

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PIERRE WINTENBERGER

Une généralisation du théorème de Tate-Sen-Ax

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__1_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1987-1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE GENERALISATION DU THEOREME DE TATE-SEN-AX

par Jean-Pierre WINTENBERGER

RESUME. Soit R un anneau noethérien intègre normal de corps des fractions F de caractéristique 0. On suppose que le schéma $\text{Spec}(R)$ peut être désingularisé. Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F et $\bar{R}$ la clôture intégrale de R dans $\bar{F}$ soit x un élément de R . Nous prouvons que le sous-anneau de la complétion x -adique de $\bar{R}$ formé de ses éléments qui sont fixes par le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ est la complétion x -adique de R^1 .

Soient $R, F, \bar{F}, \bar{R}$ et x comme dans le résumé. Notons $\hat{R}$ et $\hat{\bar{R}}$ les complétions x -adiques de R et de $\bar{R}$ respectivement, $\hat{R} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R/x^n R$ et $\hat{\bar{R}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \bar{R}/x^n \bar{R}$. Soit G le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{F}/F)$; l'action de G sur $\bar{R}$ se prolonge à $\hat{\bar{R}}$. Comme R est normal, l'homomorphisme naturel de $\hat{R}$ dans $\hat{\bar{R}}$ est une injection.

THEOREME. — Notons S le schéma $\text{Spec}(R)$. Supposons qu'il existe un schéma S_{reg} régulier et un morphisme propre birationnel $\pi: S_{\text{reg}} \rightarrow S$. Alors $(\hat{\bar{R}})^G \simeq \hat{R}$.

PROPOSITION 1 ([1]). — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $H^1(G, \bar{R})_{\{x^n\}}$ le noyau de la multiplication par x^n dans $H^1(G, \bar{R})$ et soit $T_x(H^1(G, \bar{R})) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^1(G, \bar{R})_{\{x^n\}}$, l'homomorphisme de $H^1(G, \bar{R})_{\{x^{n+1}\}}$ dans $H^1(G, \bar{R})_{\{x^n\}}$ étant induit par la multiplication par x . Alors, on a un isomorphisme de $\hat{R}$ -modules de $(\hat{\bar{R}})^G / \hat{R}$ dans $T_x(H^1(G, \bar{R}))$.

Démonstration. Les suites exactes de cohomologie galoisienne associées aux suites exactes:

$$0 \rightarrow \bar{R} \xrightarrow{x^n} \bar{R} \rightarrow \bar{R}/x^n \bar{R} \rightarrow 0,$$

donnent des suites exactes :

$$0 \rightarrow R/x^n R \rightarrow (\bar{R}/x^n \bar{R})^G \rightarrow H^1(G, \bar{R})_{\{x^n\}} \rightarrow 0,$$

¹ Le texte qui suit est, à la remarque 4) près, le texte de la Note C.R. Acad. Sci. Paris, t. 307, Série 1, p.63-65, 1988.

Une Généralisation du Théorème de Tate-Ax-Sen

qui donnent l'isomorphisme de la proposition. Le théorème résulte alors de la proposition suivante:

PROPOSITION 2.- Si F' est une extension galoisienne finie de F contenue dans $\overline{F}$, on note G' son groupe de Galois, R' la fermeture intégrale de R dans F' et $H^1(G', R')_{\{x^\infty\}}$ le sous R -module de $H^1(G', R')$ formé de ses éléments qui sont tués par une puissance de x . Alors, sous les hypothèses du théorème, il existe un entier a , indépendant de F' , tel que $x^a H^1(G', R')_{\{x^\infty\}} = 0$.

On peut préciser a . Supposons $x \neq 0$. Notons $\text{Supp}_R(x)$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 de R contenant x ($\text{Supp}_R(x)$ est donc un ensemble fini). Pour chaque $P \in \text{Supp}_R(x)$, notons $\tilde{\ell}_P$ la caractéristique de R/P et a_P un entier tel que $a_P = 0$ si $\tilde{\ell}_P = 0$, $x^{a_P} \in \tilde{\ell}_P R_P$ si $\tilde{\ell}_P > 2$, $x^{a_P} \in 4R_P$ si $\tilde{\ell}_P = 2$. Soit a_0 un entier $\geq a_P$ pour tout $P \in \text{Supp}_R(x)$. Soit d'autre part a_1 un entier tel que x^{a_1} annule le R -module noethérien formé des éléments de $H^1(S_{\text{reg}}, O_{S_{\text{reg}}})$ qui sont tués par une puissance de x . Alors, on peut prendre $a = a_0 + a_1$.

Un argument classique utilisant une résolvante permet de prouver que si y est un élément de R' , alors $\text{tr}_{F'/F}(y)$ annule $H^1(G', R')$. En particulier, le degré $[F': F]$ de l'extension F'/F annule $H^1(G', R')$.

COROLLAIRE.- Supposons R régulier. Notons τ le produit des nombres premiers divisant $[F': F]$. Alors $H^1(G', R')$ est tué par τ si 2 ne divise pas τ , et par 2τ si 2 divise τ .

La démonstration de la proposition 2 utilise la propriété de pureté suivante :

PROPOSITION 3.- Supposons R régulier. Alors, les idéaux premiers associés au R -module $H^1(G', R')$ sont de hauteur 1.

Remarques:

- 1) Comme $H^1(G', R')$ est tué par $[F': F]$, $H^1(G', R') = (0)$ si R est une $\mathbb{Q}$ -algèbre et on a $(\widehat{\widehat{R}})^G \simeq \widehat{R}$ dans ce cas.
- 2) On connaît l'existence de S_{reg} et π lorsque R est excellent de dimension ≤ 2 , [2].
- 3) Le théorème est un théorème de J. T. Tate lorsque R est un anneau de valuation discrète complet à corps résiduel parfait de caractéristique p , [3]. Sous les mêmes hypothèses que celles de J. T. Tate, c'est un théorème de S. Sen que $H^1(G, \overline{R})$ est tué par p , [1]. Si R est un anneau de valuation henselien à corps résiduel de caractéristique p , J. Ax a prouvé que $H^1(G, \overline{R})$ est tué par

p si $p \neq 2$ et par 4 si $p=2$, [4].

4) Soit O un anneau de valuation discrète complet de caractéristique mixte $(0,p)$ à corps résiduel parfait ; on note K le corps des fractions de O . Soit R une O -algèbre plate, intègre, normale, essentiellement de type fini. Soit R' la fermeture intégrale de R dans une extension maximale non ramifiée de $R[1/p]$. Soit $\bar{F}$ la clôture algébrique de F dans $R'[1/p]$, $\bar{O}$ la fermeture intégrale de O dans $\bar{F}$, et $\Delta = \text{Gal}(R'[1/p]/\bar{F}R[1/p])$. Alors, G. Faltings prouve [7] :

– $\hat{R}'^\Delta = R\bar{O}$, si R est lisse sur O et R contient d unités dont les dérivées logarithmiques engendrent $\Omega_{R/O}^1$, ou d est la dimension relative de R sur O ,

– $\hat{R}'^\Delta[1/p] = \widehat{R\bar{O}}[1/p]$, si $R[1/p]$ est lisse sur le corps des fractions K de O , et R contient d unités dont les dérivées logarithmiques engendrent $\Omega_{R[1/p]/K}^1$.

Démonstration de la proposition 3. Supposons donc R régulier et soit P un idéal premier de R . Il s'agit de prouver que si la hauteur $\text{ht}(P)$ de P est $\neq 1$, P n'est pas associé au R -module $H^1(G', R')$. Comme $H^1(G', R')$ est de torsion, (0) n'est pas associé à R . Supposons donc $\text{ht}(P) \geq 2$; par localisation, on se ramène au cas où R est local d'idéal maximal P . Soit δ annulé par P ; il s'agit de prouver que $\delta=0$.

Pour $y \in P$, notons $\text{Supp}_R(y)$ l'ensemble des idéaux premiers de hauteur 1 contenant y . On voit facilement que si y_1 et y_2 sont deux éléments non nuls de P , (y_1, y_2) est une suite régulière si et seulement si $\text{Supp}_R(y_1) \cap \text{Supp}_R(y_2) = \emptyset$.

Soit $x_1 \in P$, $x_1 \neq 0$. Comme P est de hauteur ≥ 2 , P n'est pas contenu dans P^2 ni dans aucun des idéaux $P' \in \text{Supp}_R(x_1)$, donc n'est pas contenu dans leur réunion ([5] (1.B)). Il existe donc $x_2 \in P$, $x_2 \notin P^2$ et $\text{Supp}_R(x_2) \cap \text{Supp}_R(x_1) = \emptyset$. On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow R/x_2R \rightarrow (R'/x_2R')^{G'} \rightarrow H^1(G', R')_{\{x_2\}} \rightarrow 0.$$

Soit $\hat{\delta} \in (R'/x_2R')^{G'}$ relevant δ . Soit i l'homomorphisme de R'/x_2R' dans le localisé $(R'/x_2R')_{x_1}$. Comme $\text{Supp}_R(x_2) \cap \text{Supp}_R(x_1) = \emptyset$, on a $\text{Supp}_{R'}(x_2) \cap \text{Supp}_{R'}(x_1) = \emptyset$. Par suite (x_1, x_2) est une suite régulière dans R' et i est injectif. Comme $\hat{\delta} \in R'/x_2R'$, $i(\hat{\delta})$ est entier sur R/x_2R . Comme $x_1\delta=0$, $i(\hat{\delta}) \in (R/x_2R)_{x_2}$. Comme $x_2 \in P$ et $x_2 \notin P^2$, R/x_2R est un anneau régulier ([5] (17.F)), donc normal. On voit donc que $\hat{\delta} \in R/x_2R$ et $\delta=0$ ce qui prouve la proposition.

Démonstration de la proposition 2. Supposons tout d'abord R régulier. Posons $M = H^1(G', R')_{\{x^\infty\}}$; il s'agit de prouver que M est tué par x^a . Comme M s'injecte dans le produit de ses localisés M_P pour P parcourant les idéaux premiers associés à $H^1(G', R')$, la proposition 3

Une Généralisation du Théorème de Tate-Ax-Sen

permet de se ramener au cas où R est un anneau de valuation discrète. Soit alors P l'idéal maximal de R . L'assertion est claire si $x \notin P$ ou si la caractéristique résiduelle de R est nulle, puisque R est alors une $\mathbb{Q}$ -algèbre (voir la remarque 1). Supposons donc que $x \in P$ et que la caractéristique résiduelle est $p \neq 0$; il s'agit de prouver que $H^1(G', R')$ est tué par p si $p \neq 2$ et par 4 si $p=2$. Lorsque R est complet, le théorème de J. Ax ([4]) permet de conclure. Pour R non nécessairement complet, comme $H^1(G', R')$ est un R -module de torsion et que $\hat{R}$ est plat sur R , on a :

$$H^1(G', R') = H^1(G', R') \otimes_R \hat{R} = H^1(G', R' \otimes_R \hat{R})$$

Soient P' un idéal de R' au dessus de P , $\hat{R}'$ le complété de R' pour la topologie P' -adique et D' le groupe de décomposition de P' . Le G' -module $R' \otimes_R \hat{R}$ s'identifie au module induit $\text{Ind}_{D'}^{G'}(\hat{R}')$ ([6] Chap.2, Prop.4), d'où : $H^1(G', R') = H^1(D', \hat{R}')$, ce qui ramène au cas où R est complet et achève de prouver la proposition lorsque R est régulier.

Pour achever de prouver la proposition 2, il suffit de voir que lorsqu'on a une désingularisation $\pi : S_{\text{reg}} \rightarrow S$, on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ker}(H^1(S_{\text{reg}}, \mathcal{O}_{S_{\text{reg}}}) \rightarrow H^1(S'', \mathcal{O}_{S''})) \rightarrow H^1(G', R') \rightarrow H^0(S_{\text{reg}}, \tilde{H}^1(G', f_* \mathcal{O}_{S''})),$$

où :

- S'' est la fermeture intégrale de S_{reg} relativement à $\text{Spec}(F')$ et f le morphisme naturel de S'' dans S_{reg} ,
- $\tilde{H}^1(G', f_* \mathcal{O}_{S''})$ est le faisceau cohérent sur S_{reg} dont la restriction à tout ouvert affine $\text{Spec}(A)$ de S_{reg} est $H^1(G', A')$, où A' est la fermeture intégrale de A dans F' .
- si $\gamma \in \text{Ker}(H^1(S_{\text{reg}}, \mathcal{O}_{S_{\text{reg}}}) \rightarrow H^1(S'', \mathcal{O}_{S''}))$ est représenté par un cocycle à la Čech $(f_{i_0, i_1}) \in \tilde{C}^1(\tilde{U}, \mathcal{O}_{S_{\text{reg}}})$, il existe $(g_i) \in \tilde{C}^0(f^{-1}(\tilde{U}), \mathcal{O}_{S''})$ avec $f_{i_0, i_1} = g_{i_1} - g_{i_0}$, alors, pour $\sigma \in G'$, $\sigma g_i - g_i$ ne dépend pas de i et appartient à R' , et on associe à γ la classe de $(\sigma g_i - g_i)_{\sigma \in G'}$ dans $H^1(G', R')$,
- le morphisme de $H^1(G', R')$ dans $H^0(S_{\text{reg}}, \tilde{C}^1(G', f_* \mathcal{O}_{S''}))$ est le morphisme défini par localisation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S.Sen, *On automorphisms of local fields.*, Ann. of Math., 90 (1969), p.33-46.
- [2] H. Hironaka, *Desingularisation of Excellent Surfaces.*, 1967, publié dans Lect. Notes 1101, ou J. Lipman, *Desingularisation of two dimensional schemes.*, Ann. of Math., 107 (1978), p.151-207.
- [3] J. T. Tate, *p-divisible groups*, Proc. of a Conf. on Local Fields, Springer Verlag (1967), p.158-183.

- [4] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields-The Galois Action*, J. Algebra, 15 (1970), p.417-428.
- [5] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, Second Edition, Mathematics lecture note series 56, The Benjamin/Cummings Publishing Company (1980).
- [6] J.-P. Serre, *Corps Locaux*, Hermann (1968).
- [7] G. Faltings, *p -Adic Hodge theory*, Journal of the A.M.S. 1 (1988), p.255-299.

J.-P. WINTENBERGER,
 Université de Paris-Sud,
 Mathématiques-U.A. 752, Bat. 425,
 91405 Orsay Cedex-France.