Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Marie-Claude Sarmant-Durix

Corollaire multiplicatif du théorème de Mittag-Leffler : application à une équation différentielle du premier ordre

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 15 (1987-1988), p. 13-28
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1987-1988__15__13_0>

Groupe d'Etude d'Analyse Ultramétrique
(1987-1988)

COROLLAIRE MULTIPLICATIF DU THEOREME DE MITTAG-LEFFLER : APPLICATION A UNE EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE

par Marie-Claude SARMANT-DURIX

Soit K un corps valué complet algébriquement clos, A un infraconnexe fermé borné de K, f un élément analytique sur A. Le théorème de Mittag-Leffler (voir par exemple [A], p. 152) indique une décomposition de f en somme d'éléments analytiques définis sur les complémentaires des trous de A. Une décomposition de f en produit de facteurs singuliers est donnée par un théorème de Motzkin ([M], p. 79) . Nous allons démontrer un corollaire de ce théorème, en mettant chacun de ces facteurs singuliers sous forme d'un produit infini de fractions rationnelles. Dès lors, comme la dérivée logarithmique d'un tel produit se présente sous une forme relativement simple, on peut s'en servir pour approfondir l'étude de l'équation différentielle du premier ordre $f' = \omega f$, où ω est un élément analytique sur un disque (ouvert ou fermé).

<u>Notations et définitions générales</u>

K est un corps muni d'une valuation notée $|.|$, complet et algébriquement clos.

Pour tout $a\in K$, et pour tout $r\in \mathbb{R}_+$, on note :

$$d(a,r) = \{x\in K; \quad |x-a| \le r\}$$
$$d(a,r^-) = \{x\in K; \quad |x-a|<r\}$$
$$C(a,r) = \{x\in K; \quad |x-a|<R\}$$

et si $R>r$, on note :

$$\Gamma(a,r,R) = \{x\in K; r<|x-a|<R\}$$

Un sous-ensemble A de $\bar{K} = K\cup\{\infty\}$ est dit <u>infraconnexe</u> si, pour tout $a\in K$, l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de l'image de A par l'application $x \to |x-a|$ est un intervalle.

On note $\hat{A}$ le plus petit disque circonférencié contenant A. Un dique non circonférencié $T\subset CA\cap\hat{A}$ est appelé un <u>trou</u> de A s'il est maximal. $C\hat{A}$ est appelé le <u>trou de A de centre infini</u> : on le note T_∞. On note $\mathcal{T}(A)$ la famille des trous de A.

Soit D un infraconnexe de K et soient $a \in K$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On appelle filtre croissant de centre a et de diamètre R le filtre de D qui admet pour base l'ensemble des $\Gamma(a,r,R)$ quand r parcourt $]0,R[$, filtre décroissant de diamètre R un filtre admettant une base d'ensembles de la forme :

$$D_m = \Delta_m \setminus \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} \Delta_j \right) \cap D$$

où la suite des Δ_m est une suite décroissante de disques de K telle que :

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{diam}(\Delta_m) = R$$

Considérons une famille $(T_{m,i};q_{m,i})_{1\le i\le k_m, m\in\mathbb{N}}$ où $q_{m,i} \in \mathbb{N}$. Elle est appelée T-suite associée au T-filtre croissant (resp. décroissant) de centre a, de diamètre R si les trous $(T_{m,i})_{1\le i\le k_m}$ sont inclus dans un cercle $C(a,d_m)$ avec $d_m < d_{m+1}$ (resp. $d_m > d_{m+1}$) et vérifiant la condition $(\mathcal{Z})$:

$$\lim_{m\to\infty} \Big[\Big(\sum_{j=1}^{m} |\log(d_m/d_j)| \sum_{i=1}^{k_j} q_{j,i} \Big) - \max_{1\le i\le k_m} [q_{m,i} \log(d_m/\rho_{m,i}) + \sum_{1\le j\le k_m, j\ne i} q_{m,j} \log(d_m/|b_{m,j}-b_{m,i}|)] \Big] = +\infty$$

De même, nous dirons que la famille $(T_{m,i};q_{m,i})$ est une T-suite associée à un filtre décroissant dépourvu de centre, si les $(T_{m,i})_{1\le i\le k_m}$ sont inclus dans le cercle $C(b_{m+1,1},d_m)$ où $d_m = |b_{m+1,1} - b_{m,1}|$ et $d_{m+1} < d_m$, et si la suite d'ensembles :

$$D_m = d(b_{m+1,1},d_m) \cap D.$$

a une intersection vide, et si la famille $(T_{m,i};q_{m,i})$ vérifie la condition $(\mathcal{Z})$.

Si $q_{m,i} = 1$ $\forall m\in\mathbb{N}$ $\forall i = 1,\dots,k_m$, la T-suite correspondante est dite idempotente $[S_1]$. Ici, nous n'utiliserons que des suites idempotentes telles que :

i) $k_m = 1$ $\forall m\in\mathbb{N}$ $\rho_{m,i} = \rho =$ constante

ii) $\{b_{m,1}\}_{m\in\mathbb{N}}$ (notée $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$) est la suite des zéros d'une série entière $\phi_m \in H(d(a,R))$ (resp. d'une série de Laurent $\phi_m \in H(Cd(a,R^-))$).

La suite $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ des centres des trous d'une telle T-suite sera appelée suite stigmacylique de l'infraconnexe D.

Un élément analytique sur A est la limite uniforme sur A d'une suite de fractions rationnelles sans pôles dans A. On note H(A) l'espace des éléments analytiques sur A et $H_b(A)$ l'espace des éléments analytiques bornés sur A. Pour $f \in H(A)$, on pose :

$$\|f\|_A = \sup_{x\in A}|f(x)|$$

($\|f\|_A$ peut être infini et n'est donc pas une norme).

On appelle $H_0(A)$ l'espace des éléments analytiques sur A, nuls à l'infini.

Soient A un infraconnexe fermé, $T = d(a,r^-)$ un trou de A, f un élément analytique sur A. On dit que f a un facteur singulier g dans T si :

a) il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $(x-a)^m g \in H(CT)$, ne s'annule pas dans CT, et tende vers 1 à l'infini,

b) f/g se prolonge analytiquement dans T, et son prolongement h ne s'annule pas dans T.

Si $T = T_\infty$, cette définition se modifie comme suit :

a') $g\in H(\hat{A})$ et ne s'annule pas dans $\hat{A}$

b') f/g se prolonge analytiquement en une fonction h définie sur $T_\infty\setminus\{\infty\}$, ne s'annule pas dans $T_\infty\setminus\{\infty\}$, et il existe $m\in\mathbb{Z}$ tel que $x^{-m}h$ tende vers 0 à l'infini ([M], p. 69).

(Notation : le facteur singulier de f relatif à T sera noté f^T).

§1. Corollaire d'un theorème de Motzkin : Théorème de Mittag-Leffler "multiplicatif".

Rappelons d'abord le théorème de Motzkin :

Théorème I.1 ([M], p.79, Théorème 4) Soit A un infraconnexe fermé et soit $f\in H(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f a un facteur singulier f^T relatif à chaque trou T de A et f se factorise sous la forme :

$$f = F\prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T$$

où F est un polynome et où le produit infini converge uniformément dans $\hat{H}(A)$.

b) f est quasi-inversible dans H(A).

Nous allons étudier un corollaire de ce théorème dans le cas où $A = d(0,1^-)$. L'ensemble des trous de A est alors, si $\mathcal{K}$ est le corps des restes de K :

$\mathcal{T}(A) = \{d(\alpha,1^-);\alpha\in\mathcal{K}^*\}\cup\{T_\infty\}$

Théorème 1.2. Soit $f \in H(A)$. Pour chaque trou $T_\infty = d(d, 1^-)$ de A (resp. pour T_∞) on note $\{b_{\infty,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite stigmacyclique de T_∞ (resp. $\{b_{\infty,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de T_∞).

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a') Dans chaque trou T_∞ (resp t_∞), il existe une suite $\{a_{\infty,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$, (resp $\{a_{\infty,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$) et il existe une fraction rationnelle G telles que :

$$f = G\left[\prod_{\alpha\in\mathcal{K}}\left[\prod_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{x-a_{\alpha,i}}{x-b_{\alpha,i}}\right)\right]\right]\left[\prod_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{x-a_{\infty,i}}{x-b_{\infty,i}}\right)\right]$$

et ce produit converge uniformément dans H(A)

b') f est quasi-inversible dans H(A).

La démonstration du corollaire va utiliser les lemmes suivants :

Lemme I.3. Soit $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des éléments d'une suite stigmacylique. On pose :

$$\Lambda\rho(\mathcal{B}) = K\setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} d(b_i, \rho^-)$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $f \in H_b(\Lambda\rho(\mathcal{B}))\quad \forall\rho\in\mathbb{R}_+$

chaque b_i est un pôle simple pour f et

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = a \qquad (a\in K)$$

b) Il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de K, de limite nulle, telle que :

$$f(x) = a + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_i}{x-b_i} \qquad \forall x\in\Lambda_o(\mathcal{B})$$

Démonstration. Supposons d'abord que a) est vrai et montrons a) $\Rightarrow$ b) . Il suffit d'appliquer le théorème de Mittag-Leffler à $f|(\Lambda\rho(\mathcal{B})\setminus d(0, (1/R^-))$ où R est un réel supérieur à 1 : les trous de ce domaine sont les $d(b_i, \rho^-)$ et $d(0, (1/R)^-)$:

$$f = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i + f_o$$

avec

$$f_i \in H_o(Cd(b_i, \rho^{-1})) \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+$$

$$f_o \in A(d(0, (1/R)^-) \qquad \forall R\in\mathbb{R}_+$$

En faisant tendre ρ vers 0, on voit que f_i est de la forme :

$$f_i = \frac{\alpha_i}{x-b_i}$$

et que f_o est une constante : la constante a.

Il est par ailleurs évident que b) entraîne a).

Posons maintenant $\tilde{T}_\infty = Cd(0,1^-)$.

Lemme I.4. Soit $f \in H_o(\tilde{T}_\infty)$, et soit $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite stigmacylique de $d(0,1^-)$. Quel que soit $c \in \mathbb{R}_+$, il existe une suite $\{\varepsilon_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de K, de limite nulle, telle que :

a) $\sup_{i\in\mathbb{N}} |\varepsilon_i| \le \|f\|_{\tilde{T}_\infty} + c$

b) $f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon_i/(x-b_i) \qquad \forall x\in\tilde{T}_\infty$

Démonstration. Nous savons ([S3], théorème 8, p.42) qu'il existe une suite de K, $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, de limite nulle, telle que :

$$(I.4.1) \qquad f(x) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\eta_i}{x-b_i} \qquad \forall x\in\tilde{T}_\infty$$

Il existe donc $M\in\mathbb{N}$ tel que :

$$i>M \rightarrow |\eta_i| < \|f\|_{\tilde{T}_\infty}$$

* Posons :

$$(I.4.2) \qquad \sigma(x) = \sum_{i=o}^{M} \frac{\eta_i}{x-b_i}$$

Alors $\|\sigma\|_{T_\infty} = \|f\|_{\tilde{T}_\infty}$ puisque :

σ est une fraction rationnelle : elle a au plus un nombre fini de zéros dans $\tilde{T}_\infty$. Son developpement en série de Laurent dans $\tilde{T}_\infty$ est :

$$(I.4.3) \qquad \sigma(x) = \sum_{k\ge 1} \left(\sum_{i=o}^{M} y_i b_i^{k-1} \right)/x^k$$

Si $|x|\ge 1$, alors :

$$(I.4.4) \qquad \left| \sum_{i=o}^{M} y_i\, b_i^{k-1}/x^k \right| \le \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty} \qquad \forall k\in\mathbb{N}^*$$

(En effet, le développement de Laurent de $\sigma(x)$ converge pour $|x| \ge 1$).

Il existe donc $J\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

(I.4.5) $\quad j\geq J \rightarrow |\sum_{i=o}^{M}\eta_i\ b_i^{k-1}/b_j^k| \leq \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty} + c$

(En effet :

$$|\sum_{i=o}^{M}\eta_i b_i^{k-1}/b_j^k| \leq \sup_{o\leq i\leq M}(|\eta_i/b_j|)(|b_i/b_j|^{k-1})$$

et puisque :

$$j>M \Rightarrow \sup_{o\leq i\leq M}|b_i/b_j| < |b_M/b_{\mu+1}| < 1$$

on voit qu'il existe $K_1\in\mathbb{N}$ tel que :

$$k>K_1 \Rightarrow |\sum_{i=o}^{M}\eta_i b_i^{k-1}/b_j^k| \leq \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty}$$

D'autre part, si $0\leq k\leq K_1$, alors d'après (I.4.4) :

$$|\sum_{i=o}^{M}\eta_i\ b_i^{k-1}| \leq \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty}$$

et comme $\lim_{j\to\infty}|b_j| = 1$, il existe J tel que :

$$j>J \Rightarrow |\sum_{i=o}^{M}y_i\ b_i^{k-1}/b_j^k| \leq \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty} + c)$$

* Posons maintenant :

$$Q(x) = \prod_{i=o}^{M}(1-(x/b_i))$$

$$Q_i = Q(x)/(1-(x/b_i)) \qquad \text{si } i = 0,\dots,M$$

Soit $\phi(x)$ une des séries entières convergentes dans $d(0,1^-)$ dont l'ensemble des zéros est $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, et telle que $\phi(0) = 1$. Nous posons pour $x\in d(0,1^-)$:

$$T(x) = \frac{\phi(x)}{\prod_{i=o}^{J-1}(1-\frac{x}{b_i})} = \sum_{k\in\mathbb{N}} t_k\ x^k$$

Puisque $\phi\ (0) = 1$, $T(0) = t_o = 1$.

Posons :

$$\Lambda\rho = d(0,1^-)\setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N},\, i\geq J} d(b_i,\rho^-)$$

Remarquons que :

$$\lim_{|x|\to 1,\, x\in\Lambda\rho}|T(x)| = +\infty$$

Alors 1/T, tout comme $1/\phi$, est un élément de $H(\Lambda\rho)$, car $\Lambda\rho$ possède un T-filtre $\mathcal{F}$ qui annule $1/\phi$ et 1/T.

Posons enfin :

$$T_i(x) = \frac{T(x)}{1-\frac{x}{b_i}}$$

* Soit $R(x) \in K[x]$. R/QT est sûr un élément de $H(\Lambda\rho)$ annulé par $\mathcal{F}$: on peut le décomposer en éléments simples (lemme I.3) : il existe une suite $\{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, de limite nulle, telle que :

$$R(x)/Q(x)T(x) = \sum_{i=o}^{M} \frac{\alpha_i}{x-b_i} + \sum_{i=J}^{\infty} \frac{\alpha_i}{x-b_i}$$

Les coefficients α_i peuvent être calculés par identification :

<u>si $0 \le i \le M$</u>

$$\alpha_i = \left[\frac{R(b_i)}{T(b_i)}\right] \left[\frac{x-b_i}{Q(x)}\right]_{x = b_i}$$

$$\alpha_i = - b_i \left[\frac{R(b_i)}{T(b_i)}\right] \left[\frac{1-\frac{x}{b_i}}{Q(x)}\right]_{x = b_i}$$

$$\alpha_i = - b_i \left[\frac{R(b_i)}{T(b_i)Q_i(b_i)}\right]$$

<u>si $J \le i$</u>

$$\alpha_i = \left[\frac{R(b_i)}{Q(b_i)}\right] \left[\frac{x-b_i}{T(x)}\right]_{x = b_i}$$

$$\alpha_i = - b_i \left[\frac{R(b_i)}{Q(b_i)T_i(b_i)}\right]$$

Nous voulons que $\alpha_i = \eta_i$ pour $i = 0,\dots,M$, de façon à "approcher" f par R/QT.

Nous prendrons donc :

$$R(b_i) = -\eta_i \quad T(b_i)Q(b_i)\eta_i \quad \text{pour} \quad i = 0,\dots,M$$

c'est-à-dire que nous choisirons, en fonction de ces valeurs de $R(b_i)$:

$$R(x) = \sum_{i=o}^{M} R(b_i)[Q_i(x)/Q_i(b_i)]$$

D'où, pour $j \ge J$:

$$R(b_j) = \sum_{i=o}^{M} \left[- \frac{\eta_i T(b_i)Q(b_i)}{b_i}\right] \left[\frac{Q_i(b_j)}{Q_i(b_i)}\right]$$

et $$\alpha_j = - b_j \, R(b_j)/Q(b_j)T_j(b_j)$$

$$\alpha_j = \left[- \frac{b_j}{Q(b_j)T_j(b_j)} \right] \sum_{i=o}^{M} \left[- \frac{\eta_i T(b_i) Q_i(b_j)}{b_j} \right]$$

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \sum_{i=o}^{M} \eta_i \left[\frac{Q_i(b_j)}{b_i Q(b_j)} \right] T(b_i)$$

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \sum_{i=o}^{M} \eta_i \left[\frac{1}{b_i(1-\frac{b_j}{b_i})} \right] T(b_i)$$

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \sum_{i=o}^{M} \eta_i \left[\frac{y_i}{b_i - b_j} \right] T(b_i)$$

et comme $T(b_j) = 0$ si $j \geq J$:

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \sum_{i=o}^{M} \eta_i \left[\frac{T(b_i) - T(b_j)}{b_i - b_j} \right]$$

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \sum_{i=o}^{M} \eta_i \left[\sum_{k=1}^{M} t_k (b_i^{k-1} + b_i^{k-2} \quad b_j + \ldots + b_j^{k-1}) \right]$$

$$\alpha_j = \frac{b_j}{T_j(b_j)} \left[t_1 b_j (\sum_{i=o}^{M} \eta_i / b_j) + t_2 b_j^2 \left[(\sum_{i=o}^{M} \eta_i / b_j) + (\sum_{i=o}^{M} \eta_i b_i / b_j^2) \right] \right.$$

$$+ t_k b_j^k \left[(\sum_{i=o}^{M} \eta_i / b_j) + (\sum_{i=o}^{M} \eta_i b_i / b_j^2)) \right.$$

$$\left. + (\sum_{i=o}^{M} \eta_i b_i^{k-1} / b_j^k) \right]$$

$$\left. + \,. \right]$$

Or : $|T_j(b_j)| = \left| \frac{T(x)}{1 - \frac{x}{b_j}} \right|_{x=b_j} = \sup_k |t_k^k b_j|$

Donc : $\frac{|t_k b_j^k|}{|T_j(b_j)|} \leq 1 \qquad \forall k \in N^*$

D'autre part, rappelons (I.4.5) :

$$j \geq J \rightarrow \left| \sum_{i=o}^{M} \eta_i \; b_i^{k-1} / b_j^k \right| \leq \|\sigma\|_{T_\infty} + c$$

Donc \

$$|\alpha_j| \leq \|\sigma\|_{\tilde{T}_\infty} + c \qquad \forall j \geq J$$

ou :

$$|\alpha_j| \leq \|f\|_{\tilde{T}_\infty} + c \qquad \forall j \geq J$$

* Comme R(x)/Q(x)T(x) est annulé par $\mathcal{F}$, nous voyons que :

$$f(x) = \left[\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\eta_i}{x_i - b_i} \right] - \frac{R(x)}{Q(x)T(x)} \qquad \forall x\in\tilde{T}_\infty$$

$$f(x) = \left[\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\eta_i}{x - b_i} \right] - \left[\sum_{i=0}^{M} \frac{\alpha_i}{x - b_i} \right] - \left[\sum_{i\geq J} \frac{\alpha_i}{x - b_i} \right]$$

$$f(x) = \sum_{M<i<J} \frac{\eta_i}{x - b_i} + \sum_{i\geq J} \frac{\eta_i - \alpha_i}{x_i - b_i}$$

D'où le résultat, puisque :

$$\sup_{M<i<J} |\eta_i| \leq \|f\|_{\tilde{T}_\infty}$$

$$\sup_{i\geq J} |\eta_i| \leq \|f\|_{\tilde{T}_\infty}$$

$$\sup_{i\geq J} |\alpha_i| \leq \|f\|_{\tilde{T}_\infty} + c$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Lemme</u>. I.5. <u>Soit</u> $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ <u>l'ensemble des éléments d'une suite stimacyclique de</u> T_∞. <u>On pose</u>

$$\Lambda\rho = K \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} d(b_i, \rho^-) \qquad \forall \rho\in\mathbb{R}_+$$

<u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) i) $f\in H_b(\Lambda\rho) \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+^*$

ii) <u>chaque</u> b_i <u>est un pôle simple de</u> f

iii) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 1$

iv) <u>f n'est pas identiquement nulle dans</u> d(0,1)

b) <u>il existe une suite</u> $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ <u>d'élémentsK de</u> K <u>telle que</u> :

$$f(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) \qquad \forall x\in\Lambda_0$$

(on dit alors que f est un produit méromorphe ([S_2].

<u>Démonstration.</u> Montrons d'abord que b) entraîne a). Nous voyons déjà que $f \in H_b(\Lambda\rho)$ pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et que chaque b_i est un pôle simple de f. Enfin il est facile de voir que $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 1$.

Supposons maintenant que a) soit vraie et démontrons b).

Puisque $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 1$, nous voyons qu'il existe $R \in \mathbb{R}$, $R > |b_1|$ tel que $|f(x)| = 1$ pour tout $x \in K \setminus d(0,R)$ et que f n'ait ni zéro ni pôle dans $K \setminus d(0,R)$. Puisque f n'est pas identiquement nul dans $d(0,1)$, f n'est pas annulé par le seul filtre percé de $\Lambda\rho$, et donc f est quasi-inversible dans $H(d(0,R)) \cap \Lambda\rho$.

* Supposons d'abord que f n'ait pas de zéro dans $d(0,1)$. $|f(x)|$ est alors égal à une constante $C \neq 0$ dans $d(0,1)$. Nous allons montrer que la relation : $|f(x)| = C$ reste vraie dans un ensemble de la forme $d(0,r) \cap \Lambda\rho$ avec $r>1$.

Posons $D\rho = d(0,R) \cap \Lambda\rho$. Il existe $k \in R(D\rho)$ tel que :

(I.5.1) $\qquad \|f-h\|_{D\rho} < C$

$|h(x)|$ est évidemment égal à C dans $d(0,1)$. Puisque h n'a ni zéro ni pôle dans $d(0,1)$, il existe $r>1$ tel que h n'ait ni zéro ni pôle dans $d(0,r)$ et donc que $|h(x)|$ soit égal à C dans $d(0,r)$. D'après (I.5.1) nous voyons que $|f(x)| = C$ dans $d(0,r) \cap \Lambda\rho$.

Soit $t(\rho)$ le plus grand entier tel que $|b_{t(\rho)}| < r$.

Puisque f n'a pas de zéro dans $\Lambda\rho \cap d(0,r)$ on voit que pour tout $i \geq t(\rho)$, $d(b_i,\rho)$ contient autant de zéros que de pôles de f (les zéros étant pris avec leur ordre de multiplicité). Comme nous pouvons prendre ρ aussi petit que nous voulons, on voit bien que $\lim_{i \to \infty}(b_i - a_i) = 0$ et donc que le produit $\prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right)$ converge dans $H_b(\rho), \forall \rho \in \mathbb{R}_+^*$.

D'un autre côté, puisque f est borné et puisque f n'a ni zéro ni pôle dans $K \setminus d(0,R)$, nous voyons que $v(f,\mu)$ est constant pour $\mu \leq -\text{Log } R$. Comme il est aussi constant pour $\mu \geq -\text{Log } r$, nous voyons que f a autant de zéros que de pôles dans $\Gamma(0,r,R)$. Soient $b_0, \dots, b_{t(\rho)-1}$ ces pôles; nous pouvons noter $a_0, \dots, a_{t(\rho)-1}$ les zéros correspondants (en répétant q fois un zéro d'ordre q) et nous voyons que le produit infini $\Pi(x) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right)$ a exactement les mêmes zéros et les mêmes pôles que f. On voit donc facilement que f/Π est une constante : naturellement, Π est inversible dans $H_b(\Lambda\rho)$ et f/Π a un développement de Mittag-Leffler dans l'infraconnexe $\Lambda\rho$; mais f/Π n'a pas de pôle dans K et son développement de

Mittag-Leffler est donc réduit à une constante α. Enfin $\alpha = 1$ puisque :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \Pi(x) = 1.$$

* Considérons maintenant le cas général où f a un nombre fini de zéros dans $d(0,1)$. Alors f se factorise sous la forme Pg où P est un polynôme unitaire de degré q dont tous les zéros sont dans $d(0,1)$ et où g est un élément de $H_b(\Lambda\rho)$ tel que $g(x) \neq 0$ pour tout $x\in d(0,1)$ et que :

$$\lim_{x\to\infty} x^q g(x) = 1.$$

Soit Q un polynôme unitaire de degré q dont les zéros appartiennent à $K\setminus d(0,1)$. Evidemment nous avons de nouveau :

$$\lim_{x\to\infty} Q(x)\, g(x) = 1.$$

Ainsi Qg satisfait l'hypothèse du théorème et n'a pas de zéro dans $d(0,1)$, et donc Qg est un produit méromorphe associé à $\mathcal{B}$.

Puisque P et Q ont le même degré, $f = (P/Q)Qg$ est aussi un produit méromorphe de même forme et ainsi finit la démonstration.

<u>Corollaire</u> I.5.bis. <u>Soit</u> $\mathcal{B} = \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ <u>l'ensemble des éléments d'une suite stigmacylique de</u> $d(0,1^-)$. <u>On pose</u> :

$$\Lambda\rho(\mathcal{B}) = K\setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} d(b_i,\rho^-) \qquad \forall\rho\in\mathbb{R}_+$$

<u>Les deux conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) i) $f\in H_b(\Lambda\rho(\mathcal{B}))$ $\quad\forall\rho\in\mathbb{R}_+^*$

ii) <u>chaque</u> b_i <u>est pôle simple de</u> $f(x)$

iii) $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 1$

b) <u>il existe une suite</u> $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ <u>d'éléments de K telle que</u> :

$$f(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right)$$

<u>Démonstration</u>. Il est évident que b) entraîne a). Montrons que a) entraîne b).

* Supposons d'abord que $f(0) = \alpha \neq 0$. Posons $g(x) = \frac{1}{\alpha} f(\frac{1}{x})$. Soit $\mathcal{B}' = \{\frac{1}{b_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Alors $\mathcal{B}'$ est une suite stigmacylique de T_∞, et :

i) $g\in H_b(\Lambda\rho(\mathcal{B}'))$

ii) chaque $\frac{1}{b_i}$ est un pôle simple de g

iii) $\lim_{|x|\to\infty} g(x) = 1$

iv) g n'est pas identiquement nul sur $d(0,1)$.

Donc il existe une suite $\{\frac{1}{a_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que :

$$g(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}} \frac{x-\frac{1}{a_i}}{x-\frac{1}{b_i}}$$

D'où $f(x) = \alpha g(\frac{1}{x}) = \alpha \prod_{i\in\mathbb{N}} (\frac{x-a_i}{x-b_i}) \prod_{i\in\mathbb{N}} \frac{b_i}{\alpha_i}$

Mais $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 1$: donc $\alpha \prod\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{b_i}{a_i} = 1$.

* Supposons maintenant que 0 soit un zéro d'ordre q de f. Posons :

$$f(x) = \frac{x^q}{(x-b_o)\dots(x-b_{q-1})} h(x)$$

Alors h vérifie les hypothèses a), pour la suite stigmacylique $\{b_i\}_{i\geq q}$ et de plus $h(0) \neq 0$: d'où $h(x) = \prod\limits_{i\geq q} \frac{x-a_i}{x-b_i}$

$$f(x) = \frac{x^q}{(x-b_o)\dots(x-b_{q-1})} \prod_{i\geq q} (\frac{x-a_i}{x-b_i})$$

$$f(x) = \prod_{i\in\mathbb{N}} (\frac{x-a_i}{x-b_i})$$

avec $a_o = \dots = a_{q-1} = 0$.

Lemme I.6. Soit $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite stigmaciclyque de $d(0,1^-)$. Soit $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K de limite nulle, telle que :

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} |\eta_i| < |b_o|$$

Alors il existe une suite $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K telle que :

$$1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\eta_i}{x-b_i} = \prod_{i\in\mathbb{N}} \frac{x-a_i}{x-b_i} \quad \forall x\in K\setminus\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$$

et pour toute factorisation de ce type, on on :

$$|a_i-b_i| = |\eta_i| \qquad \forall i\in\mathbb{N}$$

Démonstration. L'existence de la suite $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est démontrée par le corollaire I.5. bis.

Montrons donc que :

$$|a_i-b_i| = |\eta_i| \qquad \forall i\in\mathbb{N}$$

Nous savons que :

$$\lim_{i\to\infty} |a_i-b_i| = 0$$

$$|b_i| > |b_o| \qquad \forall i \in \mathbb{N}^*$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$i > N \rightarrow |a_i - b_i| < |b_i|$$

Nous pouvons écrire en séparant les facteurs, $\forall x \in K \backslash \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$:

$$1 + \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\eta_i}{x-b_i} = \left[\prod_{i=o} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right) \right] \left[\prod_{i>N} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right) \right]$$

Considérons la décomposition en éléments simples de $\prod_{i=o} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right)$. Elle est de la forme :

$$\prod_{i=o}^{N} \left(\frac{x-a_i}{x-b_i}\right) = 1 + \sum_{i=o}^{N} \frac{\tau_i}{x-b_i}$$

Alors : $\tau_i = \eta_i \prod_{j>N} \left(\frac{b_i - b_j}{b_i - a_j}\right) \qquad \forall i = 0,\dots,N.$

Puisque la suite $\{|b_i|\}_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement monotone :

$$|b_i - a_j| = |b_i - b_j| = |b_j| \qquad \forall i = 0,\dots,N, \qquad \forall j > N$$

$$\text{Donc} : |\tau_i| = |\eta_i| < |b_o| \qquad \forall i = 0,\dots,N.$$

Par ailleurs :

$$\prod_{i=o} (x - a_i) = \prod_{i=o}^{N} (x-b_i) + \prod_{i=o}^{N} \tau_i \left[\prod_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{N} (x-b_j) \right]$$

et :

$$\tau_i \prod_{\substack{j=o \\ j\neq i}} b_j| < |\prod_{j=o}^{N} b_j|$$

Le polygone de Newton de chaque polynôme $\tau_i \prod_{\substack{j=o \\ j\neq i}}^{N} (x-b_j)$ est donc au-dessus du polygone de Newton de $\prod_{i=o}^{N} (x-b_i)$. Le polygone de Newton de $\prod_{i=o}^{N} (x-a_i)$ est donc celui de $\prod_{i=o}^{N} (x-b_i)$, donc $|a_i| = |b_i| \quad \forall i = 0,\dots,N$, donc pour tout i appartenant à $\mathbb{N}$

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$, le résidu η_i est de façon évidente :

$$\eta_i = (b_i - a_i) \prod_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ j\neq i}} \left(\frac{b_i - a_j}{b_i - b_j}\right)$$

Or $|a_i| = |b_i| \quad \forall i \in \mathbb{N}$ entraîne :

$$\left| \prod_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ j\neq i}} \left(\frac{b_i - a_j}{b_i - b_j}\right) \right| = 1$$

$$\text{D'où } |\eta_i| = |b_i - a_i| \qquad \forall i \in \mathbb{N}$$

Démonstration du théorème 1.2. D'après le théorème I.1, (b) est équivalent à a). Il est évident que a') entraîne a). Nous allons montrer que a) entraîne a').

a) dit qu'il existe un polynôme F, et un facteur singulier f^T relatif à chaque trou $T\in\mathcal{T}(A)$, tels que :

$$f = F \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} f^T$$

(les zéros de F étant dans A, et seulement une infinité dénombrable de f^T non identiques à 1). Par définition du facteur singulier f^T, il existe $m(f,T)\in\mathbb{Z}$ tel que :

il existe $m(f,T)\in\mathbb{Z}$ tel que :

$$g^T = (x-a_T)^{m(f,T)} f^T \in H(CT) \qquad (a_T\in T)$$

(resp. $g^\infty = x^{m(f,\infty)}\ f^\infty \in H(d(0,1))$, avec $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^\infty = 1$), et $m(f,T) = 0$ sauf pour un nombre fini de trous de A.

Posons :

$$G = F \times \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} (x-a_T)^{-m(f,T)}$$

G est une fraction rationnelle à coefficients dans K.

Posons :

$$g = f/G = \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} g^T$$

alors :

i) $g^T\in H(CT)$

ii) $g^T \neq 0$ dans CT

iii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} g^T = 1$

(resp. $g^\infty \in H(d(0,1))$

$g^\infty \neq 0$ dans $d(0,1)$

$\lim\limits_{|x|\to\infty} g^\infty = 1$)

et le produit g est uniformément convergent sur A.

Si $T \neq T_\infty$, posons $T = d(\alpha, 1^-)$ $\quad(\bar{\alpha}\in\mathcal{K}^*)$

Nous avons choisi dans T une suite stigmacyclique $\{b_{\alpha,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$. D'après le lemme I.3, il existe une suite $\{\varepsilon_{\alpha,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K, tendant vers 0, telle que :

a) $\displaystyle g^T(x) = \sum_i \frac{\varepsilon_{\alpha,i}}{x-b_{\alpha,i}} + 1 \qquad \forall x\in CT$

b) $\sup_{i\in\mathbb{N}} |\varepsilon_{\alpha,i}| \leq \|g^T(x) - 1\| + c_\alpha$

Nous choisirons bien sûr une suite réelle $\{c_\alpha\}_{\bar{\alpha}\in\mathcal{K}^*}$ sommable, telle que $c_\alpha \neq 0 \Leftrightarrow g^T \neq 1$.

D'après le corollaire I.5. bis, et comme g^T n'admet pas de zéro dans CT, il existe une suite $\{a_{\alpha,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ dans $d(\alpha,1^-)$ telle que :

$$g^T(x) = \prod_i \frac{x-a_{\alpha,i}}{x-b_{\alpha,i}} \qquad \forall x\in A$$

et d'après le lemme I.6, les $\{a_{\alpha,i}\}$ sont tels que,

$$|a_{\alpha,i} - b_{\alpha,i}| = |\varepsilon_{\alpha,i}| \quad (\forall i\in\mathbb{N}) \qquad (\forall\bar{\alpha}\in\mathcal{K}^* \text{ tel que } g^T \neq 1).$$

(En effet, la condition $\sup_i|\varepsilon_{\alpha,i}| < |\alpha-b_{\alpha,o}|$ peut toujours être réalisée si $\|g^T(x) - 1\| < 1$, en supprimant au besoin les premiers $b_{\alpha,i}$ de la suite $\{b_{\alpha,i}\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Enfin, d'après le lemme I.5., il existe une suite $\{a_{\alpha,i}\}$ d'éléments de T_∞ telle que :

$$g^{T_\infty} = \prod_i \left(\frac{x-a_{\infty,i}}{x-b_{\infty,i}}\right) \qquad \forall x\in A$$

Nous obtenons donc :

$$g(x) = \prod_{T\in\mathcal{T}(A)} \left[\prod_i \left(\frac{x_i-a_{\alpha,i}}{x-b_{\alpha,i}}\right)\right]$$

La convergence est uniforme sur $A = d(0,1^-)$; on remarque aussi que le produit infini :

$$\frac{g}{g^{T_o}} = \prod_{\substack{T\in\mathcal{T}(A)\\ T\neq T_o}} \left[\prod_i \left(\frac{x-a_{\alpha,i}}{x-b_{\alpha,i}}\right)\right]$$

est uniformément convergent sur $d(0,1^-) \cup T_o$ $\forall T_o\in\mathcal{T}(A)$; et enfin que le produit infini g est uniformément convergent sur tout ensemble :

$$\Lambda_{\rho,\alpha} = d(\alpha,1^-) \setminus \bigcup_{i\in\mathbb{N}} d(b_{\alpha,i},\rho^-) \qquad (\forall\rho\in]0,1[).$$