

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THOMAS S. BLYTH

Demi-groupes orthodoxes scindés

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. n° 20, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A20_0

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEMI-GROUPES ORTHODOXES SCINDÉS

par Thomas S. BLYTH

Soit S un demi-groupe orthodoxe (c'est-à-dire, un demi-groupe régulier dont les idempotents constituent un sous-demi-groupe), et soit y la congruence la plus fine sur S telle que le demi-groupe S/y soit un demi-groupe inverse. Nous considérons les demi-groupes orthodoxes S pour lesquels, étant donné l'homomorphisme canonique $\eta: S \rightarrow S/y$, il existe un homomorphisme $\pi: S/y \rightarrow S$ tel que $\pi\eta = \text{id}_{S/y}$. Lorsqu'il en est ainsi, nous dirons que S est scindé (en anglais, "split"). Il est clair que S est scindé si, et seulement si, S contient un sous-demi-groupe inverse qui rencontre, une fois et une fois seulement, chaque classe modulo y .

Considérons d'abord le cas d'une bande. Dans ce cas y coïncide avec la relation $\mathcal{Q}$ de Green.

Définition. - Soit $B = \cup\{B_\alpha; \alpha \in Y\}$ une bande ayant Y comme demi-treillis de structure, et comme $\mathcal{Q}$ -classes les bandes rectangulaires B_α . Appelons squelette de B un sous-ensemble $E = \{x_\alpha; \alpha \in Y\}$ tel que $x_\alpha \in B_\alpha$ et $x_\alpha x_\beta = x_{\alpha\beta} = x_\beta x_\alpha$, quels que soient $\alpha, \beta \in Y$.

LEMME 1. - Une bande B est scindée si, et seulement si, elle admet un squelette.
Si B est scindé par $\pi: B/\mathcal{Q} \rightarrow B$ alors $\text{Im } \pi$ est un squelette de B .

Or il est clair que si T est un demi-groupe orthodoxe scindé, alors la bande B des idempotents de T est aussi scindée. Soit E un squelette de B , et appelons portée (en anglais "span") de E l'ensemble

$$S_p(E) = \{a \in T; (\exists e, f \in E) e \mathcal{R} a \mathcal{L} f\}.$$

Utilisant les résultats connus suivants :

1° dans un demi-groupe orthodoxe T la relation y est donnée par

$$a y b \implies V(a) = V(b),$$

où $V(a)$ signifie l'ensemble des inverses de a ,

2° la restriction de y à la bande B des idempotents de T est $\mathcal{Q}$,

3° y est "déterminé par les idempotents" (c'est-à-dire, si $a y b$ avec $b \in B$, alors $a \in B$),

4° dans chaque $\mathcal{Q}$ -classe (bande rectangulaire) de B , on a l'identité $x y z = xz$,

5° $y \cap \mathcal{K}$ se réduit à l'égalité,

on peut montrer que l'ensemble $S_p(E)$ rencontre, une fois et une fois seulement, chaque classe modulo y . D'ailleurs, si $a \in S_p(E)$ avec $e \mathcal{R} a \mathcal{L} f$ où $e, f \in E$,

et si $a' \in V(a)$, alors nous avons $a^0 = fa'e \in V(a)$ avec $f \in a^0 \mathcal{E} e$, d'où $a^0 \in S_p(E)$ et est l'unique inverse de a dans $S_p(E)$. Nous le noterons a^{-1} . Remarquons aussi que $e, f \in E$ sont déterminés de manière unique par a . En effet, $e = aa^{-1}$ et $f = a^{-1}a$.

THÉOREME 1. - Soit T un demi-groupe orthodoxe dont la bande B des idempotents possède un squelette E . Les conditions suivantes sont alors équivalentes :

1° il y a un sous-demi-groupe inverse S de T qui rencontre chaque classe modulo y une fois, et une fois seulement, et qui admet E comme demi-treillis des idempotents,

2° $aE^{-1}a \in E$ quel que soit $a \in S_p(E)$,

3° $S_p(E)$ est un sous-demi-groupe de T .

Lorsque la condition (1) s'obtient, alors nécessairement $S = S_p(E)$.

Dans le cas où la bande B des idempotents est normale (c'est-à-dire, $efgh = egfh$ quels que soient $e, f, g, h \in B$), nous pouvons utiliser le théorème précédent pour démontrer le résultat suivant.

THÉOREME 2. - Soit T un demi-groupe orthodoxe dont la bande B des idempotents est normale. Alors T est scindé si, et seulement si, B est scindé. En particulier, T est scindé lorsque T/y a un élément neutre.

D'autres exemples de demi-groupes orthodoxes scindés sont fournis par les résultats suivants.

THÉOREME 3. - Si T est orthodoxe et T/y est bicyclique, alors T est scindé.

THÉOREME 4. - Si B est une bande presque commutative (c'est-à-dire quels que soient $e, f \in B$, ou bien $ef = fe$ ou bien $e \mathcal{O} f$), alors B est scindé.

Passons maintenant à la considération de la structure des demi-groupes orthodoxes scindés. Nous décrivons d'abord une méthode à construire un tel demi-groupe.

Soit B une bande scindée, et soit E un squelette de B . Soit T_B l'ensemble des isomorphismes θ entre les sous-bandes de B de la forme eBe , où $e \in E$, tels que E soit stable par rapport à θ dans le sens que

$$(\forall f \in \mathcal{O} \text{om } \theta) \quad f\theta \in E \iff f \in E.$$

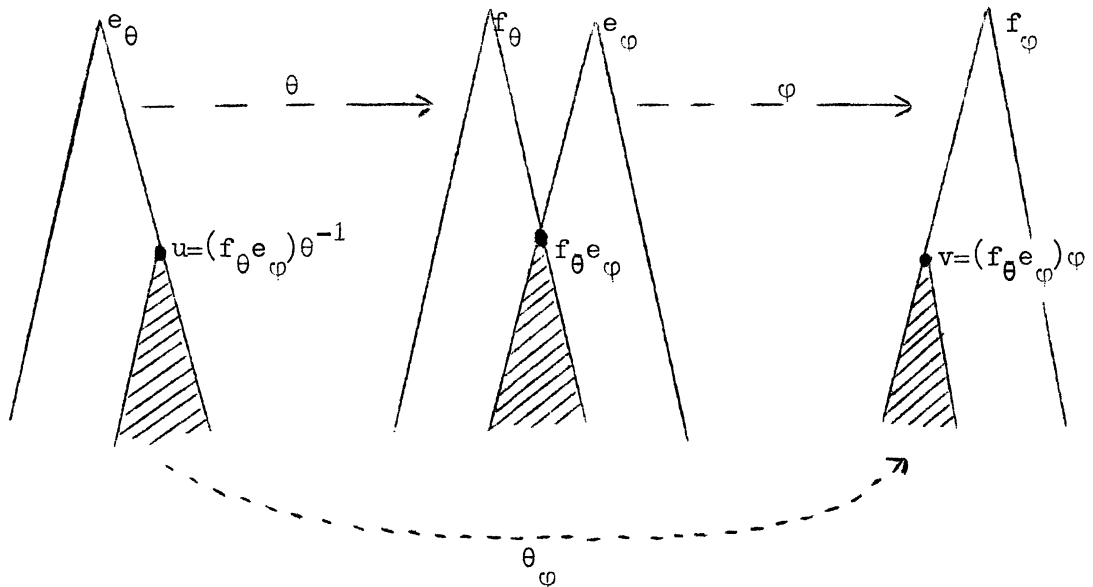
Il est clair que T_B est une génération de la notion correspondante T_E introduite par W. D. MUNN. Nous composons les éléments de T_B de la manière suivante. Etant donnés $\theta, \varphi \in T_B$, tels que

$$\theta : e_\theta Be_\theta \rightarrow f_\theta Bf_\theta \quad \text{et} \quad \varphi : e_\varphi Be_\varphi \rightarrow f_\varphi Bf_\varphi.$$

Nous définissons θ_φ comme l'isomorphisme dont le domaine est uBu , où $u = (f_\theta e_\varphi)\theta^{-1} \in E$, et le codomaine est vBv où $v = (f_\theta e_\varphi)\varphi \in E$, et $x(\theta_\varphi) = (x\theta)\varphi$ quel que soit $x \in \mathcal{O} \text{om } \theta_\varphi$. Or, l'ordre naturel sur B est donné par

$$f \leq e \iff fe = ef = f \iff f = efe \iff f \in eBe .$$

Par rapport à cet ordre naturel, la définition précédente de θ peut être représentée par le diagramme suivant :



Avec la notation précédente, nous voyons alors que

$$e_{\theta\phi} = u = (f_{\theta} e_{\phi})^{-1} \quad \text{et} \quad f_{\theta\phi} = v = (f_{\theta} e_{\phi})_{\phi}$$

LEMME 2. - T_B est un demi-groupe inverse.

Nous trouverons très commode d'étendre chaque $\theta \in T_B$ à une application $\bar{\theta} : B \rightarrow B$, donnée par $b\bar{\theta} = (e_{\theta} b e_{\theta})\theta$ quel que soit $b \in B$. Quoique $\bar{\theta}$ n'est pas en général un homomorphisme, nous avons la propriété suivante.

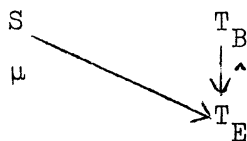
LEMME 3. - $\forall \theta, \phi \in T_B, \quad \overline{\theta\phi} = \bar{\theta}\bar{\phi}$.

Etant donné $\theta \in T_B$, disons $\theta : e_{\theta} B e_{\theta} \rightarrow f_{\theta} B f_{\theta}$. Il est clair que $E \cap \text{Dom } \theta = e_{\theta} E$ et $E \text{ Cod } \theta = f_{\theta} E$. D'ailleurs, il y a un isomorphisme

$$\hat{\theta} : e_{\theta} E \rightarrow f_{\theta} E \quad \text{donné par} \quad x\hat{\theta} = x\theta \quad \text{quel que soit} \quad x \in e_{\theta} E .$$

l'application $\hat{\cdot} : T_B \rightarrow T_E$ donnée par $\hat{\cdot} : \theta \mapsto \hat{\theta}$ est alors un homomorphisme.

Soit maintenant S un demi-groupe inverse dont le demi-treillis des idempotents est E et considérons le diagramme



dans lequel l'application $\mu : S \rightarrow T_E$, décrite par $\mu : a \rightarrow \mu_a$, est l'homomorphisme de Munn, de sorte que $e\mu_a = a^{-1}ea$ quel que soit $e \in \text{Dom } \mu_a = aa^{-1}E$.

Un homomorphisme $\theta : S \rightarrow T_B$ qui complète ce diagramme d'une manière commutative sera appelé triangulation de l'homomorphisme de Munn.

Le résultat suivant, quoique d'un caractère très technique, est fondamental à la

discussion qui suivra.

LEMME 4. - Soit S un demi-groupe inverse dont le demi-treillis des idempotents est E , et soit B une bande scindée dont E est un squelette. Pour chaque $a \in S$, soit $a_e \in E$ le domaine de μ_a (de sorte que $e_a = aa^{-1}$), et soit $f_a \in E$ le codomaine de μ_a (de sorte que $f_a = a^{-1}a$). Soit θ une triangulation de μ . Alors, étant donnés $a, b \in S$ et $e, f, u, v \in B$ tels que $e \mathcal{L} e_a$, $f \mathcal{R} f_a$, $u \mathcal{L} e_b$, et $v \mathcal{R} f_b$, nous avons

$$e(fu)\bar{\theta}_a^{-1} \mathcal{L} e_{ab} \quad \text{et} \quad (fu)\bar{\theta}_b v \mathcal{R} f_{ab}.$$

COROLLAIRE. - Si

$$W = W(B, S, \theta) = \{(e, a, f) \in B \times S \times B; e \mathcal{L} e_a, f \mathcal{R} f_a\}$$

alors la formule

$$(e, a, f)(u, b, v) = (e(fu)\bar{\theta}_a^{-1}, ab, (fu)\bar{\theta}_b v)$$

décrit une loi de composition sur W .

Concernant cette loi de composition sur W , nous avons les résultats suivants dont les démonstrations sont assez difficiles.

THÉOREME 5. - $W(B, S, \theta)$ est un demi-groupe orthodoxe dont la bande des idempotents est isomorphe à B .

THÉOREME 6. - Le demi-groupe orthodoxe $W = W(B, S, \theta)$ est scindé, et $W/y \simeq S$.

Le résultat suivant montre que tout demi-groupe orthodoxe scindé s'obtient de la manière précédente. Plus précisément nous avons le théorème suivant.

THÉOREME 7. - Soit T un demi-groupe orthodoxe scindé dont B est la bande des idempotents. Si T est scindé par un homomorphisme $\pi : T/y \rightarrow T$, alors l'ensemble $E = B \cap \text{Im } \pi$ des idempotents de $\text{Im } \pi$ est un squelette de B , et $S_p(E) = \text{Im } \pi$. D'ailleurs, si l'application $\theta : \text{Im } \pi \rightarrow T_B$ est donnée par $a\theta = \theta_a$ où le domaine de θ_a est $aa^{-1}Baa^{-1}$, le codomaine de θ_a est $a^{-1}aBa^{-1}a$, et $b\theta_a = a^{-1}ba$, alors θ est une triangulation de $\mu : \text{Im } \pi \rightarrow T_E$ et

$$T \simeq W(B, \text{Im } \pi, \theta).$$

Démonstration. - $\text{Im } \pi$ est un sous-demi-groupe inverse de T qui rencontre chaque module y une fois, et une fois seulement. Donc $E = B \cap \text{Im } \pi$ rencontre chaque $\mathcal{O}$ -classe de B une fois, et une fois seulement, et est ainsi un squelette de B . Puisque E est le demi-treillis des idempotents de $\text{Im } \pi$ nous avons, d'après un résultat précédent, $\text{Im } \pi = S_p(E)$.

Étant donné $a \in \text{Im } \pi$, soient $e_a = aa^{-1}$, $f_a = a^{-1}a$, et soit

$$\theta : e_a B e_a \rightarrow f_a B f_a$$

l'application donnée par $b\theta_a = a^{-1}ba$. Il est facile de démontrer que θ_a est un

isomorphisme. L'application $\theta : \text{Im } \pi \longrightarrow T_B$ donnée par $\theta(a) = \theta_a$ est alors un homomorphisme et une triangulation de μ . Nous pourrions alors construire le demi-groupe orthodoxe scindé $W = W(B, \text{Im } \pi, \theta)$.

Considérons maintenant l'application $\psi : W \longrightarrow T$ donnée par $(e, a, f)\psi = eaf$. Etant donnés $(e, a, f), (u, b, v) \in W$ nous avons

$$\begin{aligned} [(e, a, f)(u, b, v)]\psi &= (e(fu)\bar{\theta}_{a^{-1}}, ab, (fu)\bar{\theta}_b v)\psi \\ &= e(fu)\bar{\theta}_{a^{-1}}, ab, (fu)\bar{\theta}_b v \\ &= e(f_a fuf_a)\bar{\theta}_{a^{-1}} ab(e_b fue_b)\bar{\theta}_b v \\ &= eaf_a fuf_a a^{-1} abb^{-1} e_b fue_b bv \\ &= eafua^{-1} abb^{-1} fubv \\ &= eafubbb^{-1} a^{-1} afubv \\ &= eafufubv, \text{ puisque } u\bar{f}e_b = bb^{-1}, f\bar{R}f_a = a^{-1}a \\ &= eafubv, \text{ puisque } fufu = fu \\ &= (e, a, f)\psi(u, b, v)\psi. \end{aligned}$$

Ainsi nous voyons que ψ est un homomorphisme.

Notons maintenant que

$$\begin{aligned} eaf, a, eaf &= eafa^{-1}a, a^{-1}, aa^{-1}eaf \\ &= eaa^{-1}a, a^{-1}, aa^{-1}af, \text{ puisque } f\bar{R}f_a = a^{-1}a, e\bar{L}e_a = aa^{-1} \\ &= eaf \end{aligned}$$

et d'une façon analogue,

$$a^{-1}, eaf, a^{-1} = a^{-1}, aa^{-1}eafa^{-1}a, a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

Par conséquent, la classe de x modulo y étant notée y_x , nous avons $y_{eaf} \pi = a$.

Supposons alors que $(e, a, f)\psi = (u, b, v)\psi$. Nous avons $eaf = ubv$, donc $a = y_{eaf} \pi = y_{ubv} \pi = b$, d'où

$$f = f_a f = a^{-1}af = a^{-1}aa^{-1}eaf = b^{-1}bb^{-1}ubv = b^{-1}bv = v$$

et, d'une façon analogue, $e = u$. Ainsi l'application ψ est injective.

Pour chaque $x \in T$, soit maintenant $\tilde{x} = y_x \pi$. Il est facile de voir que $\tilde{x}^{-1}$ est un inverse de x dans T . Par conséquent, $\tilde{x}\tilde{x}^{-1} = \tilde{x}\tilde{x}^{-1} = x\tilde{x}^{-1}$ et $\tilde{x}\tilde{x}^{-1} = \tilde{x}\tilde{x}^{-1} = \tilde{x}\tilde{x}^{-1}$, d'où $\tilde{x}\tilde{x}^{-1} \in e_{\tilde{x}} = \tilde{x}\tilde{x}^{-1}$ et, d'une façon analogue, $\tilde{x}^{-1}x \in \tilde{x}^{-1}\tilde{x}$. Alors puisque $x = \tilde{x}\tilde{x}^{-1}x = \tilde{x}\tilde{x}^{-1}\tilde{x}\tilde{x}^{-1}x$ il s'ensuit que $(\tilde{x}\tilde{x}^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}^{-1}x) \in N$ avec $(\tilde{x}\tilde{x}^{-1}, \tilde{x}, \tilde{x}^{-1}x)\psi = x$, d'où l'application ψ est aussi surjective.

Les résultats précédents ont des analogues pour les demi-groupes orthodoxes ordonnés. Un tel demi-groupe est appelé scindé si

1° T/y peut être ordonné tel que $\tau : T \longrightarrow T/y$ soit isotone,

2° il y a un homomorphisme isotone $\pi : T/y \rightarrow T$ tel que $\pi \eta = \text{id}_{T/y}$.

Bien entendu, il y a dans ce cas le problème de déterminer les conditions sous lesquelles le demi-groupe $W(B, S, \theta)$ est un demi-groupe ordonné (par rapport à l'ordre cartésien). On est, en effet, amené à considérer les demi-groupes orthodoxes ordonnés T dans lesquels l'ordre est maniable (en anglais "amenable"), c'est-à-dire

$$x \leq y \implies (\exists x', x'' \in V(x)) (\exists y', y'' \in V(y)) \quad xx' \leq yy', \quad x''x \leq y''y.$$

Cette condition assure que l'isomorphisme du théorème précédent soit un isomorphisme de demi-groupes ordonnés. Nous ne préciserons pas ici les détails.

Signalons cependant un cas particulièrement intéressant, à savoir un demi-groupe orthodoxe ordonné ayant un plus grand idempotent. Si nous considérons d'abord le cas d'une bande nous avons le résultat suivant.

THÉOREME 8. - Soit B une bande ordonnée ayant un plus grand élément ξ . Alors $\xi B \xi$ est un demi-treillis. D'ailleurs, si B/θ est muni de l'ordre naturel, les conditions suivantes sont équivalentes

- 1° B est scindé,
- 2° $\eta : B \rightarrow B/\theta$ est isotone,
- 3° $(\forall x \in B) \quad x = x\xi x$;
- 4° $(\forall x, y \in B) \quad xy = x\xi y$,
- 5° $\xi B \xi$ est un squelette de B ,
- 6° θ est une équivalence de fermeture dont l'ensemble des fermés est $\xi B \xi$,
- 7° $\eta : B \rightarrow B/\theta$ est résidué.

Enfin, lorsque ces conditions sont satisfaites, B est normale.

Vu ce résultat, il est naturel de considérer le cas où y est une équivalence de fermeture.

THÉOREME 9. - Si S est un demi-groupe orthodoxe ordonné, alors les conditions suivantes sont équivalentes

- 1° y est une équivalence de fermeture,
- 2° S/y peut être ordonné tel que $\eta : S \rightarrow S/y$ soit résidué.

D'ailleurs, si y est une fermeture multiplicative, alors S est scindé, et chaque élément de S admet un plus grand inverse.

THÉOREME 10. - Soit S un demi-groupe orthodoxe ordonné ayant un plus grand idempotent ξ . Alors $\xi S \xi$ est un sous-demi-groupe inverse ordonné dont l'élément neutre ξ est le plus grand idempotent. D'ailleurs les conditions suivantes sont équivalentes

- 1° y_ξ est l'élément neutre de S/y ,
- 2° $(\forall x = x^2 \in S) \quad x = x\xi x$,
- 3° $e^2 = e \leq f = f^2 \iff e = efe$,
- 4° $(\forall x, y \in S) \quad xy = x\xi y$,
- 5° $(\forall x \in S) \quad x^2 = x\xi x$,

6° $\xi S \xi$ rencontre chaque y -classe une fois et une fois seulement,
 7° y est une fermeture multiplicative dont l'ensemble des fermés est $\xi S \xi$.
Enfin, lorsque ces conditions sont satisfaites, S est scindé, chaque élément de S admet un plus grand inverse, et la bande des idempotents est normale.

BIBLIOGRAPHIE

[1] McALISTER (D. B.) and BLYTH (T. S.). - Split orthodox semi-groups (à paraître)

Thomas S. BLYTH
 Mathematical Institute
 University of St-Andrews
 St-ANDREWS, Scotland
 (Grande-Bretagne).
