

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

ALEX ROSENBERG

La dimension globale d'extensions d'Ore

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. n° 3, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A3_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA DIMENSION GLOBALE D'EXTENSIONS D'ORE

par Alex ROSENBERG

Soit k un corps. En 1962, G. RINEHART a démontré que $\text{gl. dim } k[x, y]$ avec $xy - yx = 1$ est 1 si la caractéristique de k est 0, et 2 si la caractéristique est $p \neq 0$. Puis, il a aussi démontré que, si on écrit

$$A_n(k) = k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] \text{ avec } x_i y_j - y_j x_i = \delta_{ij},$$

on a

$$\text{gl. dim } A_n(k) = 2n$$

si la caractéristique de k est $p \neq 0$, et

$$n \leq \text{gl. dim } A_n(k) \leq 2n - 1$$

si k est de caractéristique 0. C'est seulement en 1972 que ROOS a réussi à montrer que dans ce dernier cas, $\text{gl. dim } A_n(k) = n$. On peut donc se demander quelle est la dimension globale de $A_n(R)$ pour R , un anneau quelconque. Notons

$$D_n(R) = 1. \text{ gl. dim } A_n(R) - 1. \text{ gl. dim } A_{n-1}(R).$$

Alors on a le théorème suivant :

THÉORÈME (RINEHART et ROSENBERG).

1° On a $D_n(R) = 1$ ou 2,

2° Soit R un anneau noetherien, à gauche et à droite, avec $\text{gl. dim } R = d < \infty$. Alors, $D_1(R) = 2$ si, et seulement si, il existe un module à gauche M sur $A_1(R)$ de type fini sur R , avec $\text{hd}_R M = d$.

3° Maintenant, soit de plus R un anneau commutatif, et notons par m le maximum des dimensions homologiques des R -modules cycliques qui sont en même temps des groupes de torsion (On prend $m = -\infty$ si R contient $\mathbb{Q}$). Alors

(a) Si R est une $\mathbb{Q}$ -algèbre, $\text{gl. dim } A_n(R) = d + n$.

(b) $D_n(R) = 1$ pour $n \leq d - m$ et $D_n(R) = 2$ pour $n > d - m$.

Le cas R commutatif a aussi été prouvé par K. GOODEARL par des méthodes différentes. En général, si $\{a_n\}$ est une suite avec $a_n = 1$ ou 2 mais finalement constante, il existe un anneau R tel que $D_n(R) = a_n$. Quand on démontre le théorème, on étudie les extensions d'Ore, c'est à dire :

Soient R un anneau, D une dérivation de R

$$D(r_1 + r_2) = D(r_1) + D(r_2), \quad D(r_1 r_2) = D(r_1)r_2 + r_1 D(r_2)$$

et $S = R[t]$, l'anneau des polynômes en t comme groupe additif, avec la multiplication donnée par la règle $rt = tr + D(r)$, et la multiplication usuelle entre les

éléments de R et les puissances de t . HOCHSCHILD et FIELDS ont démontré, vers 1960, que

$$l. gl. dim S = l. gl. dim R \text{ ou bien } l. gl. dim R + 1 ,$$

résultat pas tout-à-fait vrai, car GOODEARL a donné un exemple d'un anneau commutatif avec $gl. dim R = \infty$, mais $gl. dim S = 1$!

Mais en tous cas, c'est vrai si $l. gl. dim R = d < \infty$.

On a le théorème suivant :

THÉORÈME (RINEHART, STAFFORD, ROSENBERG). - Soit R un anneau noethérien à gauche et à droite avec $gl. dim R = d < \infty$. Alors $gl. dim S = d + 1$ si, et seulement si, il existe un S -module à gauche M , de type fini sur R , avec $hd_R M = d$.

C'est seulement dans le cas commutatif, que nous pouvons donner des critères dans l'anneau même.

THÉORÈME (GOODEARL, STAFFORD et ROSENBERG). - Soit R noethérien commutatif et $gl. dim R = d < \infty$. Alors $gl. dim S = d + 1$ si, et seulement si, il existe un idéal maximum $\mathfrak{M}$ de R , avec $hd_R \mathfrak{M} = d - 1$ et, ou bien $D\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$, ou bien la caractéristique de R n'est pas nulle.

J'ignore si l'hypothèse, que les anneaux soient noethériens, est nécessaire pour la validité des théorèmes.

Alex ROSENBERG
Dept of Mathematics
Cornell University
ITHACA, N. Y. 14853
(États-Unis)
