n \subseteq N_2 : M$, d'où

$$P^{\max(n,m)} \subseteq (N_1 \cap N_2) : M .$$

Remarque. - L'existence d'une décomposition d'un sous-module en éléments primaires n'est pas assurée dans le cas non commutatif à partir de la décomposition irréductible, car un sous-module irréductible n'est pas, en général, primaire.

(cf. contre exemple dans LESIEUR-CROISOT [5]).

Définition 5. - Soit, si, elle existe, une décomposition d'un sous-module N en intersection de sous-modules primaires $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ avec les N_i P_i -primaires. Cette décomposition est dite réduite si

(i) il n'y a pas d'éléments superflus,

(ii) $P_i \neq P_j$, $i \neq j$.

On peut toujours transformer une décomposition en une décomposition réduite, d'après la proposition 5.

LEMME 6. - Soit $S = N \cap X = N' \cap X'$ avec N P-primaire et N' P'-primaire, $P \neq P'$. Alors $S = X \cap X'$.

Preuve. - En effet, $S \subseteq X \cap X'$.

Soit $z \in X \cap X'$. On peut supposer $P \not\subseteq P'$. On a $P^n \subseteq N' : M$. Alors

$$P^n z \in X \cap N = S \subseteq N',$$

d'où $P^n Az \subseteq N'$. Si $Az \notin N'$, on a $P^n \subseteq P'$, et $P \subseteq P'$, ce qui est impossible. Donc $Az \subseteq N'$ et $z \in N'$, d'où $z \in N' \cap X' = S$.

THÉOREME 7 (unicité). - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_n = N'_1 \cap \dots \cap N'_n$, deux décompositions primaires de N en éléments primaires avec N_i P_i -primaires et N'_i P'_i -primaires. Alors $n = n'$ et $P_i = P'_{\sigma(i)}$ pour tout i , où σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Preuve. - On va montrer $P_1 = P'_{\sigma(1)}$, ce qui finira la démonstration. Supposons au contraire que $P_1 \neq P'_j$, $j = 1, \dots, n'$.

D'après le lemme 6, on a

$$N = N'_2 \cap \dots \cap N'_n \cap N_2 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap \dots \cap N_n.$$

En appliquant la même méthode à (N'_2, N_1) , on obtient

$$N = N'_3 \cap \dots \cap N'_n \cap N_2 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap \dots \cap N_n,$$

et ainsi de suite. D'où $N = N_2 \cap \dots \cap N_n$. Ce qui est impossible, car N_1 serait superflu.

3. Sous-modules tertiaires.

Définition 1. - Un sous-module S d'un module M est dit essentiel dans M , et on note $S \triangleleft M$, s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

1° $\forall N$ sous-module de M , $S \cap N = 0 \implies N = 0$,

2° $\forall 0 \neq x \in M$, $\exists \lambda \in A \implies 0 \neq \lambda x \in S$.

PROPOSITION 1.

(a) $S_1 \triangleleft M$, $S_2 \triangleleft M \implies S_1 \cap S_2 \triangleleft M$.

(b) $S_1 \triangleleft M$, $S \supset S_1 \implies S \triangleleft M$.

Preuve. - La démonstration est évidente.

Définition 2. - On appelle radical tertiaire d'un module M l'idéal bilatère noté

$T(M)$ suivant

$$\begin{aligned} T(M) &= \{a \in A ; \exists S \triangleleft M, aS = 0\} . \\ &= \{a \in A ; \forall x \neq 0, \exists \lambda x \neq 0, aA\lambda x = 0\} . \\ &= \{a \in A ; 0 :_M (a) \triangleleft M\} \text{ avec } 0 :_M (a) = \{x \in M ; (a)x = 0\} . \\ &= \text{maximum } \{I \text{ bilatère ; } 0 : I \triangleleft M\} . \end{aligned}$$

Preuve. - L'idéal $T(M)$ est bilatère. Soient $a, b \in T(M)$, alors $aS_1 = 0$, $bS_2 = 0$, avec $S_1 \triangleleft M$, $S_2 \triangleleft M$, d'où $(a - b)(S_1 \cap S_2) = 0$.
Si $a \in T(M)$ et $\lambda \in A$, alors $\lambda aS \subseteq aS = 0$.

Il y a égalité des trois premiers ensembles, notés X, Y, Z .

Si $a \in X$ alors $\forall x \neq 0, \exists 0 \neq \lambda x \in S$, d'où $aA\lambda x \subseteq aS = 0$ et $a \in Y$.

Si $a \in Y$, alors $0 : (a) \triangleleft M$ et $a \in Z$.

Si $a \in Z$, alors $S = 0 : (a) \triangleleft M$ et $aS = 0 \implies a \in X$.

Dernière égalité : Soit I tel que $0 : I \triangleleft M$. Soit $a \in I$, alors $0 : (a) \geq 0 : I$, d'où $0 : (a) \triangleleft M$, et $a \in T(M)$, donc $I \subseteq T(M)$.

D'autre part, $0 : T(M) \triangleleft M$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 : T(M) &= 0 : \sum^n (a_i) , \text{ car } A \text{ noethérien} \\ &= \bigcap^n 0 : (a_i) , \text{ ce qui est facile à vérifier} \end{aligned}$$

donc $0 : T(M) \triangleleft M$ d'après la proposition 1.

Définition 3. - On appelle idéal singulier (à droite) de A l'idéal bilatère

$$Z(A) = \{a \in A ; 0 : a \triangleleft A\} .$$

THEOREME 2.

(a) On a $R(A) \subseteq T(A) \subseteq Z(A)$.

(b) Si A est commutatif, on a $R(A) = T(A) = Z(A)$.

Preuve.

(a) $R(A) \subseteq T(A)$: Il suffit de montrer que $0 : R \triangleleft A$. Soit $(0 : R) \cap X = 0$, alors

$$[(0 : R) \cap X] : R = 0 : R ,$$

d'où

$$[(0 : R) : R] \cap (X : R) = 0 : R$$

implique

$$(0 : R^2) \cap (X : R) \cap X = (0 : R) \cap X$$

implique

$$(0 : R^2) \cap X = 0 ,$$

et, ainsi de suite on obtient

$$(0 : R^n) \cap X = 0 .$$

Mais $\exists n$, $R^n = 0$, d'où $A \cap X = 0$ et $X = 0$. Donc $0 : R \triangleleft A$.

$T(A) \subseteq Z(A)$: Evident.

(b) Si A est commutatif, on a évidemment $T(A) = Z(A)$. Soit $a \in T(A)$. La condition noethérienne donne, pour un entier n , $0 : a^n = 0 : a^{n+1}$. Alors $a^n = 0$. Soit au contraire $a^n \neq 0$. Alors $\exists \lambda$, $\lambda a^n \neq 0$, $a \lambda a^n = 0$, d'où $\lambda a^{n+1} = 0$ et $\lambda a^n = 0$, ce qui est impossible. Donc $a^n = 0$ et $a \in R(A)$.

Définition 4. - On appelle radical tertiaire d'un sous-module N de M le radical tertiaire du module M/N , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} T(N) &\equiv T(M/N) = \{a \in A ; \exists S \subseteq M, aS \subseteq N, \text{ et } S \cap X = N \implies X = N\} . \\ &= \{a \in A ; \forall x \notin N, \exists \lambda x \notin N, a \lambda x \subseteq N\} . \\ &= \text{maximum } \{I ; (N : I) \cap X = N \implies X = N\} . \\ &= \text{maximum } \{I ; (N : I) \cap X \subseteq N \implies X \subseteq N\} . \end{aligned}$$

Preuve. - La dernière égalité : Soit I un élément de la première famille, et soit $(N : I) \cap X \subseteq N$. Alors

$$(N : I) \cap X \subseteq N \cap X \subseteq (N : I) \cap X ,$$

d'où

$$(N : I) \cap X = N \cap X, \text{ et } [(N : I) \cap X] + N = (N \cap X) + N ,$$

donc $(N : I) \cap (X + N) = N$. D'où $X + N = N$ et $X \subseteq N$, c'est-à-dire I appartient à la seconde famille. La réciproque est immédiate.

PROPOSITION 3.

$$(a) \quad N : M \subseteq T(N) .$$

$$(b) \quad T(N_1 \cap \dots \cap N_k) \supseteq T(N_1) \cap T(N_2) \cap \dots \cap T(N_k) .$$

Preuve.

(a) Il suffit de montrer que $[N : (N : M)] \cap X = N$ entraîne $X = N$. En effet, si $[N : (N : M)] \cap X = N$, comme $N : (N : M) = M$, on a $M \cap X = X = N$.

(b) Il suffit de faire la démonstration pour $k = 2$. Soit $T = T(N_1) \cap T(N_2)$, et soit

$$[(N_1 \cap N_2) : T] \cap X \subseteq N_1 \cap N_2$$

d'où

$$[(N_1 : T) \cap (N_2 : T) \cap X \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq N_1$$

et, comme $T \subseteq T(N_1)$, on a

$$(N_2 : T) \cap X \subseteq N_1 \subseteq N_1 : T .$$

$$(N_2 : T) \cap X = (N_2 : T) \cap (N_1 : T) \cap X \subseteq N_1 \cap N_2 \subseteq N_2$$

et, comme $T \subseteq T(N_2)$, on a $X \subseteq N_2$. De la même façon, on montre $X \subseteq N_1$, et par

conséquent $X \subseteq N_1 \cap N_2$.

Remarques. - On n'a pas, en général, $N_1 \subseteq N_2 \implies T(N_1) \subseteq T(N_2)$.

Si Q est un idéal à gauche, d'après (a), on a $Q \cdot A \subseteq T(Q)$, mais on n'a pas, en général, $Q \subseteq T(Q)$. Si Q est bilatère, alors $Q = Q \cdot A$ et, dans ce cas, $Q \subseteq T(Q)$.

Définition 5. - Un sous-module N de M est dit tertiaire dans M s'il vérifie les conditions suivantes équivalentes

$$1^\circ \quad aAx \subseteq N \quad x \notin N \implies a \in T(N), \quad (a \in A, \quad x \in M)$$

$$2^\circ \quad IX \subseteq N \quad X \not\subseteq N \implies I \subseteq T(N)$$

$$3^\circ \quad N \subsetneq N : I \implies I \subseteq T(N).$$

Preuve.

$1^\circ \equiv 2^\circ$: immédiat.

$2^\circ \implies 3^\circ$. Soit $N \subsetneq N : I = X$. Alors $IX \subseteq N$, $X \not\subseteq N$, d'où $I \subseteq T(N)$.

$3^\circ \implies 2^\circ$. Soit $IX \subseteq N$ et $X \not\subseteq N$. Alors $N \subsetneq N : I$, d'où $I \subseteq T(N)$.

PROPOSITION 4. - N tertiaire implique $T(N)$ idéal premier.

Preuve. - Posons $P = T(N)$, et soit $I\mathfrak{D} \subseteq P$ avec $I \not\subseteq P$. Alors $N : I = N$, si non on aurait $I \subseteq P$.

Soit $(N : I\mathfrak{D}) \cap X = N$. Alors

$$N : I\mathfrak{D} = (N : I) : I\mathfrak{D} = N : I\mathfrak{D}.$$

Donc

$$(N : I\mathfrak{D}) \cap X = (N : I\mathfrak{D}) \cap X = N$$

et comme $I\mathfrak{D} \subseteq P$, alors $X = N$. Donc $I\mathfrak{D} \subseteq P$.

Définition 6. - On note $P = T(N)$, et N est dit P-tertiaire.

PROPOSITION 5.

(a) N-primaire $\implies$ N-tertiaire.

(b) P idéal premier $\implies P$ est P-tertiaire

(c) Q idéal à gauche irréductible $\implies Q$ est P-tertiaire.

(c') N sous-module irréductible $\implies N$ est P-tertiaire.

Preuve.

(a) Car $R(N) \subseteq T(N)$.

(b) Car il est P-primaire.

(c') Soit N un sous-module irréductible. Soit $N \subsetneq N : I$ et $(N : I) \cap X = N$. Alors $X = N$. Donc N est tertiaire.

PROPOSITION 6. - Soit $N \neq M$ un sous-module de M , et P un idéal bilatère,
tels que

$$(i) \quad IX \subseteq N, \quad X \not\subseteq N \implies I \subseteq P.$$

$$(ii) \quad P \subseteq T(N).$$

Alors N est P -tertiaire.

Preuve. - Elle est identique à celle du cas primaire.

PROPOSITION 7. - Si N_1, N_2 sont P -tertiaires, alors $N_1 \cap N_2$ est P -tertiaire.

Preuve. - Vérifions (i) et (ii) de la proposition précédente.

$$(i) \quad IX \subseteq N_1 \cap N_2, \quad X \not\subseteq N_1 \cap N_2 \text{ entraîne par exemple, } X \not\subseteq N_1, \text{ d'où } I \subseteq T(N_1) = P.$$

$$(ii) \quad P = T(N_1) \cap T(N_2) \subseteq T(N_1 \cap N_2).$$

THÉOREME 8 (existence). - Tout A -module (de type fini sur un anneau noethérien
bilatère) admet une décomposition réduite finie en sous-modules tertiaires.

Preuve. - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_k$ une décomposition de N en éléments irréductibles qui sont tertiaires d'après la proposition 5. On peut regrouper les sous-modules qui ont même radical tertiaire d'après la proposition 7, et on obtient une décomposition réduite.

LEMME 9. - Soit $S = N \cap X = N' \cap X'$ avec N P -tertiaire, N' est P' -tertiaire,
et $P \neq P'$. Alors $S = X \cap X'$.

Preuve. - Soit $P \neq P'$. On a $N' : P = N'$ et $(N \cap X) : P = (N' \cap X') : P$, et en développant

$$(N : P) \cap (X : P) = (N' : P) \cap (X' : P) = N' \cap (X' : P),$$

d'où

$$(N : P) \cap (X : P) \cap X \cap X' = N' \cap (X' : P) \cap X \cap X'.$$

Donc

$$(N : P) \cap X \cap X' = N' \cap X \cap X' \subseteq N',$$

d'où d'après la définition,

$$X \cap X' \subseteq N \text{ et } X \cap X' \subseteq N \cap X = S,$$

mais aussi $X \cap X' \supseteq S$, d'où $S = X \cap X'$.

THÉOREME 10. - Soient

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_n \quad (\text{les } N_i \text{ sont } P_i\text{-tertiaires})$$

$$\text{et } N = N'_1 \cap \dots \cap N'_{n'} \quad (\text{les } N'_i \text{ sont } P'_i\text{-tertiaires}),$$

deux décompositions réduites de N .

$$\text{Alors } n = n' \text{ et } \{P_i\} = \{P'_i\}.$$

Preuve. - Elle se fait comme dans le cas primaire.

PROPOSITION 11. - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ une décomposition en P_i -tertiaires réduites. Alors $T(N) = P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$.

Preuve. - Il suffit de montrer $T(N) \supseteq P_1 \cap \dots \cap P_n$. Posons $P = T(N)$. Supposons $P \not\subseteq P_1$. Alors $N_1 : P = N_1$.

Soit $X = N_2 \cap \dots \cap N_n$, $X \not\subseteq N_1$ (car la décomposition est réduite). Alors

$$N : P = (N_1 \cap X) : P = (N_1 : P) \cap (X : P) = N_1 \cap (X : P),$$

et

$$(N : P) \cap X = N_1 \cap (X : P) \cap X = N_1 \cap X = N,$$

d'où $X = N \subseteq N_1$. Ce qui est impossible.

Donc $P \subseteq P_1$, et de même $P \subseteq P_i$, $\forall i$; d'où $P \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_n$.

4. Sous-modules isotypiques.

Définition 1. - On dit qu'un sous-module N de M est isotypique dans M si

$$E(M/N) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

avec E_i injectifs indécomposables tous isomorphes. La classe π d'isomorphie de E_i s'appelle type de N , et N est dit π -isotypique.

PROPOSITION 1. - Si N est irréductible dans M , alors N est isotypique dans M .

Preuve.

$$N \text{ irréductible} \implies M/N \text{ uniforme} \implies E(M/N) \text{ indécomposable}$$

PROPOSITION 2. - Si N_1, N_2 sont π -isotypiques dans M , alors $N_1 \cap N_2$ est π -isotypique dans M .

Preuve. - Si $N = N_1 \cap N_2$,

$$0 \longrightarrow M/N \xrightarrow{\Phi} (M/N_1) \oplus (M/N_2) \subseteq E(M/N_1) \oplus E(M/N_2)$$

implique

$$E(M/N) \subseteq E(M/N_1) \oplus E(M/N_2) = \bigoplus^n I_i \oplus \bigoplus^m J_j,$$

où $\Phi(X + N) = (X + N_1, X + N_2)$. D'où $E(M/N) = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ avec F_i isomorphe à certains I_i, J_j qui sont isomorphes entre eux. Donc $F_i \simeq F_j$, et N est π -isotypique.

Définition 2. - Une décomposition de $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ avec N_i π_i -isotypiques est dite réduite si

(i) il n'y a pas d'éléments superflus ($N \neq \bigcap_{j \neq i} N_j$)

(ii) $\pi_i \neq \pi_j$, $i \neq j$.

THÉOREME 3 (existence). - Si M est noethérien, alors tout sous-module admet une décomposition réduite en éléments π_i -isotypiques.

Preuve. - Comme M est noethérien, si N est sous-module, alors $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ avec les N_i irréductibles, donc isotypiques. Cette décomposition, on peut la réduire en rassemblant les éléments du même type grâce à la proposition 2.

THÉOREME 4 (unicité). - Soient $N = N_1 \cap \dots \cap N_n = N'_1 \cap \dots \cap N'_{n'}$, deux décompositions de N , réduites en éléments isotypiques. Alors $n = n'$ et $M_i = M'_j$.

Preuve. - On a

$$N = (\cap_{\alpha} I_{1\alpha}) \cap \dots \cap (\cap_{\lambda} I_{n\lambda}) = (\cap_{\alpha} \mathfrak{I}_{1\alpha}) \cap \dots \cap (\cap_{\lambda'} \mathfrak{I}_{n'\lambda'})$$

chacune en éléments irréductibles. Alors

$$E(M/N) = \underbrace{E(M/I_{1\alpha})}_{M_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{E(M/I_{n\lambda})}_{M_n} = \underbrace{E(M/\mathfrak{I}_{1\alpha})}_{M'_1} \oplus \dots \oplus \underbrace{E(M/\mathfrak{I}_{n'\lambda'})}_{M'_{n'}}.$$

5. Anneaux classiques. T-anneaux.

Définition 1. - Un A -module M est dit d'Artin-Rees si, pour tout idéal I bilatère de A , pour tout sous-module N de M , et pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $h = h(n)$ tel que

$$I^h M \cap N \subseteq I^n N.$$

LEMME 1. - Soit N un sous-module tertiaire de M . Alors N est primaire si, et seulement si, il existe n tel que $T^n(N) \subseteq N' \cdot M$.

Preuve. - Soit N primaire, alors $R(N) = T(N)$, et il existe n tel que $T^n(N) \subseteq N' \cdot M$. Réciproquement, si $T^n(N) \subseteq N' \cdot M$, alors $T(N) \subseteq R(N)$.

THÉOREME 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes

- 1° M est un A -module d'Artin-Rees.
- 2° Tout sous-module tertiaire est primaire.
- 3° Tout sous-module admet une décomposition primaire.

Preuve.

1° $\implies$ 2° : Il existe h tel que

$$T^h(N)M \cap (N : T(N)) \subseteq T(N)[N : T(N)] \subseteq N,$$

d'où, si N est tertiaire, $T^h(N)M \subseteq N$ et d'après le lemme 1, N est primaire.

2° $\implies$ 1° : Soit (I, N, n) comme dans la définition 1. Soit une décomposition réduite en tertiaires

$$I^n N = N_1 \cap \dots \cap N_k \cap N'_1 \cap \dots \cap N'_{k'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I^n \subseteq P_i, & i = 1, \dots, k. \\ I^n \not\subseteq P'_j, & j = 1, \dots, k'. \end{cases}$$

Comme $I^n N \subseteq N_j^!$, $J^n \not\subseteq P_j^!$, alors $N \subseteq N_j^!$, d'où

$$N \subseteq N_1^! \cap \dots \cap N_k^! \text{ et } I^{nt_i} \subseteq P_i^{t_i} \subseteq N_i^! : M.$$

Donc

$$\exists h = h(nt_i), \quad I^h M \subseteq N_1 \cap \dots \cap N_k$$

et

$$I^h M \cap N \subseteq N_1 \cap \dots \cap N_k \cap N_1^! \cap \dots \cap N_k^! = I^n N$$

2° $\implies$ 3° est évident.

3° $\implies$ 1° : même principe que pour 2° $\implies$ 1°.

Soit (I, N, n) comme dans la définition 1, et soit $I^n N = N_1 \cap \dots \cap N_m$ une décomposition primaire. Si $N \subseteq N_i$, pour $i = 1, \dots, m$, on a

$$I^n M \cap N \subseteq N \subseteq N_1 \cap \dots \cap N_m = I^n N.$$

S'il existe un i tel que $N \not\subseteq N_i$, $i = 1, \dots, m'$, et $N \subseteq N_i$ pour $i = m' + 1, \dots, m$, alors, les N_i étant primaires, il existe $s_i \in \mathbb{N}$, tel que $(I^n)^{s_i} \subseteq N_i : M$ et, en posant $s = \sup(s_1, \dots, s_m)$, on a

$$I^{ns} M \cap N \subseteq I^n N.$$

Définition 2. - Un anneau A noethérien à gauche, vérifiant, comme un A -module à gauche, les propriétés du théorème 2, est appelé anneau classique.

Exemples. - Sont des anneaux classiques :

- 1° Tout anneau commutatif noethérien ;
- 2° Tout anneau noethérien dont les idéaux à gauche et à droite sont bilatères ;
- 3° L'anneau des matrices $M[A]$, où A est un anneau commutatif, noethérien ;
- 4° L'anneau des matrices $M_n[A]$, où A est un anneau classique ;
- 5° Tout anneau principal, intègre ;
- 6° Toute A -algèbre centrale Λ , où A est un anneau commutatif noethérien, tel que les idéaux bilatères de Λ sont de la forme ΛI , avec I idéal de Λ ;
- 7° Toute A -algèbre, séparable, Λ , de type fini en tant que A -module, où A est un anneau commutatif noethérien ;
- 8° L'anneau des endomorphismes d'un A -module projectif de type fini, où A est commutatif et noethérien ;
- 9° Un ordre maximal Λ , dans une algèbre simple centrale sur le corps de fractions d'un anneau de Dedekind ;
- 10° Un anneau artinien, somme directe fini d'anneaux artiniens primaires.
(Pour tous ces exemples, voir M.-C. GERMA [2] ;)
- 11° L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente finie sur un corps K . Cette propriété caractérise la nilpotence.

(Voir J. C. Mc CONNEL [6].)

LEMME 3. - Si $V = \bigcap \{X \subseteq M ; I \subseteq T(\lambda)\}$, où I est un idéal bilatère, alors on a $IV = V$.

Preuve. - Soit $IV = N_1 \cap \dots \cap N_n$ en P_i -tertiaires (réduite) avec

$$\begin{cases} V \not\subseteq N_i, & i = 1, \dots, p \\ V \subseteq N_j, & j = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Alors, pour les N_i tels que $V \not\subseteq N_i$, on a $I \subseteq P_i$, d'où

$$I \subseteq P_1 \cap \dots \cap P_p = T(N_1 \cap \dots \cap N_p),$$

car la décomposition est réduite.

Pour les N_j tels que $V \subseteq N_j$, alors

$$V \subseteq N_{p+1} \cap \dots \cap N_n \text{ et } IV = IV \cap V = (N_1 \cap \dots \cap N_p) \cap V = V.$$

LEMME 4. - On a $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = \bigcap \{X \subseteq M ; I \subseteq R(X)\}$.

Preuve. - Si W est la première intersection et W' la seconde, on a :

$$I \subseteq R(X) \implies I^k M \subseteq X \implies W \subseteq X \text{ et } W \subseteq W'.$$

On a $I \subseteq R(I^n M)$, car $I^k \subseteq I^k M : M$.

THEOREME 5. - Soit M un A-module d'Artin-Rees, et I un idéal bilatère de A .

(a) Si $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M$, alors $V = IV$.

(b) Si $I \subseteq \mathcal{J}(A)$ radical de Jacobson, alors $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n M = 0$.

Preuve. - Elle est évidente d'après les lemmes 3 et 4.

D'après les propositions 9 et 10 du § 6 ci-après, on peut faire correspondre, à tout module injectif indécomposable E , l'idéal premier $P = \text{Ass } E$. On a donc l'application

$$\begin{aligned} f : \pi &\longrightarrow \text{spec}(A) \\ E &\longmapsto P = \text{Ass } E \end{aligned}$$

entre les classes π d'injectifs indécomposables et les idéaux premiers de A . Cette application est surjective, car

$$E(A/P) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n,$$

avec $E_i \simeq E_j$ et E_i injectifs indécomposables, et $P = \text{Ass } E_i$, car P est P -tertiaire.

Définition 3. - On appelle T-anneau à gauche un anneau noethérien à gauche tel que f est bijective.

THÉOREME 6. - Les conditions suivantes sont équivalentes

1° A est T-anneau à gauche ;

2° Tout A-module à gauche tertiaire de type fini est isotypique.

Preuve.

1° $\implies$ 2° : Soient A un T-anneau, et M un A-module de type fini, tertiaire. Soit $0 = N_1 \cap \dots \cap N_n$, où les N_i sont irréductibles, donc tertiaires, et admettent le même idéal associé P ; il en résulte que

$$E(M) = E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_n)$$

somme directe d'injectifs indécomposables qui ont le même idéal associé P. Donc, comme A est un T-anneau, les $E(M/N_i)$ sont isomorphes entre eux, et M est isotypique.

2° $\implies$ 1° : Soit A un anneau noethérien à gauche dans lequel tout module tertiaire de type fini est isotypique.

Soient E_1, E_2 deux injectifs indécomposables tels que

$$\text{Ass } E_1 = \text{Ass } E_2 = P.$$

On a $E_1 = E(Ax_1)$ avec $0 \neq x_1 \in E_1$, et $E_2 = E(Ax_2)$ avec $0 \neq x_2 \in E_2$.

Alors le module $M = Ax_1 \oplus Ax_2$ est de type fini et tertiaire car

$$\text{Ass } M = \text{Ass } E(M) = \text{Ass}(Ax_1) \cup \text{Ass}(Ax_2) = P.$$

Donc M est isotypique. Par conséquent, $E_1 \simeq E_2$, car

$$E(M) = E(Ax_1) \oplus E(Ax_2) = E_1 \oplus E_2.$$

Remarque. - Une définition équivalente des T-anneaux est la condition de Krause

(i) Pour tout idéal premier P, dans l'anneau A/P , tout idéal essentiel (à gauche) contient un idéal bilatère non nul.

Exemples. - Sont des T-anneaux :

1° Tout anneau commutatif, noethérien ;

2° Les anneaux noethériens à gauche dans lesquels tout idéal à gauche est bilatère ;

3° Les anneaux qui sont de type fini sur leur centre, lequel est noethérien ;

4° Les anneaux noethériens à gauche à identité polynomiale ;

5° Les anneaux artiniens à gauche.

THEOREME 7. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° A est un T-anneau, et tout idéal premier est irréductible à gauche ;

2° Pour tout injectif indécomposable E, il existe un idéal premier tel que
 $E \simeq E(A/P)$;

3° Pour tout idéal premier P et pour tout idéal à gauche L tel que $L \not\subseteq P$, il
existe un idéal bilatère I tel que $L \not\subseteq I \not\subseteq P$.

Preuve. - Voir [8], page 166.

6. Injectifs indécomposables.

Définitions. - Un module M est dit indécomposable si

$$M = M_1 \oplus M_2 \implies M_1 = 0 \text{ ou } M_2 = 0 .$$

Un module M est dit uniforme (ou co-irréductible) si 0 est un sous-module irréductible, i. e.

$$N_1 \cap N_2 = 0 \implies N_1 = 0 \text{ ou } N_2 = 0 .$$

PROPOSITION 1. - M est injectif indécomposable $\iff M$ est injectif minimal.

Preuve. - Soit $0 \neq N'$ injectif, et $N' \subset M$, alors $M = N' \oplus N''$, d'où $N'' = 0$ et $M = N'$.

Réciproquement, soit $M = N' \oplus N''$, alors N' et N'' sont injectifs, donc $N' = M$ ou $N'' = M$.

PROPOSITION 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

1° M est uniforme ;

2° $E(M)$ est injectif indécomposable ;

3° Si $0 \neq M' \subseteq M$, alors $E(M') = E(M)$.

Preuve.

1° $\implies$ 2° : Soit $E(M) = E_1 \oplus E_2$, $E_1 \neq 0$, alors $E_1 \cap M \neq 0$, $E_2 \cap M \neq 0$, d'où

$$(E_1 \cap M) \cap (E_2 \cap M) \subseteq E_1 \cap E_2 = 0 ,$$

et M est non uniforme.

2° $\implies$ 3° : $E(M') \subseteq E(M)$, mais, $E(M)$ étant minimal, on a $E(M') = E(M)$.

3° $\implies$ 1° : Soit $X \neq 0$, $Y \neq 0$, des sous-modules de M , alors $E(M) = E(X) = E(Y)$ d'où $X \triangleleft E(Y)$ et $X \cap Y \neq 0$.

PROPOSITION 3. - Si M est uniforme, et $M \triangleleft E$, alors E est uniforme.

Preuve. - Soient $X \neq 0$, $Y \neq 0$ des sous-modules de E , alors $X \cap M \neq 0$, $Y \cap M \neq 0$, d'où

$$0 \neq (X \cap M) \cap (Y \cap M) \subseteq X \cap Y .$$

PROPOSITION 4. - Soient M_1 et M_2 uniformes. Alors on a

$$E(M_1) = E(M_2) \text{ si, et seulement si, } \exists 0 \neq X \subseteq M_1, 0 \neq Y \subseteq M_2, X \simeq Y .$$

Preuve. - Soit $E(M_1) \simeq E(M_2)$, d'où $M_2 \simeq M'_1 \subseteq E(M_1)$, et $0 \neq M'_1 \cap M_1$, sous-module de M_1 , est isomorphe à un sous-module de M_2 .

Réciproquement, si $X \simeq Y$, alors $E(X) = E(M_1)$, $E(Y) = E(M_2)$, d'où $E(M_1) = E(M_2)$.

PROPOSITION 5. - Soit $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ une décomposition sans élément superflu en sous-modules N_i irréductibles de M , alors

$$E(M/N) \simeq E(M/N_1) \oplus \dots \oplus E(M/N_n)$$

avec les $E(M/N_i)$ injectifs indécomposables.

Preuve. - Les N_i sont irréductibles, donc les M/N_i sont uniformes, et $E(M/N_i)$ indécomposables.

On peut identifier M/N avec le sous-module diagonal de $\bigoplus^n E(M/N_i)$ fermé dans $(m + N_1, \dots, m + N_n)$.

Il suffit de montrer

$$M/N \triangleleft \bigoplus_{i=1}^n E(M/N_i) .$$

On montre d'abord $(M/N) \cap (M/N_i) \neq 0$, $\forall i$. Montrons-le par exemple pour $i = 1$. Comme la décomposition n'a pas d'élément superflu, il existe $m \in M$ tel que $m \in N_2 \cap \dots \cap N_n$ et $m \notin N_1$. Donc

$$(m + N_1, \dots, m + N_n) = (m + N_1, 0, \dots, 0) \in (M/N_i) \cap (M/N) .$$

Comme $(M/N) \cap (M/N_i) \neq 0$, on a $0 \neq (M/N) \cap (M/N_i) \subseteq E(M/N_i)$ et, comme $E(M/N_i)$ est indécomposable, on a

$$E((M/N) \cap (M/N_i)) = E(M/N_i) .$$

Montrons maintenant que si $x \in \bigoplus^n E(M/N_i)$, $\exists a \in A$ tel que $ax \in M/N$. Soit $x \in \bigoplus^n E(M/N_i)$, alors $x = x_1 + \dots + x_n$, $x_i \in E(M/N_i)$.

On peut supposer $x_1 \neq 0$, alors

$$x_1 \in E(M/N_1) = E((M/N) \cap (M/N_1)) \implies \exists a_1 \in A, 0 \neq a_1 x_1 \in (M/N) \cap (M/N_1)$$

et ainsi de suite. On a

$$0 \neq a_1 x = a_1 x_1 + \dots + a_1 x_n$$

et

$$0 \neq a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 x \in M/N .$$

THEOREME 6 (existence) [MATLIS]. - Soit A noethérien à gauche, et L un idéal à gauche. Alors $E(A/L) = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$ avec E_i injectifs indécomposables.

Preuve. - $L = L_1 \cap \dots \cap L_n$ avec L_i irréductibles. Cette décomposition est supposée sans élément superflu, sinon on la réduit (l'existence d'une telle décomposition est toujours vraie dans un anneau noethérien à gauche). En appliquant la proposition 5, on a

$$E(A/L) \simeq E(A/L_1) \oplus \dots \oplus E(A/L_n) .$$

THEOREME 7 (unicité) [AZUMAYA]. - Si $M = E_1 \oplus \dots \oplus E_n = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_{n'}$ en injectifs indécomposables, alors $n = n'$, et $E_i \simeq E'_{\sigma(i)}$, $\forall i$.

Preuve. - Voir [5] ou [7].

PROPOSITION 8. - Soit M injectif, et $M \subseteq E_1 \oplus \dots \oplus E_n$, E_i injectifs indécomposables, alors

$$M = E'_1 \oplus \dots \oplus E'_m \text{ avec } E'_i \simeq E_{\sigma(i)} \text{ et } m \leq n.$$

Preuve. - Comme M est injectif, il existe M' injectif tel qu'on a

$$M \oplus M' = E_1 \oplus \dots \oplus E_n,$$

comme

$$M = F_1 \oplus \dots \oplus F_r \text{ et } M' = F'_1 \oplus \dots \oplus F'_s,$$

le théorème 7 donne $n = r + s$ et $E_i \simeq F_i$ ou F'_i .

Soit M un module uniforme (par exemple un module injectif indécomposable). Si on prend la famille $\mathcal{L} = \{0 : X ; 0 \neq X \subseteq M\}$, elle admet un élément maximal. Soit $P = 0 : X_0$. Cet élément est maximum. En effet, si $0 : Y \in \mathcal{L}$, comme $X_0 \cap Y \neq 0$, alors

$$P = 0 : X_0 \subseteq 0 : (X_0 \cap Y),$$

d'où

$$P = 0 : (X_0 \cap Y) \text{ et } 0 : Y \subseteq 0 : (X_0 \cap Y) \subseteq P.$$

Cet idéal est premier comme on peut le voir facilement. En plus, $P = T(M)$. En effet, si $a \in T(M)$, alors $\exists S \triangleleft M$ tel que $aS = 0$, d'où $a \in 0 : S \subseteq P$.

D'autre part, $0 : P \triangleleft M$ car tout sous-module non nul est essentiel dans M, puisque M est une forme. Donc $P \subseteq T(M)$. D'où, les propositions suivantes.

PROPOSITION 9. - A tout module uniforme M correspond un idéal premier qui est le radical tertiaire de M.

PROPOSITION 10. - Si M_1, M_2 sont uniformes, et $M_1 \simeq M_2$, alors $P_1 = P_2$, où P_i est le radical tertiaire de M_i .

7. Relations entre tertiaires et Ass M.

Soit N un sous-module d'un A-module M. Alors N admet une décomposition tertiaire (unique) $N = N_1 \cap \dots \cap N_n$ avec les N_i P_i -tertiaires. Notons

$$\text{Ass}'(N) = \{P_1, \dots, P_n\}.$$

D'autre part, posons

$$\text{Ass}(M/N) = \{P'_1, P'_2, \dots, P'_n\}.$$

$E(M/N)$ se décompose en somme directe finie d'injectifs indécomposables. Soit

$$E(M/N) = E_1 \oplus \dots \oplus E_k.$$

A chaque injectif indécomposable correspond un idéal premier, et posons

$$\text{Ass}'' N = \{P_1'', P_2'', \dots, P_k''\}.$$

On va montrer que

$$\text{Ass}(M/N) = \text{Ass}' N = \text{Ass}'' N.$$

Définition. - Un résiduel $P = X : Y$, $X \not\subseteq Y$, de X est dit essentiel si $X \not\subseteq Z \subseteq Y \implies P = X : Z$.

LEMME 1. - Pour un sous-module N de M , les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1° P est résiduel essentiel de N ;
- 2° $P \in \text{Ass}(M/N)$;
- 3° $P = N : Y$, $Y \not\subseteq N$, et $Z \not\subseteq N$, $Z \subseteq Y \implies P = N : Z$.

Preuve. - L'équivalence $1^\circ \iff 2^\circ$ est évidente.

$1^\circ \implies 3^\circ$: Soit $P = N : Y$, $N \subset Y$, $Z \not\subseteq N$, $Z \subseteq Y$. Alors $N \not\subseteq N + Z \subseteq Y$, d'où

$$P = N : Y = N : (N + Z) = N : Z$$

$3^\circ \implies 1^\circ$: Soit $P = N : Y$, $Y \not\subseteq N$,

$$P = N : (N + Y).$$

$$N \not\subseteq Z \subseteq N + Y,$$

d'où

$$Z = (N + Y) \cap Z = N + (Y \cap Z),$$

et

$$Y \cap Z \not\subseteq N, \quad Y \cap Z \subseteq Y.$$

D'où

$$P = N : (Y \cap Z),$$

et

$$N : Z = N : [N + (Y \cap Z)] = N : (Y \cap Z) = P.$$

THÉOREME 2. - On a $\text{Ass}(M/N) = \text{Ass}' N = \text{Ass}'' N$.

Preuve. - Soit $P \in \text{Ass}(M/N)$, alors $P = N : X$, $N \not\subseteq X$. Supposons $I \neq P_1 = T(N_1)$

$$N = N \cap X = N_1 \cap \dots \cap N_n \cap X \subseteq N_2 \cap \dots \cap N_n \cap X \equiv Y.$$

Alors $N \not\subseteq Y \subseteq X$, d'où

$$P = N : X = N : Y = N_1 : Y$$

et, si $Z \not\subseteq N_1$, $Z \subseteq Y$, alors $Z \not\subseteq N$, $Z \subseteq Y$, d'où

$$P = N : Y = N : Z = N_1 : Z.$$

D'où $P = P_1$ ce qui est impossible. Donc

$$N = N_2 \cap \dots \cap N_n \cap X.$$

En répétant la même méthode, en supposant cette fois-ci $P \neq P_2 = T(N_2)$; on obtient $N = N_3 \cap \dots \cap N_n \cap X$, et ainsi de suite ; si $P \neq P_n = T(N_n)$, on a $N = X$, ce qui est impossible. Donc il existe i tel que $P = T(N_i) \in \text{Ass}' N$.

Soit $P \in \text{Ass}' N$, et posons $S = M/N$, $P = 0 : Y$ résiduel essentiel de S . Alors $P = 0 : Ay$ avec $y \in Y$.

$$E(Ay) \subseteq E(S) = \bigoplus^n E_i,$$

d'où

$$E(Ay) = \bigoplus_{i=1}^k E'_i$$

et

$$y = e'_1 + \dots + e'_k$$

d'où

$$P = 0 : Y = 0 : Ay = \bigcap 0 : Ae'_i$$

et, comme P est premier, on a

$$P = 0 : Ae'_i \in \text{Ass}'' N.$$

Si $P = 0 : Y \in \text{Ass}'' N$, $Y \subseteq E_i$, alors

$$0 : (Y \cap S) = 0 : Y = P$$

et si $0 \neq Z \subseteq Y \cap S$, alors

$$P = 0 : Z \implies P \in \text{Ass}(M/N).$$

Soit $P \in \text{Ass}(M/N)$. On a

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_n = N_1 \cap X', \quad X' \not\subseteq N_1.$$

Soit $\mathcal{L} = \{N : X ; N \subsetneq X \subseteq X'\}$. Alors il existe un élément maximal qui est résiduel essentiel, car si $N \subsetneq Y \subseteq X$, alors $N : Y \supseteq N : X$, d'où l'égalité. Par conséquent, on a un résiduel $P = N : X$ tel que $X \subset X'$ et $N = N_1 \cap X'$. Alors, d'après la démonstration de la partie $\text{Ass}(M/N) \subseteq \text{Ass}' N$, on a $N = N_1 \cap X'$, d'où $P = P_1$.

COROLLAIRE 3.

(a) Un sous-module N est tertiaire si, et seulement si, $\text{Ass}(M/N) = \{P\}$.

(b) Tout sous-module isotypique est tertiaire.

Preuve.

(a) est évident.

(b) Si N est isotypique, alors

$$E(M/N) = \bigoplus^n E_i \quad \text{avec} \quad E_i = E_j,$$

d'où $T(E_i) = T(E_j) = P$ et

$$\text{Ass}(M/N) = \text{Ass } E(M/N) = \{P\} .$$

BIBLIOGRAPHIE

La théorie tertiaire est traitée dans les livres suivants :

- [1] BEHRENS (E. A.). - Ring theory. - New York, Academic Press, 1972 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 44).
- [2] GERMA (M.-C.). - Modules tertiaires, modules primaires et lemme d'Artin-Rees, Séminaire d'algèbre non commutative, 1967/68, n° 12, 15 p. (Publications mathématiques d'Orsay).
- [3] HERSTEIN (I. N.). - Topics in ring theory. - Chicago, the University of Chicago Press, 1969 (Chicago Lectures in Mathematics).
- [4] LARSEN (M. D.) and Mc CARTHY (P. J.). - Multiplicative theory of ideals. - New York, Academic Press, 1971 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 43).
- [5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier Villars, 1963 (Mémoires des Sciences mathématiques, 154).
- [6] Mc CONNEL (J. C.). - The intersection theorem for a class of non commutative rings, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 17, 1967, p. 487-498.
- [7] RENAULT (G.). - Algèbre non commutative. - Paris, Gauthier Villars, 1975 (Variations Mathématiques).
- [8] STENSTRÖM (P.). - Rings of quotients. - Berlin, Springer-Verlag, 1975 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 217).

(Texte reçu le 25 avril 1977)

Dimitri LATSIS
9 rue Maxime Bacquet
94110 ARCUEIL
