

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERNADETTE DESHOMMES

Sur les zéros des fonctions symétriques complètes (cas cubique)

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 14 (1986-1987), exp. n° 18, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1986-1987__14__A10_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1986-1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Exposé n° 18

SUR LES ZEROS DES FONCTIONS SYMETRIQUES COMPLETES (CAS CUBIQUE)

par Bernadette DESHOMMES

Introduction Un problème fascinant, non trivial et d'un énoncé simple est le suivant: "déterminer les zéros d'une suite récurrente linéaire (s.r.l) dans le 2^d cas de la conjecture de Ward."

Une s.r.l cubique (u_n) , à valeurs entières, est la donnée de 3 entiers non tous nuls u_0, u_1, u_2 et, d'une relation de récurrence à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

$$(R) \quad u_{n+3} = Su_{n+2} + Qu_{n+1} + Nu_n, \quad (n \in \mathbb{N}, N \neq 0).$$

Les zéros d'une suite (u_n) sont les solutions, $n \in \mathbb{N}$, de l'équation $u_n = 0$. $f(z) = z^3 - Sz^2 - Qz - N$, est le polynôme caractéristique de la récurrence. L'exemple du polynôme $f(z) = (z \pm a)(z^2 + a^2)$, $a \in \mathbb{Z}$, extrait de [50], montre qu'une suite peut avoir une infinité de zéros. Pour pallier à cette situation, on dispose d'un théorème de Mahler [25]:

une suite (u_n) possède un nombre fini de zéros si le rapport de deux quelconques des racines de f n'est pas une racine de l'unité. (le polynôme f est non dégénéré).

Le 2^d cas de la conjecture de Ward est réalisé quand le polynôme f est non dégénéré, irréductible, de discriminant négatif et $N \neq \pm 1$.

Après un rappel (§.1) et l'étude d'un cas particulier (§.2), le paragraphe 3 de cet exposé est consacré à la détermination des zéros des suites (U_n) telles que: $U_0=U_1=0$, $U_2=1$ (ce sont des fonctions symétriques complètes), vérifiant la condition suivante, assez particulière:

le corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$, ($\omega \in \mathbb{R}$, $f(\omega)=0$) est défini par la relation $\omega^3 = \varepsilon \text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\omega)$.

Cette relation est motivée, ainsi que ce travail [15], par l'étude de la suite de Berstel et Mignotte (§.2), seul exemple connu de s.r.l cubique entière à 6 zéros. Delone et Fadeev [14, thms.5 p.351 et p.367], Nagell [30, thm.1 p.43], ont étudié ces corps lorsque l'unité ε est un cube ou l'entier ω de trace nulle (pour des travaux plus récents en relation avec ces corps cf. [36]).

Dans ces conditions, les zéros d'une suite (U_n) , de la forme $n=3m$, resp. $n=3m+1$, sont déterminés par des unités binomiales de K (méthode initialisée par Ward [46] lorsque $N \neq \pm 1$ et indépendante du théorème de Thue). Le nombre de

ces unités, solutions des équations (voir §.3),

$$\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\rho + y) = 1, \quad \text{pour } \rho = \omega, \text{ resp. } \rho = \alpha,$$

est limité par un théorème de Delaunay [14, p.402]. Ces équations fournissent, en général, plus de solutions que la suite (U_n) n'a de zéros comme l'indique la démonstration de la proposition 5 (§.3). La formule de Cayley [29, p.213] présente le même inconvénient, l'exemple suivant permet de s'en convaincre:

La fonction symétrique complète définie par $U_{n+3} = -6U_{n+1} + 6U_n$ est reliée à l'équation de Nagell [29, p.246][19], $y^2 - x^3 = 17$, mais 3 seulement des 8 solutions de cette équation donnent des zéros à la suite (U_n) ; ce qui n'incite guère à utiliser les résultats avancés de Silverman [40].

La réduction du nombre de zéros d'une suite (U_n) à 4 au plus (5 ou 6 dans 2 cas particuliers) s'effectue directement par l'algorithme de rehaussement de Delaunay (§.2), différents critères d'arrêt de cet algorithme, dus à Delaunay, Hemer [19], Gordon et Mohanty [18], s'appliquant à cette situation.

Que peut-on retenir de cette méthode, certainement le principe de l'algorithme de rehaussement: sa fonction est de déterminer un chemin vers une solution dans l'arbre des ordres cubiques, les "facteurs de montée" dans ces ordres étant reliés aux nombres de Schützenberger d'ordre 3 [16]; on peut étendre les critères d'arrêt de cet algorithme, en les considérant comme des applications du théorème de Strassmann [12, p.62]]; les relations (1.3) et (1.6) permettent alors le calcul des zéros dans de nombreux cas, mais ceci est une autre histoire (en préparation).

§.1 Rappel

Dans la suite, le polynôme f est non dégénéré. Les zéros d'une s.r.l solution de (R) vérifient, via la formule (1.2), l'équation:

$$(E) \quad \lambda = v_n = \mu\alpha^n + \nu\beta^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad ((v_n) \text{ s.r.l binaire});$$

et il s'agit maintenant d'estimer la multiplicité d'une récurrence binaire (i.e. le nombre maximum de termes de la suite prenant une valeur donnée).

En 1955, Ward [47] montre qu'une suite (u_n) solution de (R) admet au plus 3 zéros si le polynôme f est décomposé dans $\mathbb{Z}$ (cf. [11],[32]); Smiley (1956)[42] étend ce résultat au cas où toutes les racines de f sont réelles (cf. [37]).

Ward [50], lors d'une conférence à Boulder (1959), énonce une conjecture limitant à 5 le nombre de zéros d'une suite vérifiant (R), lorsque le polynôme f a des racines complexes et $N \neq \pm 1$; la suite de Berstel et Mignotte (1973) [26], avec 6 zéros, modifie cette conjecture; la limite passant ensuite de 5 à 6 zéros, Kubota [20, p.99].

Le cas où $f(z) = (z-a)(z^2-Lz+M)$ a été résolu par les travaux de Kubota (1977) [20], améliorés par Beukers (1980) [5]; Györy (1987, lettre) apporte la précision suivante: Pour chaque $\lambda \neq 0$ entier, l'équation $v_n = \lambda$ admet au plus 2 solutions, à l'exception d'un nombre fini de couples $(v_0, v_1) \in \mathbb{Z}^2$.

Dans le 2^d cas, f est irréductible. Des résultats partiels ont été obtenus par Picon (1974) [31]. L'équation (E), définie dans le corps de décomposition de f , se met sous la forme:

$$1 = v_n = \mu \alpha^n + \bar{\mu} \bar{\alpha}^n \quad (\bar{\mu}, \bar{\alpha} \text{ conjugués complexes de } \mu, \alpha).$$

Les résultats généraux de Beukers et Tijdeman (1984) [6,43], de Lewis et Turk (1985) [23], (voir aussi [17, thm.2]), fournissent respectivement:

-une borne absolue dans le 2^d cas de la conjecture : 44 si la suite est à valeurs dans $\mathbb{Q}$ (Györy, 1985 lettre) et, Beukers obtient le nombre maximum de 7 zéros (non publié) [39, p.98];

-une borne effective (non calculée) pour la taille des solutions de l'équation $v_m = v_n$.

La multiplicité des récurrences cubiques est peu connue, Mignotte (1986) [27] met en oeuvre, sur une suite particulière, les méthodes élaborées dans un cadre plus général [28] (cf. [44]).

Une question reliée est l'existence d'un algorithme décrivant l'ensemble des zéros d'une récurrence linéaire d'ordre $k \geq 3$. Si la suite est de multiplicité infinie la question est résolue par le,

THEOREME (Lech-Mahler-Skolem, d'après [4,12]) *Soient K un corps de caractéristique 0, $c \in K$, (u_n) une suite dans K vérifiant une relation de récurrence;*

$$u_n = c \text{ pour un nombre fini de } n \text{ ou bien,}$$

$$u_n = c \text{ pour tous les } n \text{ de certaines progressions arithmétiques.}$$

et il existe un algorithme permettant de décider si une suite de nombres algébriques possède une infinité de termes nuls ([4,35]).

La question est ouverte si la suite a un nombre fini de zéros; les méthodes locales permettent d'estimer ce nombre pour une s.r.l à valeurs dans un corps de nombres, l'estimation la plus récente est due à Vereshchagin [45], le théorème de Barsky [34,35] donne cependant une formule plus générale et transparente. Le théorème de Strassmann permet de calculer les zéros d'une suite particulière (cf. [12,13]).

Les propriétés des récurrences linéaires, les méthodes utilisées et les problèmes ouverts sont exposés dans [12,13,33], (pour d'autres aspects voir [7,22]) et dans le livre spécialisé de Shorey et Tijdeman [39] où figurent une importante bibliographie et ...de nombreuses constantes.

Notations La série génératrice d'une suite (u_n) solution de (R) est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$,

$$(1.1) \quad \sum_{0 \leq n} u_n T^n = \frac{P(T)}{(1-\omega T)(1-\omega' T)(1-\omega'' T)}$$

$P(T) = (u_2 - Su_1 - Qu_0)T^2 + (u_1 - Su_0)T + u_0$; $\omega', \omega'', \omega$ sont les racines distinctes de f . La décomposition en éléments simples de cette fraction conduit à l'expression bien connue,

$$(1.2) \quad u_n = A\omega^n + B\omega'^n + C\omega''^n \quad (n \in \mathbb{N}),$$

où $A = g(\omega)/f'(\omega)$, $g(z) = P(1/z)z^2$ et, de même pour B et C .

Si $(U_n), (V_n), (W_n)$ désignent les solutions particulières de (R), avec les conditions initiales respectives $(u_0, u_1, u_2) = (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)$ alors d'après [3, 46],

$$(1.3) \quad u_{n+r} = u_{r+2}U_n + u_{r+1}V_n + u_rW_n \quad (n, r \in \mathbb{N}).$$

Quand $u_n = U_n$, le produit des séries géométriques figurant au second membre de (1.1) donne l'expression suivante,

$$\text{DEFINITION 1} \quad U_{n+2} = \sum_{i+j+k=n} \omega^i (\omega')^j (\omega'')^k$$

est la fonction symétrique complète de poids $n \in \mathbb{N}$, des racines du polynôme f .

Ward [48] appelle cette fonction une somme de produits homogènes. U_{n+2} est à l'ordre 3 ce que la fonction de Lucas de la 1^{ère} sorte est à l'ordre 2, [10].

L'expression de U_{n+2} en termes de fonctions symétriques élémentaires est classique, soient $e_0=1, e_1=S, e_2=-Q, e_3=N, e_4=0$ sinon, la fonction U_{n+2} est égale au déterminant de $(e_{1-i+j})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'après [21, 24]. Il s'en déduit une formule combinatoire,

$$(1.4) \quad U_{n+2} = \sum_{1+2j+3k=n} \frac{(1+j+k)!}{i!j!k!} S^i Q^j N^k;$$

et l'expression suivante de ω^n (resp. ω'^n, ω''^n) vient de [3],

$$(1.5) \quad \omega^n = U_n \omega^2 + V_n \omega + W_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si le polynôme f est irréductible, la norme des 2 membres de (1.5) détermine lorsque $U_n=0$, une équation de Thue:

$$N^n = \text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\omega+y) = Nx^3 - Qyx^2 + Sxy^2 + y^3;$$

et plus généralement,

$$(1.6) \quad \text{si } u_r = u_{n+r} = 0 \quad \text{alors} \quad \omega^n = x\rho_r + y,$$

où ρ_r dépend de ω , u_{r+2} et u_{r+1} ; le couple (x,y) d'entiers rationnels vérifie l'équation:

$$N^n = \text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(x\rho_r + y),$$

qui peut être étudiée par les changements de variables de Lagrange [14, p.380] ou suivant la méthode locale de Bombieri et Schmidt [8, §6].

§.2 Un cas particulier - Algorithme de Delaunay et critères d'arrêt

(2.1) La suite de Berstel et Mignotte [13,26]

C'est une fonction symétrique complète définie par $U_0=U_1=0$, $U_2=1$ et le polynôme caractéristique: $f(z) = z^3 - 2z^2 + 4z - 4$.

Dans le corps $K = \mathbb{Q}(\omega)$ ($\omega \in \mathbb{R}$ et $f(\omega) = 0$), l'ordre maximum est $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < 1$ est l'unité fondamentale définie par $\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1$, $\text{Disc}(\varepsilon) = -44$, les relations suivantes ont lieu:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{Z}[\varepsilon] = \mathbb{Z}[\alpha] & & \omega^3 = 4\varepsilon, \\ \left| \begin{array}{c} \text{indice 2} \\ \mathbb{Z}[\varepsilon^2] = \mathbb{Z}[\omega] \end{array} \right. & & \omega = \varepsilon^2 + 1, \\ & & \alpha = \varepsilon - 1, \quad \alpha\omega = 2. \end{array}$$

La formule combinatoire (1.4) permet d'écrire pour $m \geq 0$:

$$2U_{3m} = 4^m X_m, \quad U_{3m+1} = 4^m Y_m, \quad U_{3m+2} = 4^m Z_m, \quad \text{où } \omega^m = U_m \omega^2 + V_m \omega + W_m, \quad m \in \mathbb{N},$$

et de même pour α , avec U'_m , X'_m , etc...

Il s'en déduit, par $\omega^3 = 4\varepsilon$, pour $m \geq 0$,

$$\begin{aligned} \varepsilon^m &= X_m \omega^2 / 2 + (Y_m - X_m) \omega + Z_m - 2Y_m + 2X_m, \\ \varepsilon^m &= Y_m \alpha^2 + (X_m - 2Y_m) \alpha + Z_m, \end{aligned}$$

et les formules analogues pour $m \leq 0$, en étendant la définition de U_n par,

$$U'_{n+2} = 2^{n+2} U_{-n-1}.$$

Les zéros de la suite (U_n) sont alors déterminés de la façon suivante:

$$\begin{aligned} U_{3m} = 0 & \iff \varepsilon^m = x\omega + y \iff (\varepsilon^2)^{m/2} = u\varepsilon^2 + v; \\ U_{3m+1} = 0 & \iff \varepsilon^m = x\alpha + y \iff \varepsilon^m = u\varepsilon + v. \end{aligned}$$

La table des unités binomiales [14, p.417] donne le résultat:

$$\begin{aligned} m/2 \in \{0, 1\} & \iff U_0 = U_6 = 0; \\ m \in \{0, 1, 4, 17\} & \iff U_1 = U_4 = U_{13} = U_{52} = 0. \end{aligned}$$

Une question légitime est alors, comment s'obtiennent ces unités binomiales?

(2.2) Soient ρ un entier d'un corps cubique de discriminant négatif et ε , $0 < \varepsilon < 1$, l'unité fondamentale de l'ordre $\mathbb{Z}[\rho]$. Toute solution de l'équation,

$$f_\rho(x,y) = \text{Norm}(x\rho+y) = 1, \text{ est une unité binomiale en } \rho, \varepsilon^k = x\rho+y, \quad k \in \mathbb{Z},$$

et réciproquement. Les théorèmes de Delaunay, de Nagell [14, p.402 ; 30, p.52] limitent le nombre de ces unités binomiales (table [14, pp.303 et 417]). Des tables plus étendues d'unités fondamentales figurent dans [1,41], voir [38] pour d'autres références et [2] pour une méthode de calcul plus récente.

Soient $\varepsilon^k = B\rho + D$ une unité binomiale en ρ , $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice de $GL(2, \mathbb{Z})$ avec $AD - BC = \pm 1$, $\theta = (A\rho + C)/(B\rho + D)$, alors les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\theta]$ sont égaux; en d'autres termes les formes cubiques binaires f_ρ et f_θ sont équivalentes:

$$f_\rho(x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = f_\theta(x', y') \quad ; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

(2.3) L'algorithme de rehaussement de Delaunay [14, p.386; 30, p.48]

Les unités binomiales d'un ordre cubique $\mathbb{Z}[\rho]$ de discriminant négatif, sont déterminées par l'algorithme suivant:

Soit $\varepsilon = a\rho^2 + b\rho + c$, une unité fondamentale de $\mathbb{Z}[\rho]$, il s'agit de trouver les exposants entiers n , tels que :

$$(*) \quad \varepsilon^n = x\rho + y,$$

on peut supposer que $n \in \mathbb{N}$ d'après (2.2) et prendre l'unité ε directe, positive. Ces unités binomiales vérifient les égalités suivantes, où s désigne la trace de ρ :

$$\varepsilon'^n - \varepsilon''^n = x(\rho' - \rho''), \quad x = (-a\rho + b + as)(\varepsilon'^n - \varepsilon''^n)/(\varepsilon' - \varepsilon'').$$

Soit $K\delta^2 = \text{Norm}(-a\rho + b + as)$ où $\delta = (a, b)$, alors K divise x , et les solutions de l'équation (*) appartiennent à l'ordre $\mathbb{Z}[K\rho]$. Après avoir posé $x = Kx_1$, $\rho_1 = K\rho$, et calculé l'unité $\varepsilon_1 = \varepsilon^\nu$ pour le plus petit entier $\nu \geq 1$ tel que $\varepsilon_1 \in \mathbb{Z}[\rho_1]$, le processus se répète dans l'ordre $\mathbb{Z}[\rho_1]$, l'équation (*) s'écrivant:

$$\varepsilon_1^{n/\nu} = x_1\rho_1 + y \quad \text{avec,} \quad \varepsilon_1 = a_1\rho_1^2 + b_1\rho_1 + c_1.$$

Si $K \neq \pm 1$ et si l'équation (*) admet une solution non triviale ($x \neq 0$), l'algorithme s'arrête après épuisement des diviseurs de x , il y a une seule solution non triviale par [14, thms. p.385 et 387].

Si $K = \pm 1$, l'algorithme ne peut pas commencer, les ordres $\mathbb{Z}[\rho]$ et $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ sont égaux; les équations déduites de (*) selon la parité de n , sont traitées suivant le même principe, il y a au plus deux solutions avec $x \neq 0$ sauf dans trois cas: si $\text{Disc}(\rho) = -23, -31$ ou -44 (ε fondamentale), par [14, thm. p. 398].

Si l'équation (*) admet la seule solution triviale, l'algorithme se poursuit indéfiniment, et on ne peut l'utiliser sans disposer de critères d'arrêt. Hemer[19], Gordon et Mohanty [18], ont étendu le champ d'application d'un critère de Delaunay [14, p.410] :

Si, à une certaine étape de l'algorithme, l'unité $\varepsilon^\mu = a_i \rho_i^2 + b_i \rho_i + c_i$ admet un diviseur premier π de la 1^{ère} sorte : $\pi \mid b_i$ et $\pi \nmid a_i$, alors aucune puissance entière non nulle de ε^μ n'est binomiale en ρ . (π est un diviseur de ε^μ de la 2^{de} sorte si $\pi \mid b_i$ et $\pi^2 \mid a_i$).

L'usage des déterminants " Δ ", " ∇ ", introduits par Delone et Fadeev [14, p.411] pour calculer ε^μ modulo π^2 , rend ce critère très efficace, dès que ρ , ε , et π où $\pi \mid K$ sont donnés.

Il n'est pas difficile, vu la nature locale de ces critères, de les considérer comme des applications du théorème de Strassmann. Cette interprétation ne donne pas, semble-t-il, de réponse à la question essentielle: Peut-on mettre en oeuvre ces critères d'arrêt à une certaine étape de l'algorithme, lorsque l'équation (*) admet la seule solution triviale? Dans les conditions de la 3^{ème} étape (§.3), la réponse est positive.

§.3 Zéros d'une classe de fonctions symétriques complètes

Cette étude s'effectue en 3 étapes, les démonstrations figurent dans [15].

(3.1) Soient K un corps cubique réel de discriminant négatif, $\mathcal{O}_K$ l'ordre maximum et, $0 < \varepsilon_0 < 1$ l'unité fondamentale directe de $\mathcal{O}_K$, chaque unité de K est de la forme $\pm \varepsilon_0^n$ ($n \in \mathbb{Z}$). On considère les entiers de K , ε et ω , définis respectivement par,

$$\varepsilon^3 = S_1 \varepsilon^2 + Q_1 \varepsilon + 1 \text{ et } \omega^3 = S\omega^2 + Q\omega + N, \quad (N \neq 0, \pm 1);$$

et vérifiant la relation ($\text{Norm}(\omega)$ désigne $\text{Norm}_{K/\mathbb{Q}}(\omega) = \omega' \omega'' \omega$),

$$(A) \quad \omega^3 = \varepsilon \text{ Norm}(\omega).$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que l'entier rationnel $N = \text{Norm}(\omega)$ est positif et libre de cubes. On pose $N = a^2 b$, $\bar{N} = ab^2$ où a et b sont positifs, libres de carrés et vérifient $(a, b) = 1$ et $ab \geq 2$.

Le nombre α de K est défini par $\alpha\omega = ab$. Comme $\alpha^3 = \bar{N}\varepsilon^{-1}$ on peut choisir l'unité ε directe, il existe alors un entier rationnel $k \geq 1$ tel que $\varepsilon = \varepsilon_0^k$. Si l'unité ε n'est pas un cube et vérifie (A), il est clair que l'unité ε_0 ou son carré est aussi de cette forme (cf. [9, pp. 100 et 244]).

La 1^{ère} étape consiste à déterminer les entiers ω et ε tels que $\omega^3 = \varepsilon \text{Norm}(\omega)$

Soient q et s des entiers rationnels non nuls simultanément, on pose:

$$\Delta = (s - aq^2)(q + bs^2) - qs, \quad D = 4ab\Delta + 3(3 + abqs)^2.$$

PROPOSITION 1 *Si ε et ω vérifient les conditions (3.1), alors il existe des entiers rationnels q et s tels que:*

i) ω est défini par $\omega^3 = abs\omega^2 + a^2bq\omega + a^2b$.

ii) L'ordre $\bar{O} = \mathbb{Z}[1, \omega, \alpha]$ a pour discriminant $-(ab)^2 D$; a (resp. Δ) est l'indice de ω (resp. ε) dans l'ordre $\bar{O}$.

iii) L'expression de ε comme fraction linéaire de ω est la suivante,

$$\varepsilon = \frac{\omega(s-aq^2) - aq}{\omega s - a(q+bs^2)}.$$

L'indice de l'ordre $\bar{O}$ dans l'ordre maximum est premier avec ab ([9, p.257]).

LEMME 1 Sous les hypothèses et avec les notations de la proposition 1,

i) Si $q=0$ alors $s=-1$ et, $ab=2$ ou $b=1$ et $a=3,5,6$; sinon $q \neq 0$.

ii) Si $s \neq 0$ et $\Delta = \pm a$ alors $\gamma = (s/a)\varepsilon + (q^2-s/a)$ est une unité inverse positive.

iii) Si $q \neq 0$, $q+bs^2 \neq 0$ et $\Delta = \pm b$ alors $\delta = (s^2+q/b)\varepsilon - q/b$ est une unité inverse positive.

L'assertion (ii) exprime que l'équation $f_\varepsilon(x,y) = 1$ possède au moins 3 solutions 1, ε , γ .

L'unité ε étant donnée par (S_1, Q_1) , on peut déterminer les entiers ω dépendant des paramètres (a,b,s,q) . Si K est un corps cubique pur, $(-\text{Disc}(K))$ est un carré, il y a 0 ou 3 entiers ω solutions, sinon il y en a au plus 1 (voir table).

Dans la 2^e étape le nombre maximum de zéros d'une telle fonction symétrique complète est limité à 5, 6 dans un cas particulier.

(3.2) Hypothèse: La suite (U_n) (définition 1) correspond à un entier ω vérifiant les conditions (3.1): $\omega^3 = N\varepsilon$, $N=a^2b$.

Pour décrire les zéros de la suite (U_n) on définit les suites,

$$aU_{3m} = X_m N^m, \quad U_{3m+1} = Y_m N^m, \quad U_{3m+2} = Z_m N^m, \quad (m \geq 0);$$

elles vérifient la formule (1.4) qui prend la forme:

$$(B) \quad \sum_{i+2j+3k=3m+r-2} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} s^i q^j b^{i+j+k-m} a^{m-1-k+[r/2]},$$

où $r = 0, 1, 2$ et $[r/2]$ désigne la partie entière de $r/2$.

Soit (U'_n) la suite correspondant à α avec $\alpha^3 = \bar{N}\varepsilon^{-1}$, $\bar{N}=ab^2$; pour $m \geq 0$ on définit de même les suites X'_m, Y'_m, Z'_m , elles vérifient la formule déduite de (B), en échangeant a et b , s et $-q$. U_{n+2} et U'_{n+2} sont les fonctions symétriques complètes, de poids n , correspondant à ω et α ,

$$N \sqrt[3]{(N\bar{N})}^n U_{-n-1} = U'_{n+2} = \sqrt[3]{(N\bar{N})}^n \sum_{i+j+k=n} \omega^{-i} (\omega')^{-j} (\omega'')^{-k}.$$

On peut alors étendre la définition 1 aux entiers rationnels.

DEFINITION 2 Pour $n \geq 0$, $N U_{-n-1}$ est la fonction symétrique complète de poids $-n$, correspondant à l'entier ω de norme N .

PROPOSITION 2 Sous l'hypothèse (3.2), les zéros de la suite (U_n) , $n \in \mathbb{Z}$, sont déterminés par les unités binomiales:

de l'ordre $\mathbb{Z}[\omega]$ si $n=3m$, de l'ordre $\mathbb{Z}[\alpha]$ si $n=3m+1$ et, $U_n \neq 0$ si $n=3m+2$.

THEOREME 1 Soit (U_n) une suite vérifiant l'hypothèse (3.2). Le nombre de zéros de la suite (U_n) est compris entre 2 et 4, sauf dans 2 cas où ce nombre est égal à 6 (resp. 5). Le nombre maximum de 6 zéros est obtenu par la suite de Berstel et Mignotte (voir table).

Démonstration Un zéro de la suite (U_n) est un entier rationnel n tel que $U_n = 0$. D'après la proposition 2, l'unité ε^k avec $k=(n-1)/3$, resp. $k=n/3$, est solution de l'équation $f_\alpha = 1$, resp. $f_\omega = 1$.

D'après les théorèmes de Delaunay et de Nagell, on distingue 3 cas:

Si $\text{Disc}(\omega)$ et $\text{Disc}(\alpha)$ sont strictement inférieurs à -44 , chacune de ces équations possède au plus 3 solutions et au moins 1 ($U_0=0$, $U_1=0$) et, la proposition 5 limite dans ce cas le nombre de solutions à 5. En dehors du 1^{er} cas de la proposition 4 (ii) où il y a 5 solutions, la réduction du nombre de solutions à 4 est réalisée dans la 3^{ème} étape.

Si $\text{Disc}(\omega)$ ou $\text{Disc}(\alpha)$ est égal à -44 , le nombre de 6 solutions est atteint dans le 1^{er} cas de la proposition 4 (i).

Enfin, d'après la proposition 1, $(ab)^2$ divise $\text{Disc}(\omega)$ et $\text{Disc}(\alpha)$, $ab \geq 2$, ces discriminants ne prennent pas les valeurs -23 et -31 . ■

Le groupe des unités de K étant de la forme $\{\pm \varepsilon_0^n, n \in \mathbb{Z}\}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varepsilon^k \in \mathbb{Z}[\omega]$. Les ordres de discriminants -44 , -76 nécessitent un traitement particulier.

PROPOSITION 3 Sous l'hypothèse (3.2), soit $k \geq 1$ le plus petit entier rationnel tel que $\mathbb{Z}[\varepsilon^k] = \mathbb{Z}[\omega]$, alors $k=1$ ou 2 . Si $k=2$, il y a deux unités ε vérifiant cette condition:

$$\varepsilon^3 = -\varepsilon^2 - \varepsilon + 1, \text{Disc}(\varepsilon) = -44 \text{ et } \varepsilon^3 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon + 1, \text{Disc}(\varepsilon) = -76.$$

PROPOSITION 4 Sous l'hypothèse (3.2),

(i) il y a exactement 5 entiers ω tels que $\text{Disc}(\omega)$ ou $\text{Disc}(\alpha)$ soit égal à -44 , pour $\varepsilon = \varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \varepsilon_0^4, \varepsilon_0^5, \varepsilon_0^7$. Les suites (U_n) correspondantes ont pour zéros respectivement:

$n=0,1,4,6,13,52$; $n=-2,0,1,24$; $n=0,1,13$; $n=0,1$; $n=0,1$.

(ii) il y a exactement 3 entiers ω tels que $\text{Disc}(\omega)$ ou $\text{Disc}(\alpha)$ soit égal à -76, pour $\varepsilon = \varepsilon_0, \varepsilon_0^2, \varepsilon_0^5$. Les suites (U_n) correspondantes ont 5, 4 et 2 zéros:
 $n=-2,0,1,6,22$; $n=0,1,4,12$; $n=0,1$.

PROPOSITION 5 Sous l'hypothèse (3.2), si les discriminants des ordres $Z[\omega]$ et $Z[\alpha]$ sont différents de -44 alors, le nombre de zéros de la suite (U_n) correspondante est au plus égal à 5.

Démonstration On suppose que la suite (U_n) possède 3 zéros du type $n=3m$, d'après la proposition 2, m est déterminé par l'unité binomiale: $\varepsilon^m = x\omega + y$. L'algorithme (2.3) ne peut donc pas commencer et $Z[\varepsilon^k] = Z[\omega]$; par la proposition 3 on peut supposer que $k=1$ et, d'après la proposition 1,

$$Z[\varepsilon] = Z[\omega] \text{ est équivalent à } \Delta = \pm a.$$

Si $s \neq 0$, d'après le lemme 1 (ii), l'équation $f_\varepsilon = 1$ possède 3 solutions 1, ε et γ qui se déduisent par (2.2) et [14, thm.(Nagell) p.398], des unités binomiales:

$$1, \varepsilon_1 \text{ et } \varepsilon_1^\lambda = u\varepsilon_1 + v, \lambda \geq 3,$$

où $0 < \varepsilon_1 < 1$ est l'unité fondamentale de l'ordre $Z[\varepsilon]$.

Puisque $0 < \varepsilon < 1$ et $\gamma > 1$, il y a un seul choix:

$$\gamma = \varepsilon_1^{-1} \text{ et } \varepsilon = \varepsilon_1^{\lambda-1};$$

par identification, puis en remplaçant dans $\Delta = \pm a$, on obtient:

$$\varepsilon = u + v\gamma, \quad s = \pm a \text{ et } q^3 \pm 1 = \pm a^2 b(1 \mp q^2).$$

D'après la proposition 1, l'entier ω est défini par: $s=1, q=-2, a=1, b=3$.

Il y a 3 unités binomiales en ε_1 :

$$1, \varepsilon_1, \varepsilon_1^3 = -3\varepsilon_1 + 1 \text{ avec } \text{Disc}(\varepsilon_1) = -135;$$

l'équation $f_\varepsilon = 1$ admet 3 solutions mais, une seule unité binomiale triviale en $\varepsilon = \varepsilon_1^2$ est solution.

On vérifie aisément par (2.3) que la suite (U_n) possède 2 zéros: $U_0 = U_1 = 0$.

Par définition de Δ ,

$$\text{si } s=0 \text{ et } \Delta = \pm a \text{ alors } q = -1.$$

Si la suite (U_n) possède 3 zéros du type $n=3m+1$, le traitement est analogue.

Vu les conditions (3.1) portant sur a et b , les égalités suivantes, $Z[\varepsilon] = Z[\omega]$ et $Z[\varepsilon] = Z[\alpha]$, ne sont pas vérifiées simultanément. ■

COROLLAIRE 1 Sous les hypothèses de la proposition 5, l'une des conditions suivantes est nécessaire pour que la suite (U_n) possède 5 zéros:

$(q=-1 \text{ et } s=0) \text{ ou } (q=0 \text{ et } s=-1) \text{ ou } (q=-b \text{ et } s=\pm 1).$

La réduction du nombre de zéros de 5 à 4 fait l'objet de la 3^e étape et une table de zéros illustre la méthode utilisée

Sous certaines hypothèses, les critères d'arrêt de Gordon et Mohanty (§.2) s'appliquent directement, avec un nombre fini d'exceptions, aux équations:

$$\varepsilon^m = x\omega + y \quad \text{et} \quad \varepsilon^m = x\alpha + y,$$

qui déterminent les zéros de la suite (U_n) correspondante (proposition 2).

La proposition 6, s'appuyant sur le lemme 2, est utilisée dans la démonstration du théorème 2.

PROPOSITION 6 Sous l'hypothèse (3.2), soit $v > 1$ le plus petit entier rationnel tel que $\varepsilon^v \in \mathbb{Z}[\omega]$. Si $v \notin \{2, 3, 6\}$ alors l'équation $(\varepsilon^v)^k = x\omega + y$, $k \in \mathbb{Z}$, est impossible pour $k \neq 0$.

Si $\pi \in \mathbb{N}$ est un nombre premier et si $v \in \mathbb{N}$ vérifie $\pi^v \parallel R$, on pose $v_\pi(R) = v$; la propriété $v_\pi(R!) < R/(\pi-1)$ sert à établir le résultat suivant:

LEMME 2 Pour tous les entiers rationnels positifs i, j, k, m tels que: $i+2j+3k=3m-1-r$, $k \leq m-1-r$, $r=0$ ou 1 , pour $\pi \geq 5$ un diviseur premier de m ,

$$v_\pi \left(\frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} \pi^{m-1-k-r} \right) \geq v_\pi(m).$$

(3.3) Hypothèse: Les entiers α et ω , soumis à (3.2), engendrent un corps K de discriminant différent de -44 , et vérifient la relation $q+bs^2=0$ ($qs \neq 0$).

THEOREME 2 Sous l'hypothèse (3.3), une suite (U_n) possède 3 zéros: $n=0, 1, 4$; et dans 2 cas il y a un zéro supplémentaire:

$$n=12 \text{ si } \omega^3 = 2(\omega-1)^2; \quad n=9 \text{ si } \omega^3 = 3\omega^2 - 9\omega + 9.$$

Le cas des entiers de trace nulle est traité de façon analogue :

THEOREME 3 Sous l'hypothèse (3.2), si l'entier ω a une trace nulle alors la suite (U_n) correspondante possède 3 zéros: $n=0, 1, 3$ et dans 2 cas il y a un zéro supplémentaire: $n=10$ si $\omega^3 = -3\omega + 3$; $n=12$ si $\omega^3 = -6\omega + 6$.

Il y a 5 entiers ω tels que l'entier α ait une trace nulle: i) $\omega^3 = -2\omega^2 + 2$
ii) $\omega^3 = -2\omega^2 + 4$ iii) $\omega^3 = -3\omega^2 + 9$ iv) $\omega^3 = -5\omega^2 + 25$ v) $\omega^3 = -6\omega^2 + 36$.

Les suites (U_n) correspondantes ont pour zéros: $n=-2, 0, 1$ et les zéros supplémentaires: i) $n=24$ ii) $n=6, 22$ iii) $n=7$.

Les cas particuliers, au nombre de 26, apparus au cours des démonstrations des théorèmes 2 et 3, sont traités séparément au moyen des critères évoqués en (2.3), (cf. [15, §.4]).

Les résultats obtenus dans cette dernière étape sont résumés ci-dessous : (les zéros figurent dans les cadres en caractères gras).

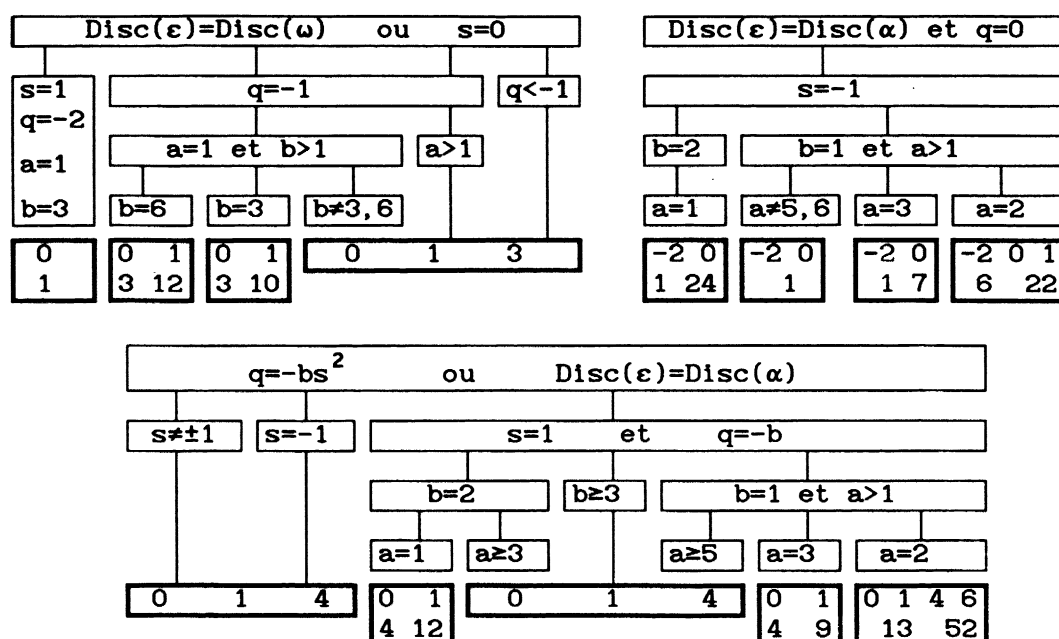


Table des zéros.

La table donne les zéros d'une suite (U_n) sous l'hypothèse (3.2):

$$U_{n+3} = a b s U_{n+2} + a^2 b q U_{n+1} + a^2 b U_n \quad \text{et} \quad U_2=1, U_1=U_0=0;$$

L'unité $\epsilon^3 = S_1 \epsilon^2 + Q_1 \epsilon + 1$ est désignée par $(S_1, Q_1, 1)$. Pour chaque ordre maximum considéré dans la table, $\epsilon = \epsilon_0$ est l'unité fondamentale, les suites correspondant à $\epsilon = \epsilon_0^2$ et qui ont 2 zéros ne sont pas mentionnées, pour les ordres de discriminant -44, resp. -76, -108 et -204, ϵ désigne ϵ_0 , ϵ_0^2 , ϵ_0^4 , resp. ϵ_0 , ϵ_0^2 .

REMARQUE: Compte-tenu de [23, pp.30 et 32] on peut se demander s'il existe, sous l'hypothèse (3.2), d'autres suites (U_n) à 4 zéros, en dehors de celles figurant dans la table et de la suite correspondant à $\omega^3 = -6\omega + 6$.

	a b s q	Δ D	$\epsilon=(S_1, Q_1, 1)$	ZEROS	#
-44	2 1 1 -1	1 11	$(-1, -1, 1)$	0, 1, 4, 6, 13, 52	6
	1 2 -1 0	-2 11	$(-1, -3, 1)$	-2, 0, 1, 24	4
	2 1 2 -2	-8 11	$(-5, -11, 1)$	0, 1, 13	3
-76	2 1 -1 0	-1 19	$(1, -3, 1)$	-2, 0, 1, 6, 22	5
	1 2 1 -2	2 19	$(-5, -7, 1)$	0, 1, 4, 12	4
-108	3 1 1 -1	1 12	$(-3, -3, 1)$	0, 1, 4, 9	4
	3 2 1 -1	-1 3		0, 1, 4	3
	6 1 -1 0	-1 3		-2, 0, 1	3
	1 3 -1 -1	-5 48	$(3, -15, 1)$	0, 1, 4	3
	2 3 0 -1	2 75		0, 1, 3	3
	1 6 1 -2	-10 3		0, 1	2
-135	3 1 -1 0	-1 15	$(0, -3, 1)$	-2, 0, 1, 7	4
-140	1 2 0 -1	1 35	$(3, -5, 1)$	0, 1, 3	3
-172	2 1 0 -1	2 43	$(3, -7, 1)$	0, 1, 3	3
-175	5 1 -1 0	-1 7	$(-2, -3, 1)$	-2, 0, 1	3
-200	5 1 1 -1	1 32	$(-7, -13, 1)$	0, 1, 4	3
-204	1 2 -1 -1	-3 51	$(5, -11, 1)$	0, 1	2
	2 1 0 -3	54 204	$(3, -111, 1)$	0, 1, 3	3
-216	3 1 -1 -1	-1 96	$(9, -21, 1)$	0, 1, 4	3
-268	2 1 -1 -1	-1 67	$(7, -13, 1)$	0, 1, 4	3
-324	1 3 1 -3	3 144	$(-15, -57, 1)$	0, 1, 4	3
-351	1 3 0 -1	1 39	$(3, -6, 1)$	0, 1, 3, 10	4
-364	1 2 0 -2	8 91	$(3, -19, 1)$	0, 1, 3	3

REFERENCES

- [1] I.O.Angell, *A table of complex cubic fields*, Bull. London Math. Soc. 5 (1973), 37-38.
- [2] T.Azuhata, *On the calculation of the units of algebraic number fields*, Nagoya Math. J. 101 (1986), 181-185.
- [3] E.T.Bell, *Notes on recurring series of the third order*, Tôhoku Math. J. 24 (1924), 168-184.
- [4] J.Berstel et M.Mignotte, *Deux propriétés décidables des suites récurrentes linéaires*, Bull. Soc. Math. France 104 (1976), 175-184.
- [5] F.Beukers, *The multiplicity of binary recurrences*, Comp. Math. 40 (1980), 251-267.
- [6] F.Beukers and R.Tijdeman, *On the multiplicities of binary complex recurrences*, Comp. Math. 51 (1984), 193-213.
- [7] J.P.Bezivin, *Sur un théorème de Pólya*, J. Reine Angew. Math. 364 (1986), 60-68.

- [8] E. Bombieri and W.M. Schmidt, *On Thue's equation*, Invent. Math. 88 (1) (1987), 69-82.
- [9] Z.I. Borevitch et I.R. Chafarevitch, *Théorie des Nombres*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.
- [10] R.D. Carmichael, *On sequences of integers defined by recurrence relations*, Quaterly J. Math. 48 (1920), 343-372.
- [11] -----, *On the numerical factors of the arithmetic forms $\alpha^n \pm \beta^n$* , Annals of Math. series 2, 15 (1913), 30-70.
- [12] J.W.S. Cassels, *Local fields*, London Math. Soc. Stud. Texts 3, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [13] L. Cerlienco, M. Mignotte et F. Piras, *Suites récurrentes linéaires. Propriétés algébriques et arithmétiques*, L'Enseignement Mathématique 33 (1987), 67-108.
- [14] B.N. Delone and D.K. Fadeev, *The theory of irrationalities of the third degree*, Transl. Math. Mono., vol. 10, A.M.S., 1964.
- [15] B. Deshommes, *Sur les zéros des fonctions symétriques complètes (cas cubique)* (1987), preprint.
- [16] M. Duboué, *Une suite récurrente remarquable*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou 1977/78, Paris, Exp. 27, 12pp.
- [17] J.H. Evertse, K. Györy, C.L. Stewart and R. Tijdeman, *On S-unit equations in two unknowns* (1987), preprint.
- [18] B. Gordon and S.P. Mohanty, *On a theorem of Delaunay and some related results*, Pacific J. Math. 68 (2) (1977), 399-409.
- [19] O. Hemer, *Notes on the Diophantine equation $y^2 - k = x^3$* , Arkiv för Mat. 3 (3) (1954), 67-77.
- [20] K.K. Kubota, *On a conjecture of Morgan Ward I, II, III*, Acta Arith. 33 (1977), 11-28, 29-48, 99-109.
- [21] A. Lascoux, *Suites récurrentes linéaires*, Advances in Applied Math. (1986), 1-8.
- [22] M. Laurent, *Equations exponentielles polynômes et suites récurrentes linéaires*, Soc. Math. de France, Astérisque 147-148 (1987), 121-139.
- [23] D.J. Lewis and J. Turk, *Repetitiveness in binary recurrences*, J. Reine Angew. Math. 356 (1985), 19-48.
- [24] I.G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Math. Mono., 1979.
- [25] K. Mahler, *On the Taylor coefficients of rational functions*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 52 (1956), 39-48.
- [26] M. Mignotte, *Suites récurrentes linéaires*, Sémin. Delange-Pisot-Poitou 1973/74, Paris, Exp. G 14, 9pp.
- [27] -----, *Détermination des répétitions d'une certaine suite récurrente linéaire*, Publicationes Mathematicae 33 (Debrecen, 1986), 297-306.
- [28] M. Mignotte, T.N. Shorey and R. Tijdeman, *The distance between terms of an algebraic recurrence sequence*, J. Reine Angew Math. 349 (1984), 63-76.
- [29] L.J. Mordell, *Diophantine equations*, Academic Press, London, 1969.
- [30] T. Nagell, *L'analyse indéterminée de degré supérieur*, Mémoires Sc. Math., vol. 39, Gauthier-Villars, Paris, 1929.

- [31] P.A.Picon, *Sur les termes nuls d'une suite récurrente cubique*, Rairo R-3, (1974), 47-61.
- [32] -----, *Sur certaines suites récurrentes cubiques ayant deux ou trois termes nuls*, Discrete Math. 21 (1978), 285-296.
- [33] A.J.Van der Poorten, *Some problems of recurrent interest*, Topics in classical number theory, vol. I, II (Budapest, 1981), 1265-1294, Coll. Math. Soc. János Bolyai, 34, North. Holland, Amsterdam-New York, 1984.
- [34] P.Robba, *Nombre de zéros des fonctions exponentielles-polynômes*, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 4^e année, 1976/77, n° 9, 3p.
- [35] -----, *Zéros des suites récurrentes linéaires*, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5^e année, 1977/78, n° 13, 5p.
- [36] M.Scarowsky, *On units of certain cubic fields and the diophantine equation $x^3+y^3+z^3=3$* , Proc. Amer. Math. Soc. 91 (1984), 351-356.
- [37] S.J.Scott, *On the number of zeros of a cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), 169-170.
- [38] D.Shanks, *A survey of quadratic, cubic and quartic algebraic number fields*, Proc. 7th S-E Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Louisiana State Univ. Baton Rouge, (february 1976), 15-40.
- [39] T.N.Shorey and R.Tijdeman, *Exponential diophantine equations*, Cambridge Tracts in Math. 87, Cambridge Univ. Press, 1986.
- [40] J.H.Silverman, *Integer points and the rank of Thue elliptic curves*, Invent. Math. 66 (1982), 395-404.
- [41] R.Smadja, *Calculs effectifs sur les idéaux des corps de nombres algébriques*, Marseille-Luminy (mars 1976).
- [42] M.F.Smiley, *On the zeros of a cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly 63 (1956), 171-172.
- [43] R.Tijdeman, *Multiplicities of binary recurrences*, Sémin. Théor. Nombres, Univ. Bordeaux I, 1980/1981, Exp. 29, 11pp.
- [44] N.K.Vereshchagin, *Occurrence of zero in a linear recursive sequence*, Mat. Zametki vol.38 (2) (1985), 177-189.
- [45] -----, *Effective upper bounds for the number of zeros of a linear recursive sequence*, Vestnik Moskov. Univ. Mat. vol.41 (1) (1986), 33-38.
- [46] M.Ward, *Notes on an arithmetical property of recurring series*, Math. Zeitschrift 39 (1934), 211-214.
- [47] -----, *On the number of vanishing terms in an integral cubic recurrence*, Amer. Math. Monthly 62 (1955), 155-160.
- [48] -----, *The vanishing of the homogeneous product sum of the roots of a cubic*, Duke Math. J. 26 (1959), 553-562.
- [49] -----, *The vanishing of the homogeneous product sum on three letters*, Duke Math. J. 27 (1960), 619-624.
- [50] -----, *Some Diophantine problems connected with linear recurrences*, Report Institute Th. Numbers, Univ. Colorado, Boulder (1959), 250-257.

DESHOMMES Bernadette,
15,rue de l'Ancienne Comédie
75006 PARIS

(11B37, 11R16)