

GROUPE D'ÉTUDE D'ALGÈBRE

THÉRÈSE MERLIER

Sur une généralisation des demi-groupes nilpotents

Groupe d'étude d'algèbre, tome 1 (1975-1976), exp. n° 11, p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=GEA_1975-1976__1__A11_0>

© Groupe d'étude d'algèbre
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe d'étude d'algèbre » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES DEMI-GROUPES NILPOTENTS

par Thérèse MERLIER

Introduction.

La structure des demi-groupes S qui ne sont pas globalement idempotents (i. e. $S \neq S^2$) est en général mal connue ; ces demi-groupes ne peuvent, en effet, être ni des demi-groupes réguliers, ni des monoïdes, ni des bandes, ni des demi-groupes simples, etc. Toutefois, leur importance est grande, puisque de nombreux théorèmes, dans des directions diverses, les font intervenir (par exemple, cf. [3]), tout demi-groupe fini est produit sous-direct de demi-groupes nilpotents et de demi-groupes complètement 0-simples. De même (cf. [2]), le demi-groupe syntactique M d'un code bipréfixe n'est pas globalement idempotent, puisque pour un certain entier n , M^n est l'idéal minimal de M (cette propriété est d'ailleurs caractéristique des codes bipréfixes).

Les demi-groupes nilpotents ($S^n = 0$) sont évidemment la famille la plus caractéristique des demi-groupes non globalement idempotents.

Aucune démonstration ne sera donnée ici (Pour les démonstrations, nous renvoyons à notre thèse, [1] chapitre 1 et 2).

1. Demi-groupes nilpotents

Énonçons quelques propriétés de ces demi-groupes.

THÉOREME 1.1. - Un demi-groupe S est nilpotent si, et seulement si, S admet au plus un idempotent, et si S admet une chaîne d'idéaux bilatères, qui est une chaîne maximale de l'ensemble des parties de S , $\mathcal{P}(S)$, ayant pour éléments particuliers $S, S^2, \dots, S^n, \dots$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

THÉOREME 1.2. - Un demi-groupe S fini, ayant n éléments, est un demi-groupe nilpotent si, et seulement si, S admet au plus un idempotent, et si le treillis des idéaux de S est de longueur n .

Ces résultats reposent sur le fait que dans un demi-groupe nilpotent, si I et J sont deux idéaux (d'un côté) tels que $I \subset J$, alors il existe $x \in J \setminus I$, tel que $I \cup \{x\}$ est idéal (du même côté) de S . Et de plus, si I est un idéal non vide d'un demi-groupe nilpotent, il existe $x \in I$ tel que $I - \{x\}$ est aussi un idéal de S .

2. Demi-groupes de profondeur gauche (ou droite) finie.

Définition 2.1. - Un demi-groupe S est de profondeur gauche finie, s'il existe

un entier n tel que S^n est un idéal 0-minimal à gauche.

Désignons par E^* l'ensemble des idempotents (non nuls) de S , demi-groupe (avec zéro).

PROPOSITION 2.2. - Soit S un demi-groupe de profondeur gauche finie dont l'ensemble E^* des idempotents non nuls est non vide. Alors il y a équivalence entre

$$\left. \begin{array}{l} (a) \quad ex = 0, \\ (b) \quad xe = 0, \\ (c) \quad x^n = 0. \end{array} \right\} \forall e \in E^*, \quad \forall x \in S.$$

Cette proposition nous permet de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 2.3. - Un demi-groupe S de profondeur gauche finie, dont l'ensemble E^* des idempotents non nuls est non vide, et vérifie

$$\forall x \in S, \quad \forall e \in E^*, \quad \forall f \in E^*, \quad xe = xf,$$

est produit sous-direct de $N \times (G \times E)^0$, où N est un demi-groupe nilpotent, G un groupe, E un zéro demi-groupe à gauche.

De plus, tout demi-groupe S de profondeur gauche finie, dont l'ensemble E^* des idempotents non nuls vérifie la condition précédente s'obtient de cette façon.

Exemples de demi-groupe de profondeur gauche finie. - Soit $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ un ensemble formé de 5 éléments. Et soient x_1 et y_1 deux transformations de X données par les tableaux suivants

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le demi-groupe S engendré par x_1 et y_1 , sous-demi-groupe de X^X , est de profondeur gauche finie, et vérifie les conditions du théorème précédent. S est produit sous-direct de $S^2 \times S/S^2$.

Par contre, les transformations x_1 et $y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ engendrent bien, elles aussi, un demi-groupe de profondeur gauche finie, M . On a M^3 idéal 0-minimal à gauche, mais M n'est pas produit sous-direct de $M^3 \times M/M^3$. En effet, x_1^2 et $y_2 x_1$ sont des idempotents non nuls, mais l'on a

$$x_1 x_1^2 \neq x_1 y_2 x_1.$$

Remarque. - Les conditions (a), (b), (c) de la proposition 2.2 ne sont pas équivalentes dans un demi-groupe de profondeur finie. Le lecteur trouvera un exemple dans [1].

3. Demi-groupes G^0 -potents.

Définition 3.1. - Un demi-groupe avec zéro, S , est dit G^0 -potent, s'il existe un entier n tel que S^n est un groupe avec zéro G^0 .

COROLLAIRE 3.2. - Un demi-groupe G^0 -potent est de profondeur gauche finie.

COROLLAIRE 3.3. - Un demi-groupe est G^0 -potent si, et seulement si, il est produit sous-direct du produit direct d'un groupe avec zéro, par un demi-groupe nilpotent.

PROPOSITION 3.4. - Soit S le semi-groupe multiplicatif d'un anneau R . S est G^0 -potent si, et seulement si, l'une des puissances de l'anneau R est un corps.

Dans ce cas, l'anneau R est isomorphe au produit direct d'un corps et d'un anneau nilpotent, et S au produit direct d'un groupe et d'un demi-groupe nilpotent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MERLIER (Th.). - Relations d'ordre et structures associatives, Thèse Univ. Paris Sud, 1976 (à paraître).
- [2] PERLIN (D.). - Codes bipréfixes et groupes de permutations, Thèse Univ. Paris VII, 1975.
- [3] RHODES (J.) and KHROHN (K.) [Contributors]. - Algebraic theory of machines, languages and semigroups. Edited by M. Arbib. - New York and London, Academic Press, 1968.

Thérèse MERLIER
 Résidence Gascogne
 105 rue Boucicaut
 92260 FONTENAY AUX ROSES
