

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

CATHERINE HEIMENDINGER

La dimension de Gel'fand-Kirillov

Groupe d'étude d'algèbre, tome 2 (1976-1977), exp. n° 2, p. 1-19

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1976-1977__2__A2_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA DIMENSION DE GEL'FAND-KIRILLOV

par Catherine HEIMENDINGER

I. Définitions.

Soient k un corps, et A une k -algèbre (associative, unitaire). Si U et V sont des sous- k -espaces vectoriels de A , on note $U.V$ l'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{uv ; u \in U \text{ et } v \in V\}$.

Définition 1. - Si la dimension de V est finie, on peut définir l'application d_V de $\underline{\mathbb{N}}$ dans $\underline{\mathbb{N}}^*$ par

$$d_V(n) = \dim (V^0 + V^1 + \dots + V^n),$$

si $V^0 = k$ et $V^n = V.V^{n-1}$, cette fonction est croissante.

Remarque. - Si 1 appartient à V , alors on a $d_V(n) = \dim V^n$. On pourra, en général, se ramener à ce cas.

Définition 2. - La dimension de Gel'fand-Kirillov de A , notée $\text{Dim } A$, est donnée par

$$\text{Dim } A = \sup_V \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (\log d_V(n)) / \log n,$$

Notation. - Si A est une k -algèbre, $\text{Dim } A$ désigne la dimension de Gel'fand-Kirillov de A , et $\dim A$ désigne la dimension de A en tant que k -espace vectoriel.

Définition 3. - Soit $\mathcal{M}$, l'ensemble des fonctions croissantes de $\underline{\mathbb{N}}$ dans $\underline{\mathbb{R}}^+$. On définit sur $\mathcal{M}$ une relation réflexive et transitive, notée $\leq^*$, par $f \in \mathcal{M}$, $g \in \mathcal{M}$.

$$f \leq^* g \iff \exists m \in \underline{\mathbb{N}}, \forall n \in \underline{\mathbb{N}}; f(n) \leq g(mn).$$

On peut associer à $\leq^*$ la relation d'équivalence $=^*$ définie par

$$f =^* g \iff f \leq^* g \text{ et } g \leq^* f.$$

On note $w(f)$ la classe de f pour cette relation, et $\leq$ la relation d'ordre induite par $\leq^*$ sur $\mathcal{M}/=^*$.

Exemples 1.

1° Soient f et g des fonctions polynomiales à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}^+$, alors f et g sont équivalentes si, et seulement si, leurs degrés sont égaux.

Démonstration.

(a) Si f et g ont même degré, on va montrer qu'ils sont équivalents. Pour cela il suffit de prouver que $f(n) = a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_0$, $a_p > 0$ et

$g(n) = n^p$ sont équivalents. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq a_p + a_{p-1} + \dots + a_0$, on a alors : $f(n) \leq g(mn)$.

On choisit $m' \in \mathbb{N}$ tel que $m' > \frac{p+1}{\sqrt[p]{a_p}}$ on a $g(n) \leq f(m'n)$.

(b) Montrons maintenant la réciproque.

On a donc par hypothèse $f \sim g$. On pose

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_0,$$

$$g(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_0.$$

Puisque $f \leq g$, il existe un m dans $\mathbb{N}$, tel que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $f(n) \leq g(mn)$, c'est-à-dire $f(n)/g(mn) \leq 1$, puisque f et g sont positives. Or lorsque n tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(n)/g(mn)) &= +\infty && \text{si } p > q \\ &= a_p / (b_p m^p) && \text{si } p = q \\ &= 0 && \text{si } p < q. \end{aligned}$$

On doit donc avoir $p \leq q$.

Comme on a aussi $g \leq f$, il en résulte $q \leq p$. On trouve donc $f \sim g \implies p = q$.

2° Pour tout γ dans $\mathbb{R}^+$, on définit p_γ comme étant la classe d'équivalence de l'application $n \mapsto n^\gamma$, et on a

$$p_\gamma = p_\delta \iff \gamma = \delta.$$

3° On définit, pour ε dans $\mathbb{R}^{+*}$, la classe e_ε de l'application $n \mapsto e^{n^\varepsilon}$, et on a $e_\varepsilon = e_\rho \iff \varepsilon = \rho$.

LEMME 1. - Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de A , si V engendre l'algèbre A , il existe m dans $\mathbb{N}$, tel que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on ait

$$d_W(n) \leq d_V(mn).$$

Donc

$$\omega(d_W) \leq \omega(d_V).$$

Démonstration. - On peut supposer que 1 appartient à V , et à W . V engendre A signifie $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V^n$; comme de plus W est de dimension finie, il existe un m dans $\mathbb{N}$ tel que $W \subset V^m$. On a alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, $W^n \subset V^{mn}$, et par suite $d_W(n) \leq d_V(mn)$.

LEMME 2. - Soit f dans $\mathcal{M}$. On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\log f(n)) / \log n &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} ; f(n) \leq n^\gamma, \text{ pour presque tout } n \} \\ &= \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} ; \omega(f) \leq p_\gamma \}. \end{aligned}$$

Cette limite ne dépend donc de la classe de f .

Démonstration.

(a) On va d'abord démontrer que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\log f(n)) / \log n \leq \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} ; f(n) \leq n^\gamma, \text{ pour presque tout } n \}.$$

Soient

$$\lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\log f(n)) / \log n,$$

et

$$\lambda' = \inf \{ \gamma \in \mathbb{R} ; f(n) \leq n^\gamma \text{ pour presque tout } n \}$$

et soit γ dans $\mathbb{R}$ tel que $f(n) \leq n^\gamma$.

On a alors

$$(\log f(n)) / \log n \leq \log n^\gamma / \log n = \gamma,$$

d'où

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\log f(n)) / \log n \leq \gamma$$

et on obtient bien le résultat $\lambda \leq \lambda'$.

(b) Démontrons l'inégalité inverse, pour cela supposons $\lambda > \lambda'$.

Il existe alors γ dans $\mathbb{R}$, supérieur à λ et tel que, pour une infinité de n dans $\mathbb{N}$, on ait $f(n) > n^\gamma$.

D'où $\lambda = (\log f(n)) / \log n > \gamma > \lambda'$; ce qui est impossible.

On a donc $\lambda = \lambda'$.

On peut alors donner les définitions suivantes.

Définition 4. - Pour ρ dans $\mathcal{M}$, $\text{Dim } \rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\log f(n)) / \log n$, et pour a dans $\mathcal{M}/\sim$, $\text{Dim } a = \text{Dim } \rho$ si $f \in a$.

PROPOSITION 1. - Soient V et W des sous-espaces vectoriels de dimension finie de A , qui engendrent, l'un et l'autre, A . Alors $\omega(d_V) = \omega(d_W)$.

Démonstration. - Elle résulte directement du lemme 1.

Définition 5. - Si A est une algèbre de type fini, on appelle croissance de A $\omega(A) = \omega(d_V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A , et l'algèbre A est dite à croissance polynomiale si $\omega(A) = p_m$, où m est dans $\mathbb{N}$, et à croissance exponentielle si $\omega(A) = e_1$.

Définition 6. - On a une seconde définition de la dimension de Gel'fand-Kirillov, donnée par

$\text{Dim } A = \text{Dim } \omega(A)$ si A est de type fini,

$\text{Dim } A = \sup \{ \text{Dim } B, B \subset A, B \text{ sous-algèbre de type fini} \}$ si A est quelconque.

Exemple 2.

1° Soit A une algèbre commutative et intègre dont le corps des fractions K a pour degré de transcendance d sur K . Alors on a $\text{Dim } A = d$.

Démonstration. - Il résultera du théorème II.1 (c) que $\text{Dim } A = \text{Dim } K$. Soit

$x_1, x_2, \dots, x_d$ une base de transcendance de K sur k . Il résultera du théorème II.1 (c) que $\text{Dim } k(x_1, \dots, x_d) \leq \text{Dim } K$. Il résultera du théorème II.1 (e) que $\text{Dim } k(x_1, \dots, x_d) = \text{Dim } k[x_1, \dots, x_d]$ et du théorème II.1 (a) que $\text{Dim } k[x_1, \dots, x_d] = \sum_{i=1}^d \text{Dim } k[x_i]$. Il suffit de prouver que $\text{Dim } k[X] = 1$ pour en conclure que $d \leq \text{Dim } K$, mais ceci résulte du fait que $V = k + kX$ engendre $K[X]$ (cf. lemme 1 et prop. 1). Montrons que $\text{Dim } K \leq d$. Pour cela il suffit de prouver que si $k \subset L \subset H$ sont des corps et si H est une extension algébrique finie de L alors $\text{Dim } H = \text{Dim } L$. Mais ceci résulte immédiatement du fait que H est un L -espace vectoriel de dimension finie.

2° Soit A une algèbre de type fini, mais non de dimension finie, on a alors $p_1 \leq \omega(A) \leq e_1$.

Démonstration.

(a) On va d'abord montrer que $\omega(A) \leq e_1$. Soit V un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A , et qui contient 1 , alors

$$d_V(n) = \dim V^n \leq \dim(V \otimes \dots \otimes V) = (\dim V)^n.$$

Donc $\omega(d_V) \leq e_1$.

(b) On considère la suite d'inclusions $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \dots$. Ces inclusions sont strictes, sinon A serait un espace vectoriel de dimension finie. Puisque ces inclusions sont strictes, on a $d_V(n) \geq n$ d'où $\omega(A) \geq p_1$.

II. Propriétés élémentaires de la dimension de Gel'fand-Kirillov.

THEOREME 1. - Soient deux algèbres A et B données, on a alors les résultats

(a) $\text{Dim } (A \otimes_k B) = \text{Dim } A + \text{Dim } B$,

(b) $\text{Dim } (A \times B) = \max(\text{Dim } A, \text{Dim } B)$,

(c) $\text{Dim } C \leq \text{Dim } A$ où C est soit une sous-algèbre de A , soit une algèbre quotient de A ,

(d) $\text{Dim } A/(I_1 \cap \dots \cap I_r) = \max_{1 \leq j \leq r} \text{Dim } (A/I_j)$ si les I_i sont des idéaux bilatères.

(e) $\text{Dim } S^{-1} A = \text{Dim } A$ pour toute partie S , multiplicative, incluse dans le centre de A , composée de non-diviseurs de 0 .

Démonstration. - On peut supposer A et B de type fini. Il suffira ensuite de prendre les bornes supérieures des expressions trouvées.

Soit, alors, U un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A , et qui contient 1 . De même V un espace vectoriel de dimension finie, qui contient 1 , et qui engendre B .

Démontrons maintenant les divers points suivants.

(a) L'algèbre $A \otimes B$ est engendré par l'espace vectoriel de dimension finie $W = U \otimes 1 + 1 \otimes V$.

Or on a

$$U^n \otimes V^n \subset W^{2n} \subset U^{2n} \otimes V^{2n}$$

d'où

$$d_U(n)d_V(n) \leq d_W(n) \leq d_U(2n)d_V(2n) ,$$

et

$$\text{Dim } d_W = \text{Dim } d_U + \text{Dim } d_V .$$

Donc, on obtient bien

$$\text{Dim } A \otimes B = \text{Dim } A + \text{Dim } B .$$

(b) L'algèbre $A \times B$ est engendré par l'espace vectoriel $U \times V$. On peut supposer que la dimension de Gel'fand-Kirillov de A est supérieure à celle de B . Ce qui signifie qu'il existe un n_0 dans $\mathbb{N}$, tel que pour tout n supérieur à n_0 , on a $d_U(n) \geq d_V(n)$. Or on a

$$U^n \times \{0\} \subset W^n \subset U^n \times V^n .$$

D'où

$$d_U(n) \leq d_W(n) \leq d_U(n) + d_V(n) ,$$

et donc

$$\text{si } n \geq n_0 , \quad d_U(n) \leq d_W(n) \leq 2d_U(n) ,$$

et

$$\text{Dim } A = \text{Dim } (A \times B) .$$

On a, donc, bien le résultat voulu.

(c) On considère d'abord le cas où C est inclus dans A . L'espace vectoriel $C \cap U$ engendre C .

Si $W = C \cap U$, on a $d_W(n) \leq d_U(n)$. D'où

$$\text{Dim } C \leq \text{Dim } A .$$

Soit maintenant le cas où C est une algèbre quotient de A . $C = A/I$, où I est un idéal de A . L'espace $W = U/I$ engendre C .

D'où $d_W(n) \leq d_U(n)$, et

$$\text{Dim } C \leq \text{Dim } A .$$

(d) Il suffit de le démontrer pour r valant 2, on aura le résultat général par récurrence.

L'application $A/I_1 \cap I_2 \rightarrow A/I_1 \times A/I_2$ est injective. Donc, d'après (c) on a

$$\text{Dim } A/I_1 \cap I_2 \leq \text{Dim } (A/I_1 \times A/I_2) .$$

D'autre part, l'application $A/I_1 \cap I_2 \rightarrow A/I_1$ est surjective.

Donc

$$\dim (A/I_1 \cap I_2) \geq \dim A/I_1, \text{ d'après (c),}$$

et de même

$$\dim (A/I_1 \cap I_2) \geq \dim A/I_2.$$

Ce qui donne le résultat.

(c) Pour toute partie S de A , contenue dans le centre de A et sans diviseur de zéro dans A , on a $A \subset S^{-1}A$ d'où

$$\dim A \leq \dim S^{-1}A.$$

Démontrons maintenant l'inégalité inverse. Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $S^{-1}A$, qui engendre $S^{-1}A$. Comme W est un sous-espace de dimension finie, il existe s dans S tel que $sW \subset A$. Définissons, alors, V sous-espace vectoriel de A , $V = sW + ks + k$.

On a alors, $W^n \subset s^{-n}V^n$, donc $d_W(n) \leq d_V(n)$, et

$$\dim S^{-1}A \leq \dim A.$$

PROPOSITION 2. - Si A est une algèbre commutative, alors

1° $\dim A$ est un entier ou est infinie,

2° si A est de type fini, alors $\dim A$ coïncide avec la dimension de Krull de A ,

3° $\dim(A/I) = \dim A$, si I est constitué d'éléments nilpotents.

Démonstration. - Supposons que A soit de type fini. Alors A est un anneau noethérien et de plus, d'après le théorème II.1 (d), on peut supposer que A est une algèbre primaire.

Notons alors par I le nilradical de A , et par S le supplémentaire de I dans A . Comme A est primaire, S est composé de non-diviseurs de zéro.

Soit B tel que $B = S^{-1}A$, B est un anneau local et artinien. On a donc la décomposition suivante : $B = K + \mathfrak{M}$, avec $\mathfrak{M}$ idéal maximal de B , d'où $\mathfrak{M} = S^{-1}I$, K isomorphe au corps résiduel de B . B est de dimension finie, en tant que K -algèbre, d'où $\dim B = \dim K$.

Or K est un corps commutatif, d'où, d'après l'exemple 2.1., $\dim K$ est égal au degré de transcendance de K sur k , et à la dimension de Krull de A .

Or, d'après II.1 (e), $\dim B = \dim A$. On a donc le résultat.

Si A n'est pas de type fini, on peut passer à la borne supérieure sur l'ensemble des sous- k -algèbres de type fini et obtenir les 1° et 3°.

PROPOSITION 3. - Soit I un idéal de l'algèbre A , qui contient un non-diviseur de 0, soit à droite, soit à gauche. On a alors l'inégalité suivante

$$\dim(A/I) \leq (\dim A) - 1.$$

Démonstration. - Soit φ l'homomorphisme canonique de A dans A/I , et x un élément de I , non diviseur de zéro à droite. V désigne un sous-espace vectoriel de A , de dimension finie contenant 1 et x . D_n est un supplémentaire de

$I \cap V^n$ dans V^n , pour tout n de $\mathbb{N}$.

Alors φ induit un isomorphisme de D_n sur $\bar{D}_n$ (image de D_n par φ), et de plus $\bar{D}_n = \bar{V}^n$.

On va montrer que $D_n + D_n x + \dots + D_n x^m$ est une somme directe, pour tout m de $\mathbb{N}$.

Soit

$$d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^m = 0, \text{ avec } d_i \in D_n,$$

alors

$$\varphi(d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^m) = 0,$$

et $\bar{d}_0 = 0$, d'où $d_0 \in D_n \cap I = \{0\}$, $d_0 = 0$.

Or x n'est pas diviseur de zéro, donc on obtient

$$d_1 + d_1 x + \dots + d_n x^{m-1} = 0$$

et par réitération du procédé on a

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, d_i = 0.$$

D'où on a bien une somme directe.

Il en résulte, puisque

$$D_n + D_n x + \dots + D_n x^n \subset V^{2n},$$

que

$$n \dim D^n \leq \dim V^{2n},$$

d'où,

$$n \dim \bar{V}^n \leq \dim V^{2n},$$

et

$$n d_{\bar{V}}(n) \leq d_V(2n),$$

et donc

$$\dim d_{\bar{V}} + 1 \leq \dim d_V.$$

D'où en prenant la borne supérieure pour tous les sous-espaces vectoriels V , de dimension finie de A , on a le résultat.

COROLLAIRE 1. - Soit A une algèbre, anneau premier et noethérien à droite. Alors pour tout idéal I de A , non nul, on a $\dim(A/I) \leq (\dim A) - 1$.

Démonstration. - Soit S l'ensemble des non-diviseurs de zéro, bilatères. L'anneau fraction de A , $S^{-1}A$, est simple, d'après le théorème de Goldie, puisque A est un anneau premier et noethérien à droite.

D'où $I \cap S$ n'est pas réduit à zéro, sinon $S^{-1}I$ serait un idéal de $S^{-1}A$, il est différent de A puisqu'il ne contient pas 1. D'où I contient un non-diviseur de 0, et on applique la proposition.

COROLLAIRE 2. - Soit A une algèbre noethérienne à droite, de dimension de Gel'fand-Kirillov finie. Alors si I, J sont des idéaux de A , I idéal premier, tels que J contienne I , alors si $\dim(A/I) = \dim(A/J)$ on a $I = J$.

Démonstration. - Puisque I est un idéal premier, l'anneau $A/I = B$ est premier, noethérien à droite.

Soit J' , l'idéal de B induit par J . D'après le corollaire 1 on a

$$\dim(B/J') \leq (\dim B) - 1, \text{ si } J' \neq 0,$$

d'où $\dim(A/J) \leq (\dim(A/I)) - 1$.

Or $\dim A$ est finie, donc $\dim(A/I)$ est finie, on a donc une contradiction, d'où $J' = 0$, et $J = I$.

COROLLAIRE 3. - Soit $I_0, I_1, \dots, I_r$ une suite d'idéaux premiers de l'algèbre noethérienne à droite A , tels que $I_0 \subset I_1 \subset \dots \subset I_r$, alors $\dim A \geq r$.

Cela provient directement du corollaire précédent.

III. Dimension de Gel'fand-Kirillov des algèbres filtrées et des algèbres graduées.

Soit B une k -algèbre munie d'une $\mathbb{Z}$ -graduation $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, où les k -espaces vectoriels B_i sont de dimension finie.

On a $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B_i$ avec $B_i B_j \subset B_{i+j}$. On notera $B(n) = \bigoplus_{i=-n}^n B_i$, et $d_{\mathcal{B}}(n) = \dim B(n)$ si $n \in \mathbb{N}$.

En gardant ces notations, nous avons le lemme suivant.

LEMME 3.

(a) $\dim B \leq \dim d_{\mathcal{B}}$

(b) si B est de type fini, alors $\omega(B) = \omega(d_{\mathcal{B}})$, et donc $\dim B = \dim d_{\mathcal{B}}$.

Démonstration.

(a) Soit V un sous-espace vectoriel de B , de dimension finie, alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $V \subset B(m)$, et

$$(V + k)^n \subset B(m)^n \subset B(mn),$$

d'où

$$d_V(n) \leq d_{\mathcal{B}}(mn),$$

$$\omega(d_V) \leq \omega(d_{\mathcal{B}}).$$

(b) Si B est de type fini, il existe $m \in \mathbb{N}$, tel que $B(m)$ engendre B . Posons $V = B(m)$. Nous allons démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$B(m)^n \supset B(n).$$

Si on a ce résultat, alors $\omega(d_V) \geq \omega(d_{\mathcal{B}})$.

Or, d'après (a), on a $\omega(d_{\mathcal{B}}) \geq \omega(d_V)$, d'où

$$\omega(d_V) = \omega(B) = \omega(d_B) .$$

Il reste donc à démontrer (1).

Pour cela, il suffit de montrer que $B_n \subset V^n$. Alors par symétrie, on a $B_{-n} \subset V^n$, et donc

$$B(N) = \bigoplus_{n=-N}^N B_n \subset \bigoplus_{n=0}^N V^n \subset V^N .$$

Comme V engendre B , et que B_n est de dimension finie, il existe un entier $r \in \mathbb{N}$ tel que $B_n \subset V^r$. Tout b de B_n est donc somme de monômes de la forme

$$v = v_1 v_2 \dots v_s \begin{cases} v_i \text{ dans } V \text{ homogène ,} \\ s \leq r , \\ \text{le degré de } v \text{ vaut } n . \end{cases}$$

On peut supposer que $v_i v_{i+1}$ n'appartient pas à V , d'où si on note $d^0 v$ le degré de v

$$d^0 v = \sum (d^0 v_i) = n > 0 ,$$

d'où il existe un entier i entre 1 et s , tel que le degré de v_i soit strictement positif. Ceci entraîne que le degré de v_i est positif pour tout j entre 1 et s . En effet, soit $d^0 v_j \leq 0$, et $d^0 v_{j+1} > 0$, on a alors

$$|d^0 (v_j v_{j+1})| \leq \max (|d^0 v_j| |d^0 v_{j+1}|) \leq m ,$$

car v_j et v_{j+1} sont dans $B(m)$. Ce qui implique que $v_j v_{j+1}$ est dans $B(m)$, or on avait supposé le contraire. D'où, pour tout j entre 1 et s $d^0 v_j > 0$, et donc

$$n = d^0 v = d^0 v_1 + \dots + d^0 v_s \geq s ,$$

et $V^s \subset V^n$; d'où $v \in V^n$, $b \in V^n$, on a donc bien le résultat

$$B_n \subset V^n .$$

PROPOSITION 4. - Soit B une algèbre commutative de type fini graduée par des espaces de dimension finie. Soit C une sous-algèbre homogène, intègre, munie de la graduation induite C , $C = (C \cap B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. Alors $\dim C = \dim d_C$.

Démonstration. - Comme C n'a pas de diviseurs de zéro, elle ne peut pas rencontrer tous les idéaux premiers minimaux de B . Sinon, pour tout i entre 1 et m , $C \cap P_i$ contient un élément a_i non nul, d'où

$$a_1 \dots a_m \in C \cap (\bigcap P_i) = C \cap \text{Rad } B = \{0\} .$$

Or C étant intègre, le produit des a_i est non nul, ce qui est impossible. D'où il existe i tel que C ne rencontre pas P_i .

Comme les P_i sont homogènes (cf. [3], § 3, proposition 1), on peut remplacer B par B/P_i et donc, dans la suite supposer B intègre. L'algèbre graduée B se met alors sous l'une des formes suivantes :

$$(a) \quad B = B_0[X, X^{-1}] ,$$

(b) $B_i = 0$, pour tout i positif,

(c) $B_i = 0$, pour tout i négatif.

Supposons qu'on n'est ni dans le cas (b), ni dans le cas (c) et démontrons alors que $B = B_0[X, X^{-1}]$.

Soit i , le plus petit entier positif tel que B_i soit non nul, et j tel que B_{-j} soit non nul.

1° Montrons que $i = j$.

Considérons la division euclidienne de j par i

$$j = (\alpha - 1)i + (i - j') = \alpha i - j' , \text{ avec } \alpha \in \underline{\mathbb{N}} , j' \in \underline{\mathbb{N}} , j' < i .$$

On a alors,

$$B_{-j} B_{\alpha i} \subset B_{-j+\alpha i} = B_{j'} .$$

Or $B_{\alpha i}$ est non nul. En effet, si $B_{\alpha i}$ était nul, on aurait $B_i B_{(\alpha-1)i} \subset B_{\alpha i}$, d'où $B_{(\alpha-1)i} = \{0\}$, car B_i est non nul, et B est intègre. On obtient ainsi par récurrence $B_i B_i = \{0\}$, ce qui est faux, d'où $B_{\alpha i}$ est non nul, donc $B_{-j} B_{\alpha i}$ n'est pas nul, $B_{+j'}$ n'est pas nul. Ce qui signifie, puisque j' est inférieur à i , que j' est nul. $j = \alpha i$, $\alpha \in \underline{\mathbb{N}}^*$, on trouve de même $i = \beta j$, $\beta \in \underline{\mathbb{N}}^*$, d'où $i = j$.

Remarque. - B_k est non nul si, et seulement si, k est multiple de i ou de $-i$.

2° Montrons maintenant qu'il existe un X dans B_i tel que

$$B = \bigoplus_{\alpha \in \underline{\mathbb{Z}}} B_0 X^\alpha .$$

Soit a dans B_i , et a' dans B_{-i} non nuls, et notons $b = aa'$. b appartient à B_0 , et b est inversible. En effet, la dimension N de B_0 est finie, donc il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$ dans k , non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^N \lambda_i b^i = 0$, et donc, $\lambda_0 = -\sum_{i=1}^{N-1} \lambda_{i+1} b^i$. On peut supposer λ_0 non nul, sinon on recommence au rang $N - 1$ puisque B est intègre et que b est non nul.

On pose $b' = -(1/\lambda_0) \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_{i+1} b^i$.

On a $bb' = 1$, donc b est inversible dans B_0 , d'où $a(a'b') = 1$. a est donc inversible, et son inverse $a'b'$ est dans B_{-1} .

Posons alors $X = a$, et montrons le résultat.

Soit α_k , dans B_k , tel que :

si $k \neq \alpha_i$, $\forall \alpha \in \underline{\mathbb{Z}}$, alors $B_k = \{0\}$,

si $k = \alpha_i$, $\alpha_k X^{-\alpha} \in B_0$, d'où $\alpha_k \in B_0 X^\alpha$, et $B_k = B_0 X^\alpha$.

On a donc

$$B = \bigoplus_{k \in \underline{\mathbb{Z}}} B_k = \bigoplus_{\alpha \in \underline{\mathbb{Z}}} B_0 X^\alpha = B_0[X, X^{-1}] .$$

Revenons maintenant au problème initial.

(a) $B = B_0[X, X^{-1}]$, alors $B_i = B_0 X^i$, et la dimension de B_i est constante, d'où le théorème (b) et (c) : les deux démonstrations sont similaires, je suppose donc que B_i est nul pour i négatif. Les algèbres B et C sont commutatives, donc $d = \text{Dim } B - \text{Dim } C \in \mathbb{Z}$, et, d'après le lemme (3)

$$\text{Dim } C \leq \text{Dim } d_C \leq \text{Dim } d_B = \text{Dim } B,$$

d'où d est positif ou nul.

On va faire une démonstration par récurrence sur d .

$d = 0$, la proposition est vraie.

$d > 0$. Alors, il existe un p dans $\mathbb{N}$, tel que B_p possède un élément x transcendant sur C . Soit $C' = C[x]$. C' est gradué par C' , graduation induite par B , i. e. $C' = (C \cap B_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

Si on montre $\text{Dim } d_{C'} = (\text{Dim } d_C) + 1$, on aura le résultat voulu par récurrence, car alors $\text{Dim } C = (\text{Dim } C') - 1 = (\text{Dim } d_{C'}) - 1 = \text{Dim } d_C$. Montrons donc ce résultat.

$$d_{C'}(n) = \dim C'(n) = \dim \left(\bigoplus_{i=-n}^n C'_i \right).$$

Or

$$C'_i = C' \cap B_i = \bigoplus_{r+ps=i; r, s \in \mathbb{N}} C_r x^s,$$

d'où

$$\bigoplus_{0 \leq s \leq n} C(n)x^s \subseteq C'(pn) \subseteq \bigoplus_{0 \leq s \leq pn} C(pn)x^s,$$

et

$$n d_C(n) \leq d_{C'}(pn) \leq (pn + 1) d_C(pn).$$

Donc $\text{Dim } d_{C'} = 1 + \text{Dim } d_C$. On a bien le résultat.

Soit maintenant A , une algèbre munie d'une filtration croissante $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. On désigne par $\text{gr } A$, l'algèbre graduée associée et par $\text{gr } \mathcal{A}$ sa graduation, $\text{gr } \mathcal{A} = (A_i/A_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Avec ces notations on a :

PROPOSITION 5. - $\text{Dim } \text{gr } A \leq \text{Dim } A$ et $\omega(\text{gr } A) \leq \omega(A)$, si A est de type fini.

Démonstration. - Soit V un sous-espace vectoriel de A . Soit

$$\text{gr } V = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{gr}_i(V \cap A_i)$$

où gr_i est l'homomorphisme canonique de A_i dans A_{i-1} . $\text{gr } V$ engendre A si V engendre A , or $(\text{gr } V)^n \subseteq \text{gr } (V^n)$, d'où

$$\omega(\text{gr } A) \leq \omega(A), \text{ si } A \text{ est de type fini},$$

et

$\text{Dim } \text{gr } A \leq \text{Dim } A$, dans le cas général.

LEMME 4. Soit $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, une filtration telle que

$$\begin{cases} A_i \text{ soit un espace vectoriel de dimension finie,} \\ \cup A_i = A, \\ \cap A_i = \{0\}. \end{cases}$$

Alors les A_i sont presque tous nuls pour i négatif, et si on pose $d_{\mathcal{Q}}(n) = \dim A_n$, on a, pour n assez grand, $d_{\mathcal{Q}}(n) = d_{\text{gr}\mathcal{Q}}(n)$.

Démonstration. - Par définition, on a $\text{gr } \mathcal{Q} = (A_i/A_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}$, d'où

$$\begin{aligned} d_{\text{gr}\mathcal{Q}}(n) &= \dim \left(\bigoplus_{i=-n}^n (A_i/A_{i-1}) \right) \\ &= \sum_{i=-n}^n (\dim A_i - \dim A_{i-1}) = \dim A_n - \dim A_{-n-1}. \end{aligned}$$

Or les A_i sont presque tous nuls, car les A_i sont de dimension finie et décroissants.

Donc il existe un entier p , tel que pour tout n supérieur à p , on ait $A_{-n} = \{0\}$, et donc

$$d_{\text{gr}\mathcal{Q}}(n) = \dim A_n = d_{\mathcal{Q}}(n).$$

Exemple 3. - Soit A une algèbre de type fini, et V un sous-espace vectoriel de dimension finie qui engendre A . On considère alors la filtration $\mathcal{Q}$ de A telle que

$$\mathcal{Q} = (A_i)_{i \in \mathbb{Z}} \text{ avec } \begin{cases} A_i = V^i, & \text{si } i > 0, \\ A_i = \{0\}, & \text{si } i < 0. \end{cases}$$

$\mathcal{Q}$ est appelée V -filtration. Alors

$$\dim A = \dim (\text{gr } A).$$

Démonstration. - Si V engendre A , alors $(\text{gr } V)$ engendre $(\text{gr } A)$, d'où

$$\omega(\text{gr } A) = \omega(d_{\text{gr}V}),$$

et

$$\omega(A) = \omega(d_V).$$

Il faut donc montrer $\omega(d_{\text{gr}V}) = \omega(d_V)$. Or

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{Q}}(n) &= \dim A_n = \dim V^n = d_V(n), \text{ si } n \geq 0, \\ &= 0, \text{ si } n < 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_{\text{gr}\mathcal{Q}}(n) &= \dim ((\text{gr } V)^n), \text{ si } n > 0, \\ &= 0, \text{ si } n < 0. \end{aligned}$$

Le problème revient donc à montrer

$$\omega(d_{\mathcal{Q}}) = \omega(d_{\text{gr}\mathcal{Q}}).$$

Or, on est ici dans les hypothèses de lemme, d'où le résultat.

COROLLAIRE 1. - Soit g une algèbre de Lie de dimension finie, et I un idéal de

l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, alors :

$$\dim(U(\mathfrak{g})/I) = \dim(S(\mathfrak{g})/\text{gr } I),$$

où $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$, et ces dimensions sont entières.

Démonstration. - Posons $A = U(\mathfrak{g})/I$.

Soit $\bar{\mathfrak{g}}$ l'image de $\mathfrak{g}$ dans A . On considère $U(\mathfrak{g})$ muni de la $\mathfrak{g}$ -filtration, et A muni de la $\bar{\mathfrak{g}}$ -filtration. Alors

$$\text{gr } U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}),$$

et $\dim A = \dim \text{gr } A$ d'après l'exemple 3. Donc

$$\dim(U(\mathfrak{g})/I) = \dim(S(\mathfrak{g})/\text{gr } I),$$

et ces dimensions sont entières, car $\text{gr } A$ est commutative.

COROLLAIRE 2. - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie, alors

$$\dim U(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}.$$

Démonstration. - On applique le corollaire 1 avec $I = \{0\}$. Et

$$\dim S(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g}.$$

PROPOSITION 6. - Sous les mêmes hypothèses que dans le lemme 4, et si $\text{gr } A$ est de type fini, alors

$$\omega(\text{gr } A) = \omega(A) = \omega(d_{\mathcal{A}}),$$

$$\dim \text{gr } A = \dim A = \dim d_{\mathcal{A}}.$$

Démonstration. - Soit V un espace vectoriel de dimension finie, inclus dans A . Alors, il existe un entier p tel que $V \subset A_p$ et $A_i = 0$ pour $i < -p$. On a alors $V^n \subset A_{pn}$, d'où

$$d_V(n) \leq d_{\mathcal{A}}(pn)$$

et

$$\omega(A) \leq \omega(d_{\mathcal{A}}).$$

Or, on a vu dans la proposition 5 que $\omega(\text{gr } A) \leq \omega(A)$, d'où,

$$\omega(\text{gr } A) \leq \omega(A) \leq \omega(d_{\mathcal{A}}),$$

et, d'après le lemme 3,

$$\omega(\text{gr } A) = \omega(d_{\text{gr } \mathcal{A}})$$

car $\text{gr } A$ est de type fini et, d'après le lemme 4,

$$\omega(d_{\text{gr } \mathcal{A}}) = \omega(d_{\mathcal{A}}).$$

D'où on a

$$\omega(\text{gr } A) = \omega(A) = \omega(d_{\mathcal{A}})$$

et

$$\dim \operatorname{gr} A = \dim A = \dim d_{\mathcal{Q}} .$$

PROPOSITION 7. - Soit une algèbre A vérifiant toujours les hypothèses du lemme 4, et, de plus, telle que $\operatorname{gr} A$ soit de type fini et commutative. Si A' est une sous-algèbre de A, telle que $\operatorname{gr} A'$ soit intègre, on désigne par $\mathcal{Q}' = (A' \cap A_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ la filtration induite sur A' , et on a alors

$$\dim \operatorname{gr} A' = \dim A' = \dim d_{\mathcal{Q}'} .$$

Démonstration. - Pour les mêmes raisons que dans la proposition 6, on a

$$\dim \operatorname{gr} A' \leq \dim A' \leq \dim d_{\mathcal{Q}'} .$$

Mais ici, d'après le lemme 4,

$$d_{\mathcal{Q}'} = d_{\operatorname{gr} \mathcal{Q}'} ,$$

et, d'après la proposition 4,

$$\dim d_{\operatorname{gr} \mathcal{Q}'} = \dim \operatorname{gr} A' .$$

D'où on a le résultat.

IV Dimension de Gel'fand-Kirillov d'anneaux de fractions.

PROPOSITION 8. - Soient A une algèbre, et S une partie multiplicative, commutative, de non-diviseurs de zéro de A. On suppose de plus que S est engendré par des éléments x tel que $\partial_x (a \mapsto ax - xa)$ soit une dérivation localement nilpotente, alors :

(a) S est un domaine de Ore à droite et à gauche,

(b) $\dim S^{-1} A = \dim A$.

Démonstration.

(a) Ce résultat provient directement des deux théorèmes suivants [2].

THÉORÈME 1. - Les parties multiplicatives engendrées par une réunion de parties de Ore est une partie de Ore.

THÉORÈME 2. - Si ∂_x est localement nilpotente, alors $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ est une partie de Ore.

(b) Il suffit de montrer $\dim S^{-1} A \leq \dim A$, l'inégalité inverse étant évidente. Soit W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $S^{-1} A$, contenant 1. Alors, il existe un s dans S tel que $sW \subset A$, et s est dans S, donc de la forme

$$s = x_1 \dots x_r , \text{ avec } \begin{cases} x_i \in S , \\ \partial_{x_i} \text{ localement nilpotente.} \end{cases}$$

Soit T la partie multiplicative engendrée par $\{x_2, \dots, x_r\}$. T est pour les mêmes raisons que S , un domaine de Ore. Et on pose

$$B = T^{-1} A \quad \text{et} \quad x = x_1.$$

Comme S est commutatif, x définit une dérivation localement nilpotente sur B , car

$$\partial_x^i(t^{-1} a) = t^{-1} \partial_x^i(a).$$

Et alors, si on montre que $\dim P^{-1} B = \dim B$ avec $P = \{1, x, x^2, \dots\}$ on aura le résultat par récurrence sur r .

Supposons donc maintenant

$$\begin{cases} r = 1, \\ x = x_1 = s, \end{cases}$$

et posons $V = xW \subset A$.

On obtient par récurrence, pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout v dans V ,

$$(2) \quad x^{-1} v = \sum_{i=0}^m (\partial_x^i v) x^{-i-1} + x^{-1} (\partial_x^{m+1} v) x^{-m-1},$$

et comme ∂_x est nilpotent, il existe un entier m tel que $\partial_x^{m+1} v = 0$

$$x^{-1} v = \sum_{i=0}^m (\partial_x^i v) x^{-i-1}.$$

D'où

$$x^{-1} V \subset Vx^{-1} + Vx^{-2} + \dots + Vx^{-m},$$

et de même

$$x^{-s} V \subset Vx^{-s} + \dots + Vx^{-s-m+s}.$$

On obtient ce résultat par récurrence sur s dans la formule 2, et donc

$$x^{-s_1} V x^{-s_2} V \dots x^{-s_r} V \subset V^r x^{-s} + V^r x^{-s-1} + \dots + V^r x^{-s-rm+r}$$

si $s = s_1 + \dots + s_r$. On a donc

$$W^n = (x^{-1} V)^n \subset V^n x^{-n} + \dots + V^n x^{-nm}$$

et

$$\begin{aligned} W^n &\subset (V^n x^{nm-n} + \dots + V^n) x^{-nm} \\ &\subset V^{nm} x^{-nm}. \end{aligned}$$

D'où on a bien $d_W(n) \leq d_V(nm)$, donc $\omega(d_W) \leq \omega(d_V)$, d'où

$$\dim S^{-1} A \leq \dim A.$$

Définition 7.—Le degré de transcendance, $T \deg A$, d'une algèbre A , est défini par

$$T \deg A = \sup_V (\inf_b \dim k[bV]),$$

avec b parcourant l'ensemble des non-diviseurs de zéro de A , et V l'ensemble

des sous-espaces vectoriels de dimension finie de A .

PROPOSITION 9. - Soit g , une algèbre de Lie, de dimension finie, et A une sous-algèbre d'une algèbre quotient de $U(g)$, la g -filtration naturelle de $U(g)$ induit une filtration sur A . Alors, si $\text{gr } A$ n'a pas de diviseurs de zéros

- (a) A possède un corps de fractions $Q(A)$ à gauche et à droite,
- (b) $T \deg Q(A) = T \deg A = \text{Dim } A$,
- (c) $T \deg S^{-1} A = T \deg A$ pour tout domaine de Ore S de A .

Démonstration. - Si $\text{gr } A$ n'a pas de diviseurs de zéro, alors A n'en a pas non plus.

(a) L'existence de $Q(A)$ sera démontré dans la proposition 10 car

$$\text{Dim } A \leq \text{Dim } U(g) = \dim g < \infty.$$

(b) et (c) On va d'abord montrer que si $Q(A)$ est le corps des fractions de A : on a

$$T \deg Q(A) \leq T \deg A.$$

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de $Q(A)$. Alors, il existe un x de A , tel que $W = xV \subset A$. Alors

$$\begin{aligned} \inf_{b \in A - \{0\}} \text{Dim } k[bV] &= \inf_{b \in A - \{0\}} \text{Dim } k[(b/x)W] \\ &\leq \inf_{c \in A - \{0\}} \text{Dim } k[cW], \end{aligned}$$

d'où

$$T \deg Q(A) \leq T \deg A.$$

De plus on a l'inégalité suivante

$$T \deg A \leq \text{Dim } A.$$

Or $Q(A)$ est aussi le corps des fractions de $S^{-1} A$, on a donc

$$T \deg Q(A) \leq T \deg S^{-1} A \leq \text{Dim } A.$$

Pour montrer (b) et (c), il reste donc à montrer

$$T \deg Q(A) \geq \text{Dim } A.$$

Or l'algèbre intègre $\text{gr } A$ est commutative en tant qu'image par un homomorphisme d'une sous-algèbre de $S(g)$, l'algèbre symétrique de g , et $Q(A)$ possède une filtration $(Q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$, définie par, [4], si $\xi \in Q(A)$, $\xi = a^{-1} b$ avec $a \in A$, $b \in A$.

Le degré de ξ est $d^0 \xi = d^0 b - d^0 a$.

Q_i est égal au sous-espace engendré par les ξ dans $Q(A)$, qui sont de degré inférieur ou égal à i .

Cette filtration vérifie $\begin{cases} Q_i \cap A = A_i, \\ \text{gr } (Q(A)) \subseteq Q(\text{gr } A). \end{cases}$

Soit, alors, V un sous-espace vectoriel de dimension finie, de $Q(A)$, et b un élément de $Q(A)$, de degré exactement i .

On a alors

$$\bar{b} \text{ gr } (V) \subset \text{gr } (bV), \text{ si } \bar{b} = \text{gr}_i(b) \in \text{gr } (Q(A)) = Q(\text{gr } A).$$

D'où

$$\text{gr } ((bV)^n) \supset (\text{gr } (bV))^n \supset (\bar{b} \text{ gr } V)^n = \bar{b}^n (\text{gr } V)^n,$$

et donc

$$\begin{aligned} d_{bV}(n) &= \dim (k + bV)^n \\ &\geq \dim (bV)^n \\ &\geq \dim (\text{gr } (bV))^n \\ &\geq \dim (\bar{b}^n (\text{gr } V)^n) = \dim (\text{gr } V)^n, \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant vraie car $\bar{b}$ n'est pas diviseur de zéro.

Soit donc W un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\text{gr } A$. Il existe un sous-espace vectoriel V de A , tel que $\text{gr } V = W$ et $\inf_b (\dim k[bV] \geq \dim k[W])$, ceci d'après les inégalités précédentes.

D'où

$$T \deg Q(A) \geq \dim \text{gr } A.$$

Or, d'après la proposition 7,

$$\dim \text{gr } A = \dim A.$$

D'où le résultat.

PROPOSITION 10. - Soit A une algèbre intègre, telle que $\omega(A) < e_1$. Alors A possède un corps des fractions à droite et à gauche.

Démonstration. - Si la condition de Ore n'était pas vérifiée, il existerait x et y , non nuls, dans A , tels que, $Ax \cap Ay = \{0\}$. Alors $k[x, y]$ serait une algèbre libre, incluse dans A .

En effet, soit φ l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} k[X, Y] &\longrightarrow k[x, y] \\ p &\longrightarrow p(x, y) \end{aligned}$$

où $k[X, Y]$ est l'algèbre libre en deux variables.

φ est de façon évidente surjective.

φ est injective. Cherchons le noyau, $\text{Ker } \varphi$, de φ .

Soit p dans $k[X, Y]$, tel que $p(x, y) = 0$. p s'écrit

$$p = \sum_{i=1}^{n_0} a_i M_i,$$

avec a_i appartenant à k , et M_i un monôme de degré quelconque.

$$p(x, y) = \sum a_i M_i(x, y) = 0.$$

On divise $\sum a_i M_i(x, y)$, à droite par x ou y , jusqu'à ce que l'on obtienne des monômes "se terminant" par x , et d'autres "se terminant" par y (on multiplie à gauche par x^α , avec α dans $\mathbb{N}$, pour éliminer les termes constants). On obtient ainsi

$$[\sum_{i=0}^{n_1} a_i N_i(x, y)]x + [\sum_{i=0}^{n_2} a_i' N_i'(x, y)]y = 0.$$

Or $Ax \cap Ay = \{0\}$, d'où

$$\sum_{i=0}^{n_1} a_i N_i(x, y) = 0, \quad n_1 < n$$

$$\sum_{i=0}^{n_2} a_i' N_i'(x, y) = 0, \quad n_2 < n.$$

Et en réitérant ce procédé, on obtient $\sum_{i=0}^0 a_i M_i(x, y) = 0$, $aM(x, y) = 0$, d'où $a = 0$, et donc $p(x, y) = 0 \implies p = 0$.

Donc $k[x, y]$ est une algèbre libre.

Or $\omega(k[x, y]) = e_1$, et $k[x, y] \subseteq A$, donc $\omega(B) \geq e_1$, et on a le résultat.

PROPOSITION 11. - Soient A , une algèbre intègre de dimension de Gel'fand-Kirillov finie, et B une sous-algèbre de A de même dimension de Gel'fand-Kirillov, alors :

(a) Si $\dot{B} = B - \{0\}$, $\dot{B}$ est un domaine de Ore à droite et à gauche,

(b) Si A est de type fini, l'anneau des fractions, $\dot{B}^{-1}A$, de A est de dimension finie en tant qu'espace vectoriel à droite et à gauche sur le corps K des fractions de B ,

(c) Sous les mêmes hypothèses que dans (b), $\dot{B}^{-1}A$ est égal au corps des fractions de A .

Démonstration.

(a) On suppose que la condition de Ore n'est pas vérifiée. Alors il existe x dans $\dot{B}$, et y dans A tel que $By \cap Ax = \{0\}$. Alors $By + Ax$ est une somme directe, et comme la multiplication à droite par x est injective, $Byx + Ax^2$ est aussi une somme directe.

Or $Byx + Ax^2 \subseteq Ax$, donc $(Byx + Ax^2) \cap By = \{0\}$, d'où $By + Byx + Ax^2$ est aussi une somme directe, et par récurrence, $By + Byx + Byx^2 + \dots$, est aussi une somme directe.

Soit alors W un sous-espace vectoriel de dimension finie de B , contenant 1 , et V un sous-espace de A , tel que $V = W + kx + ky$.

On a alors

$$V^{2n} \supseteq W^n(kx + ky)^n,$$

et donc

$$V^{2n} \supseteq W^n yx + W^n yx^2 + \dots + W^n yx^{n-1}.$$

D'où

$$d_V(2n) \geq nd_W(n) ,$$

car la somme dans le 2nd membre est directe, et $\dim A \geq 1 + \dim B$. Ce qui est faux ici, d'où la condition de Ore est remplie.

(b) Soit maintenant A de type fini, et V un espace vectoriel de dimension finie qui engendre A . Le corps K des fractions de B , existe, d'après (a), et $K = \dot{B}^{-1} A$.

Soit $r(n) = \dim_K KV^n$, où KV^n est le K -espace vectoriel engendré par V^n , ces K -sous-espaces vectoriels de $\dot{B}^{-1} A (= KA)$, recouvrent KA , car les V^n recouvrent A . On a donc deux possibilités.

1° Il existe un entier n , tel que $A = KV^n$, le résultat est alors démontré.

2° La suite $(r(n))$ est strictement croissante. Soit dans ce cas $(e_1, \dots, e_{r(n)})$ une base de KV^n , tel que e_i soit dans V^n pour tout i , et W un sous-espace vectoriel de dimension finie de B . On a alors :

$$(W + V)^{2n} \supseteq W^n V^n \supseteq W^n e_1 + \dots + W^n e_{r(n)} .$$

Comme les (e_i) forment un système libre sur k

$$\dim (W + V)^{2n} \geq r(n) \dim W^n \geq n \dim W^n ,$$

d'où $\dim A \geq 1 + \dim B$ ce qui est faux : on est toujours dans le cas (a), d'où le résultat.

(c) Montrons que KA est un corps, ce sera alors le corps des fractions $Q(A)$ de A , puisque KA est inclus dans $Q(A)$. Soit x un élément de KA .

La multiplication à gauche, ou à droite, par x est une application K -linéaire, injective car A est intègre, de KA . Comme KA est de dimension finie sur K , cette application est bijective. D'où 1 a un antécédent. Il existe y dans KA tel que $1 = xy$, et il existe y' dans KA tel que $1 = y'x$. Donc x est inversible à droite et à gauche, donc inversible et KA est un corps.

Donc $\dot{B}^{-1} A$ est le corps des fractions de A .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOHRO (W.) und KRAFT (H.). - Über die Gel'fand-Kirillov-Dimension, Math. Annalen t. 220, 1976, p. 1-24.
- [2] BOHRO (W.) und RENTSCHLER (R.). - Oresche Teilmengen in Einhüllenden Algebren, Math. Annalen, t. 217, 1975, p. 201-210.
- [3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative. Chap. 3-4. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).
- [4] JOSEPH (A.). - Sur les algèbres de Weyl, cours à l'Université Paris-VI, 1974.