

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

HERNANDO ENRIQUE SIERRA-MORALES

Les polynômes d'Hecke. Théorie p -adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 12, n° 1 (1984-1985), exp. n° 1, p. 1-16

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1984-1985__12_1_A1_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1984-1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES POLYNÔMES D'HECKE. THÉORIE p -ADIQUE
(d'après B. DWORK et A. ADOLPHSON)

par Hernando Enrique SIERRA-MORALES (*)

Soit p un nombre premier, $p \geq 3$. Soit $\mathbb{C}_p$ la complétion de la clôture algébrique du corps des nombres rationnels p -adiques. Soit $\mathbb{F}_\infty$ la clôture algébrique du corps $\mathbb{F}_p$. Soit $\bar{\lambda} \in \mathbb{F}_p$, $\bar{\lambda} \neq 0, 1$. On note par s l'ordre de $\bar{\lambda}$, c'est-à-dire

$$s = \text{ord}(\bar{\lambda}) = \inf\{s \in \mathbb{N}; \bar{\lambda} \in \mathbb{F}_{p^s}\}.$$

On considère la famille de courbes elliptiques de Legendre définies sur le corps $\mathbb{F}_{p^s}$ et d'équation affine E_λ

$$(0.1) \quad E_\lambda : y^2 - x(x-1)(x-\lambda x) = 0.$$

Il est bien connu que la fonction zéta associée à cette famille de courbes est de la forme

$$(0.2) \quad Z(\bar{\lambda}, T) = \frac{(1 - \pi_1(\bar{\lambda}) T)(1 - \pi_2(\bar{\lambda}) T)}{(1 - p^s T)}.$$

On va étudier l'expression

$$(0.3) \quad H_k(T) = \prod_{s \geq 1} \prod_{\substack{\text{ord}(\bar{\lambda})=s \\ \bar{\lambda} \neq 0,1}} \left[\prod_{j=0}^k (1 - \pi_1(\bar{\lambda})^j \pi_2(\bar{\lambda})^{k-j} T^s) \right]^{-1/s}.$$

IHARA [Ih-1] a démontré que de telles expressions sont reliées aux polynômes d'Hecke. Par la suite, DWORK [Dw-1] a montré que H_k pouvait s'interpréter à l'aide de ses cohomologies p -adiques, et ADOLPHSON [Ad-1] a mené à bien le programme de DWORK pour calculer le degré des polynômes H_k et établir leur équation fonctionnelle.

La variation de la cohomologie de E_λ est commandée par l'équation différentielle de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$. Ici, au lieu de travailler avec l'opérateur différentiel d'ordre 2 associé à ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$ comme DWORK et ADOLPHSON, nous travaillerons avec le système différentiel d'ordre 1 associé. Ceci simplifie l'exposition et permet d'éviter le recours au relèvement excellent de Frobenius et permet de ne pas avoir à exclure les classes supersingulières. Nous allons

(*) Hernando Enrique SIERRA-MORALES, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 PARIS CEDEX 05.

- (i) démontrer que H_k est un polynôme,
- (ii) déterminer le degré de H_k ,
- (iii) établir l'équation fonctionnelle.

Je remercie vivement Philippe ROBBA qui m'a guidé dans ce travail.

1. Etude de la fonction zéta à l'aide des cohomologies de Dwork.

(1.1) Cohomologie rationnelle. - Soit Λ le relèvement de Teichmüller de $\bar{\Lambda}$, noté $\Lambda := \text{Teich}(\bar{\Lambda})$.

Soit $\mathcal{E}_\Lambda := \mathbb{C}_p[x, \frac{1}{x}, \frac{1}{x-1}, \frac{1}{x-\frac{1}{\Lambda}}]$ l'espace des fonctions rationnelles avec ses pôles uniquement en $0, 1, \frac{1}{\Lambda}$ et ∞ .

Soit F_Λ la fonction définie par $F_\Lambda(x) := \sqrt{x(1-x)(1-\Lambda x)}$.

On considère le complexe de De Rham (C_Λ)

$$(C_\Lambda) \quad 0 \rightarrow F_\Lambda(x) \mathcal{E}_\Lambda \xrightarrow{d} F_\Lambda(x) \mathcal{E}_\Lambda dx \rightarrow 0$$

où d désigne la différentiation

$$d(F_\Lambda(x) u(x)) = \frac{\partial}{\partial x} (F_\Lambda(x) u(x)) dx.$$

Alors, d'après [Dw-3], $W = F_\Lambda(x) \mathcal{E}_\Lambda dx / dF_\Lambda(x) \mathcal{E}_\Lambda$ est un $\mathbb{C}_p(\Lambda)$ -module différentiel libre de rang 2, avec une base (pour la cohomologie rationnelle)

$$w_1(\Lambda) = [F_\Lambda(x) dx], \quad w_2 = [F_\Lambda(x) \frac{dx}{1-x}]$$

où $[F_\Lambda(x) u(x) dx]$ désigne l'image de la forme différentielle $F_\Lambda(x) u(x) dx$ dans l'espace quotient W .

(1.2) Cohomologie analytique. - Soit

$$A_\Lambda := B(0, 1^+) - (B(0, 1^-) \cup B(1, 1^-) \cup B(\frac{1}{\Lambda}, 1^-))$$

où $B(c, 1^+)$ est le disque fermé de centre c et de rayon 1, et $B(c, 1^-)$ est le disque ouvert de centre c et de rayon 1.

Soit $\mathcal{H}^\dagger(A_\Lambda)$ l'algèbre de Banach des fonctions analytiques p -adiques sur A_Λ surconvergentes.

On considère le complexe de De Rham (C_Λ)

$$(C_\Lambda) \quad 0 \rightarrow F_\Lambda(x) \mathcal{H}^\dagger(A_\Lambda) \xrightarrow{d} F_\Lambda(x) \mathcal{H}^\dagger(A_\Lambda) dx \rightarrow 0.$$

On utilisera librement les résultats de [Ro-1], [Ro-2] et [Ad-2]. Il en résulte en particulier que la cohomologie analytique et la cohomologie rationnelle coïncident

$$W \simeq F_\Lambda(x) \mathcal{H}^\dagger(A_\Lambda) dx / dF_\Lambda(x) \mathcal{H}^\dagger(A_\Lambda).$$

(1.3) Expression de la fonction zéta. - Si $\text{ord}(\bar{\lambda}) = s$, $\lambda^{p^s} = \lambda$, et du fait que

$$\frac{F_{\lambda}(x^{p^s})}{F_{\lambda}(x)} \in \mathbb{K}^{\dagger}(A_{\lambda}),$$

on sait, d'après [Dw-3], définir les applications Dwork $D_{\mathbb{P}^s}^0$, $D_{\mathbb{P}^s}^1$ telles que

$$D_{\mathbb{P}^s}^0 \circ \text{Frob}_{\mathbb{P}^s}^0 = p^s \text{ Identité},$$

$$D_{\mathbb{P}^s}^1 \circ \text{Frob}_{\mathbb{P}^s}^1 = p^s \text{ Identité},$$

où $\text{Frob}_{\mathbb{P}^s}^0$ et $\text{Frob}_{\mathbb{P}^s}^1$, sont les applications Frobenius sur le complexe de De Rham (C_{λ}) (voir [Dw-3], [Ro-4]; [Ro-1]).

Ainsi, par passage au quotient, il existe une application $\alpha^{(s)}$

$$(1.3.1) \quad \alpha^{(s)} : W \rightarrow W$$

telle que le numérateur de la fonction zéta est

$$(1.3.2) \quad \det(1 - T \alpha^{(s)}) = (1 - \pi_1(\bar{\lambda}) T)(1 - \pi_2(\bar{\lambda}) T).$$

2. Variation de la cohomologie.

(2.1) Système différentiel associé à $\mathbb{F}_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda)$. - On considère maintenant λ comme une variable, et $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}]$ comme l'espace de constantes. Ainsi le module différentiel W ,

$$W = (F_{\lambda}(x) \otimes_{\lambda} dx / dF_{\lambda}(x) \otimes_{\lambda})_{\lambda} \simeq F_{\lambda}(x) \mathbb{K}^{\dagger}(A_{\lambda}) dx / dF_{\lambda}(x) \mathbb{K}^{\dagger}(A_{\lambda})$$

peut être considéré comme un module différentiel libre de rang fini égal à 2 sur $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}]$, la dérivation sur W étant obtenue par passage au quotient de l'application $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ sur $F_{\lambda}(x) \mathbb{K}^{\dagger}(A_{\lambda}) dx$. (Car $\frac{\partial}{\partial \lambda} \circ d = d \circ \frac{\partial}{\partial \lambda}$ et donc $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ définit un morphisme du complexe C_{λ} .)

LEMME 1.- W est un $\mathbb{C}_{\mathbb{P}}[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}]$ -module différentiel libre de rang 2. Une base pour ce module différentiel est

$$(2.1.1) \quad w_1(\lambda) = [F_{\lambda}(x) dx], \quad w_2(\lambda) = [F_{\lambda}(x) \frac{dx}{1-x}].$$

La Matrice de dérivation pour cette base est

$$(2.1.2) \quad U(\lambda) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\lambda} & -\frac{1/2}{\lambda} \\ \frac{5/2}{1-\lambda} & -\frac{1}{1-\lambda} \end{bmatrix}.$$

Ce module différentiel a trois singularités régulières, 0, 1 et ∞ .

Remarque. - Le système différentiel d'ordre 1

$$(2.1.3) \quad \frac{d}{d\lambda} - U(\lambda)$$

est le système différentiel associé à ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$.

(2.2) Structure de Frobenius forte d'ordre 1 . - Puisque

$$\frac{F_{\lambda^p}(x^p)}{F_{\lambda}(x)} \in \mathcal{H}^{\dagger}(A_{\lambda}),$$

on montre, comme précédemment, que l'on peut définir une action de Dwork du complexe de De Rham C_{λ} , dans le complexe de De Rham C_{λ^p} , où

$$(C_{\lambda^p}) \quad 0 \longrightarrow F_{\lambda^p}(x) \mathcal{H}^{\dagger}(A_{\lambda}) \xrightarrow{d} F_{\lambda^p}(x) \mathcal{H}^{\dagger}(A_{\lambda}) dx \longrightarrow 0,$$

et donc, par passage au quotient, il existe une application

$$(2.2.1) \quad \alpha(\lambda) : W_{\lambda} \longrightarrow W_{\lambda^p}.$$

Soit $B = B(0, 1^+) - (B(0, 1^-) \cup B(1, 1^-))$, et considérons l'algèbre de Banach $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ des fonctions analytiques p -adiques sur B surconvergentes.

DWORK a démontré ([Dw-2], [Dw-3]) que la matrice $A(\lambda)$ de l'application $\alpha(\lambda)$, relativement aux bases $(w_1(\lambda), w_2(\lambda))$ et $(w_1(\lambda^p), w_2(\lambda^p))$, a ses coefficients dans $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$.

Considérons le module différentiel

$$W \otimes_{\mathbb{C}_p[\lambda, \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda-1}]} \mathcal{H}^{\dagger}(B)$$

comme un $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ -module différentiel que l'on notera encore W .

Le fait que les coefficients de $A(\lambda)$ appartiennent à $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ peut s'exprimer de la façon suivante.

LEMME 2.- W est un $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ -module différentiel libre de rang 2 muni d'une structure de Frobenius forte d'ordre 1.

3. Interprétation des H_k à partir de la cohomologie associée aux puissances symétriques du module différentiel W .

(3.1) Puissances symétriques du module différentiel de l'opérateur différentiel hypergéométrique. - Soit $S_k(W)$ la k -ième puissance symétrique du $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ -module différentiel W . On considère le complexe de De Rham D_k , où

$$(D_k) \quad 0 \longrightarrow S_k(W) \xrightarrow{d} S_k(W) d\lambda \longrightarrow 0.$$

LEMME 3.- Soit un nombre entier k , $k \geq 1$. $S_k(W)$ est un $\mathcal{H}^{\dagger}(B)$ -module différentiel libre de rang fini $k+1$, muni d'une structure de Frobenius forte d'ordre 1.

Démonstration. - $S_k(W)$ a seulement trois singularités régulières 0, 1 et ∞ puisque c'est le cas du $\mathcal{H}^\dagger(B)$ -module différentiel W .

Puisque W admet une base

$$\theta_\lambda = \begin{bmatrix} w_1(\lambda) \\ w_2(\lambda) \end{bmatrix},$$

alors

$$v_\lambda = \begin{bmatrix} v_0(\lambda) \\ \vdots \\ v_k(\lambda) \end{bmatrix}$$

est une base de $S_k(W)$, où $\forall j, j = 0, 1, \dots, k, v_j = v_j(\lambda) = w_1^j(\lambda) w_2^{k-j}(\lambda)$.

Comme W est muni d'une structure de Frobenius forte, l'application $\alpha_k(\lambda)$

$$(3.1.1) \quad \alpha_k(\lambda) : S_k(W_\lambda) \longrightarrow S_k(W_{\lambda^p})$$

produit tensoriel symétrique d'ordre k de l'application $\alpha(\lambda)$ est un isomorphisme.

La matrice $A_k(\lambda)$ de l'application $\alpha_k(\lambda)$ relativement aux bases v_λ et v_{λ^p} a donc ses coefficients dans l'espace $\mathcal{H}^\dagger(B)$. Cette matrice est dite matrice de Frobenius. Donc $S_k(W)$ est muni d'une structure de Frobenius forte d'ordre 1.

(3.2) Espace de cohomologie associé à D_k . - On a d'une part $\text{Ker}_{S_k(W)} d = \{0\}$.

D'autre part, comme $S_k(W)$ a seulement des singularités régulières 0, 1 et ∞ , puisque c'est le cas pour W , on peut donc appliquer les résultats de Christol-Adolphson ([Ch-1], [Ad-1], [Ro-2]) pour en déduire que si $V_k = S_k(W)/dS_k(W)$ est l'espace de cohomologie associé à D_k , alors

$$\dim V_k = \text{rang } S_k(W) \quad (\text{Nombre de trous de } B - 2)$$

où $\text{rang } S_k(W) = k + 1$ et Nombre de trous de $B = 3$, ainsi

$$\dim V_k = (k + 1)(3 - 2) = k + 1.$$

(3.3) Application de Dwork sur le complexe D_k . - Si

$$v = \begin{bmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix}$$

est une base de $S_k(W)$ et si $\underline{u} = (u_0, \dots, u_k) \in (\mathcal{H}^\dagger(B))^{k+1}$, on définit les applications de Dwork (les inverses des applications de Frobenius à facteur p -près)

$$D_{W/p}^0 : S_k(W) \longrightarrow S_k(W)$$

par

$$D_{W/p}^0 : \underline{u} \cdot v \longmapsto p^{-1}(\underline{u} \cdot A_k(\lambda)) \cdot v,$$

et de même, on définit

$$Dw_p^1 : S_k(W) d\lambda \longrightarrow S_k(W) d\lambda$$

par

$$Dw_p^1 : u.v \frac{d\lambda}{\lambda} \longmapsto \Psi(u A_k(\lambda)).v \frac{d\lambda}{\lambda}$$

avec Ψ l'opérateur $[Dw-3]$ tel que

$$(3.3.1) \quad \Psi(\xi)(Y) = \frac{1}{p} \sum_{t^p=Y} \xi(t) ;$$

ces deux applications ainsi définies ont la propriété $d \circ Dw_p^0 = Dw_p^1 \circ d$, par passage au quotient, ceci définit une application γ

$$(3.3.2) \quad \gamma : V_k \longrightarrow V_k$$

où $V_k = S_k(W)/dS_k(W)$.

PROPOSITION 1.

$$(3.3.3) \quad \det(1 - T\gamma) = H_k(T) .$$

Démonstration. - Soit $\gamma : V_k \longrightarrow V_k$ l'application définie en (3.3.2).

On sait que γ est un opérateur à trace, et d'après la formule de trace de Dwork ([Dw-2], [Se-1])

$$(3.3.4) \quad \text{Tr}(\gamma) = - \sum_{\substack{\lambda^p=\lambda \\ \lambda \neq 0,1}} \text{Tr}(A_k(\lambda)) ,$$

et également

$$(3.3.5) \quad \text{Tr}(\gamma^j) = - \sum_{\substack{\lambda^{p^j}=\lambda \\ \lambda \neq 0,1}} \text{Tr}(A_{k,(j)}(\lambda)) ,$$

où

$$(3.3.6) \quad A_{k,(j)}(\lambda) = A_k(\lambda) A_k(\lambda^p) \dots A_k(\lambda^{p^{j-1}}) .$$

Par ailleurs

$$(3.3.7) \quad \det(1 - T\gamma) = \exp\left(- \sum_{j \geq 1} \text{Tr}(\gamma^j) \frac{T^j}{j}\right) = \exp\left(- \sum_{\substack{\lambda^{p^j}=\lambda \\ \lambda \neq 0,1}} \left(- \sum_{j \geq 1} \text{Tr}(A_{k,(j)}(\lambda) \frac{T^j}{j})\right)\right)$$

puisque, lorsque $\lambda^{p^s} = \lambda$

$$A_{k,(ns)}(\lambda) = [A_{k,(s)}(\lambda)]^n , \quad \forall n, \quad n = 1, 2, \dots$$

On déduit de (3.3.7),

$$(3.3.8) \quad \det(1 - T_Y) = \exp\left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{\substack{\text{ord } \bar{\lambda}=s \\ \lambda \in \text{Teich}(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} \neq 0,1}} \text{Tr}(A_{k,(s)}(\lambda)) \frac{T^{sn}}{sn}\right)$$

ou encore

$$(3.3.9) \quad \det(1 - T_Y) = \prod_{s \geq 1} \prod_{\substack{\text{ord } \bar{\lambda}=s \\ \lambda \in \text{Teich}(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} \neq 0,1}} \exp\left[\frac{1}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \text{Tr}(A_{k,(s)}(\lambda))^n \left(\frac{T^s}{n}\right)^n\right]$$

c'est-à-dire, compte tenu de (1.3.2),

$$(3.3.10) \quad \det(1 - T_Y) = \prod_{s \geq 1} \prod_{\substack{\text{ord}(\bar{\lambda})=s \\ \lambda \in \text{Teich}(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} \neq 0,1}} [\det(1 - T^s A_{k,(s)}(\lambda))]^{-1/s}$$

$$= \prod_{s \geq 1} \prod_{\substack{\text{ord}(\bar{\lambda})=s \\ \lambda \in \text{Teich}(\bar{\lambda}) \\ \bar{\lambda} \neq 0,1}} \left[\prod_{j=0}^k (1 - \pi_1(\lambda)^j \pi_2(\lambda)^{k-j} T^s) \right]^{-1/s}.$$

Ainsi $\det(1 - T_Y) = H_k(T)$.

COROLLAIRE 1. - $H_k(T)$ est un polynôme de degré $k+1$.

Démonstration. - En effet, γ est un isomorphisme de V_k , donc $\deg(H_k) = \dim V_k$, d'où le corollaire d'après (3.2)

4. Equation fonctionnelle.

(4.1) Théorie duale. - On note

R'_0 := l'algèbre de Banach des fonctions analytiques dans la couronne $r < |x| < 1$ (r non précisé).

R'_1 := l'algèbre de Banach des fonctions analytiques dans la couronne $r < |x-1| < 1$ ($r < 1$ non précisé).

R'_∞ := l'algèbre de Banach des fonctions analytiques dans la couronne $1 < |x| < \frac{1}{r}$ ($r < 1$ non précisé).

On définit aussi $R'(B) = R'_0 \oplus R'_1 \oplus R'_\infty$. On a

$$(4.1.1) \quad \mathcal{K}^\dagger(B) \subset R'_0, \quad \mathcal{K}^\dagger(B) \subset R'_1, \quad \mathcal{K}^\dagger(B) \subset R'_\infty$$

et par l'application

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{K}^\dagger(B) &\longrightarrow R'(B) \\ \eta &\longmapsto (\eta, \eta, \eta) \end{aligned}$$

l'algèbre $\mathcal{K}^\dagger(B)$ se plonge, diagonalement, dans $R'(B)$.

On considère le module différentiel sur $R^1(B)$

$$(4.1.3) \quad \hat{S}_k(W) := S_k(W) \otimes_{\mathcal{H}^\dagger(B)} R^1(B)$$

et à partir du module différentiel

$$(4.1.4) \quad S_k^t(W) := \text{Hom}_{\mathcal{H}^\dagger(B)}(S_k(W), \mathcal{H}^\dagger(B)),$$

dual de $S_k(W)$ (au-dessus de $\mathcal{H}^\dagger(B)$), on construit l'espace

$$(4.1.5) \quad \hat{S}_k^t(W) := S_k^t(W) \otimes_{\mathcal{H}^\dagger(B)} R^1(B),$$

dual de $\hat{S}_k(W)$ (au-dessus de $R^1(B)$).

Ainsi $\hat{S}_k(W)$ et $\hat{S}_k^t(W)$ sont deux $R^1(B)$ -modules différentiels libres de rangs finis égaux à $k + 1$.

On définit, comme en [Dw-3], la forme linéaire sur $R^1(B)$ ("l'intégration sur le bord de B ").

Si $\xi \in R^1(B)$ et $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_\infty)$ avec $\xi_0 \in R_0^1$, $\xi_1 \in R_1^1$, $\xi_\infty \in R_\infty^1$,

$$(4.1.6) \quad \int_{\partial B}^\dagger \xi \, d\lambda := \text{Rés}(\xi_0) + \text{Rés}(\xi_1) + \text{Rés}(\xi_\infty),$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Rés}(\xi_0) &= a_{-1} \quad \text{si} \quad \xi_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \lambda^n \\ \text{Rés}(\xi_1) &= a_{-1} \quad \text{si} \quad \xi_1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (1 - \lambda)^n \\ \text{Rés}(\xi_\infty) &= -a_{-1} \quad \text{si} \quad \xi_\infty = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \lambda^n. \end{aligned}$$

D'après [Dw-3], l'intégration sur le bord de B nous permet le lemme suivant.

LEMME 4.

(i) La forme bilinéaire

$$\begin{aligned} R^1(B) \times R^1(B) &\longrightarrow \mathbb{C}_p \\ (\xi, \eta) &\longmapsto \int_{\partial B}^\dagger \xi \eta d\lambda \end{aligned}$$

est en dualité $R^1(B)$ avec lui-même

(ii) $\mathcal{H}^\dagger(B)$ est son propre polaire dans cette dualité

(4.2) Application symplectique. - On considère les complexes de De Rham D_k^t et $\hat{D}_k^t$ où

$$(D_k^t) \quad 0 \longrightarrow S_k^t(W) \xrightarrow{d} S_k^t(W) \, d\lambda \longrightarrow 0$$

et

$$(\hat{D}_k^t) \quad 0 \longrightarrow \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d} \hat{S}_k^t(W) \, d\lambda \longrightarrow 0.$$

On met en dualité $\hat{S}_k(W)$ et $\hat{S}_k^t(W) d\lambda$ par la dualité notée $\langle , \rangle$

$$(4.2.1) \quad S_k(W) \times S_k^t(W) d\lambda \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

$$(\eta, \eta^* d\lambda) \longmapsto \int_{\partial_B^+} \langle \eta, \eta^* \rangle d\lambda.$$

On met aussi en dualité $\hat{S}_k(W) d\lambda$ et $\hat{S}_k^t(W)$ par la dualité, notée encore $\langle , \rangle$,

$$(4.2.2) \quad \hat{S}_k(W) d\lambda \times \hat{S}_k^t(W) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

$$(\xi d\lambda, \xi^*) \longmapsto \int_{\partial_B^+} \langle \xi, \xi^* \rangle d\lambda.$$

Il résulte du lemme 4 que $S_k^t(W) d\lambda$ est l'espace polaire de $S_k(W)$ pour la dualité (4.2.1), donc l'espace dual de $S_k(W)$ peut s'identifier à l'espace

$$\hat{S}_k^t(W) d\lambda / S_k(W) d\lambda.$$

Egalement, l'espace dual de $S_k(W) d\lambda$ peut s'identifier à l'espace $\hat{S}_k^t(W) / S_k(W)$.

Il est clair que, dans cette dualité, la transposée de la différentiation d est $-d$. Comme d envoie $S_k^t(W)$ dans $S_k^t(W) d\lambda$, on peut définir, par passage au quotient, l'application

$$\bar{d} : \hat{S}_k^t(W) / S_k^t(W) \longrightarrow \hat{S}_k^t(W) d\lambda / S_k^t(W) d\lambda.$$

On a observé que dans la dualité définie ci-dessus, la transposée de d est $-d$. Il en résulte que dans cette dualité $K_k := \text{noyau de } \bar{d}$ s'identifie avec l'espace dual de l'espace $V_k := S_k(W) d\lambda / d S_k(W)$, car $d S_k(W)$ est fermé dans $S_k(W) d\lambda$.

Le diagramme commutatif suivant (dont les colonnes sont exactes)

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & S_k^t(W) & \xrightarrow{-d} & S_k^t(W) d\lambda & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \hat{S}_k^t(W) & \xrightarrow{-d} & \hat{S}_k^t(W) d\lambda & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & \hat{S}_k^t(W) / S_k^t(W) & \xrightarrow{\bar{d}} & \hat{S}_k^t(W) d\lambda / S_k^t(W) d\lambda & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & \end{array}$$

peut être interprété comme une suite exacte de complexes.

La suite exacte longue de cohomologie s'écrit

$$(4.2.3) \quad 0 \longrightarrow \text{Ker}_{S_k^t(W)} d \longrightarrow \text{Ker}_{\hat{S}_k^t(W)} d \longrightarrow K_k \xrightarrow{d} V_k^t \longrightarrow \hat{V}_k^t \longrightarrow \text{CoKer } \bar{d} \longrightarrow 0$$

l'application $\hat{d}$ est appelée application symplectique.

On en déduit la suite exacte

$$(4.2.4) \quad 0 \longrightarrow \text{Ker } \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d} \text{Ker } \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d} \text{Ker } \hat{d} \longrightarrow 0 .$$

Nous savons que $\text{Ker } \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d} \{0\}$, et donc

$$(4.2.5) \quad \text{Ker } \hat{d} \simeq \text{Ker } \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d} .$$

Déterminer $\text{Ker } \hat{S}_k^t(W) \xrightarrow{d}$ équivaut à la détermination des solutions dans $R'(B)$ du produit symétrique d'ordre k de l'opérateur différentiel

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1-2\lambda}{\lambda(1-\lambda)} \frac{d}{d\lambda} - \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)}$$

associé à la fonction hypergéométrique $F(\lambda) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \lambda\right)$.

On note

$$(4.2.6) \quad F(\lambda) := \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_j}{j!} \right)^2 \lambda^j$$

$$(4.2.7) \quad B(\lambda) := -2 \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_j}{j!} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{j} \right) \lambda^j$$

et $\mathcal{L}_k$ l'opérateur différentiel produit symétrique d'ordre k de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$.

Comme en [Ad-1] et [Dw-1], on a clairement

$$\text{Ker}_{R'(B)} \mathcal{L}_k = \text{Ker}_{R'_0} \mathcal{L}_k \oplus \text{Ker}_{R'_1} \mathcal{L}_k \oplus \text{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k$$

et donc

$$\dim \text{Ker}_{R'(B)} \mathcal{L}_k = \dim \text{Ker}_{R'_0} \mathcal{L}_k + \dim \text{Ker}_{R'_1} \mathcal{L}_k + \dim \text{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k .$$

LEMME 5.

$$\dim \text{Ker } \hat{d} = \dim \text{Ker}_{R'(B)} \mathcal{L}_k = \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ impair} \\ 3 & \text{si } k \text{ pair} . \end{cases}$$

Démonstration. - On sait que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$, où

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{d\lambda^2} + \frac{1-2\lambda}{\lambda(1-\lambda)} \frac{d}{d\lambda} - \frac{1}{4\lambda(1-\lambda)}$$

admet comme base de solutions $\{F(\lambda), G(\lambda)\}$ où

$$F(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\binom{k}{j}}{j!} \right)^2 \lambda^j$$

$$G(\lambda) = F(\lambda) \log \lambda - B(\lambda)$$

où $B(\lambda)$ est définie en (4.2.7).

Alors une base de l'espace des solutions de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_k$ est donnée par $\{G^k F^{k-j}\}$, $j = 0, 1, \dots, k$.

Ainsi toute solution $g(\lambda)$ de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_k$ est de la forme

$$(4.2.8) \quad g(\lambda) = \sum_{j=0}^k C_j [F^k (\log \lambda)^j + \sum_{s=0}^{j-1} B_s(\lambda) (\log \lambda)^s].$$

On voit que $g \in R'_0$ si, et seulement si, $C_j = 0$ pour $j \geq 1$, et donc les solutions de $\mathcal{L}_k$ dans R'_0 sont les multiples de F^k . Par conséquent,

$$(4.2.9) \quad \dim \operatorname{Ker}_{R'_0} \mathcal{L}_k = 1.$$

Du fait que l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ est stable par l'action $\lambda \mapsto 1 - \lambda$, on en déduit que la seule solution de $\mathcal{L}_k$ dans R'_1 est $F(1 - \lambda)^k$ et donc

$$(4.2.10) \quad \dim \operatorname{Ker}_{R'_1} \mathcal{L}_k = 1.$$

Du fait que $v(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ est solution de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}$ au voisinage de l'infini, et du fait que

$$u(\lambda) \equiv \lambda^{p-1/2} v\left(\frac{1}{\lambda}\right) \pmod{p}.$$

On trouve que,

si k est pair, $\lambda^{-k/2} F^k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ est solution de $\mathcal{L}_k$ dans R'_∞ ,

si k est impair, la seule solution de $\mathcal{L}_k$ dans R'_∞ est la solution identiquement nulle.

Donc

$$(4.2.11) \quad \dim \operatorname{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Alors de (4.2.9), (4.2.10) et (4.2.11), on déduit le lemme 5.

(4.3) Action de Frobenius et de Dwork sur le complexe $\hat{D}_k$. - Du fait que le module différentiel $S_k(W)$ est muni d'une structure de Frobenius forte d'ordre 1 (§ 3.3) et du fait que B est invariant par l'action de Frobenius, on peut définir les applications de Frobenius et de Dwork sur le complexe de De Rham $\hat{D}_k$

$$(\hat{D}_k) \quad 0 \longrightarrow \hat{S}_k(W) \xrightarrow{d} \hat{S}_k(W) \xrightarrow{d\lambda} 0.$$

Pour la dualité entre les complexes $(\hat{D}_k)$ et $(\hat{D}_k^t)$ définie au § 4.2, on trouve que les applications de Frobenius et de Dwork sont transposées l'une de l'autre.

Précisément on a le résultat suivant [Dw-3].

LEMME 6. - Si $\xi \in \hat{S}_k(W)$ et $\xi^* \in \hat{S}_k^t(W)$, on a

$$(4.3.1) \quad \int_{\partial^+ B} \langle \text{Frob}_p^0(\xi), \xi^* d\lambda \rangle = \int_{\partial^+ B} \langle \xi, Dw_p^1(\xi^* d\lambda) \rangle$$

$$(4.3.2) \quad \int_{\partial^+ B} \langle \text{Frob}_p^1(\xi d\lambda), \xi^* \rangle = \int_{\partial^+ B} \langle \xi d\lambda, Dw_p^0(\xi^*) \rangle$$

$$(4.3.3) \quad \int_{\partial^+ B} \langle Dw_p^0(\xi), \xi^* d\lambda \rangle = \int_{\partial^+ B} \langle \xi, \text{Frob}_p^1(\xi^* d\lambda) \rangle$$

$$(4.3.4) \quad \int_{\partial^+ B} \langle Dw_p^1(\xi d\lambda), \xi^* \rangle = \int_{\partial^+ B} \langle \xi d\lambda, \text{Frob}_p^0(\xi^*) \rangle$$

(4.4) Equation fonctionnelle. - Comme le module $F_\lambda(x) \mathcal{H}^t(A_\lambda)$ est canoniquement isomorphe à son module dual $F_\lambda^{-1}(x) \mathcal{H}^t(A_\lambda)$, il en résulte que l'application symplectique ([Dw-3] § 2.5) définit un isomorphisme τ entre le module différentiel W_λ^t , dual de W_λ , et W_λ

$$(4.4.1) \quad \tau : W_\lambda^t \longrightarrow W_\lambda.$$

Cet isomorphisme définit aussi un isomorphisme entre $W_{\lambda^p}^t$ et W_{λ^p} que nous noterons encore τ .

Par dualité, on déduit de l'isomorphisme $\alpha(\lambda)$, défini en (2.2.3), un isomorphe $\beta^*(\lambda)$,

$$\beta^*(\lambda) : W_\lambda^t \longrightarrow W_{\lambda^p}^t$$

et l'on a (d'après [Dw-3], Théorème 4.7)

$$(4.4.2) \quad \tau \circ \beta^*(\lambda) = \frac{1}{p} \alpha(\lambda) \circ \tau.$$

Si l'on considère maintenant le produit tensoriel symétrique d'ordre k , $S_k(W_\lambda)$, on a l'isomorphisme $\delta_k = S_k(\tau)$,

$$\delta_k : S_k^t(W_\lambda) = S_k(W_\lambda^t) \longrightarrow S_k(W_\lambda)$$

et de même entre $S_k^t(W_{\lambda^p})$ et $S_k(W_{\lambda^p})$.

On vérifie facilement que $\alpha_k = S_k(\alpha)$ et $\beta_k^* = S_k(\beta^*)$ se correspondent encore par dualité, et de la relation (4.4.2) on déduit

$$(4.4.3) \quad \delta_k \circ \beta_k^* = \frac{1}{p^k} \alpha_k \circ \delta_k.$$

De (4.4.3) et de la définition de l'application de Frobenius sur $S_k^t(W)$ découle immédiatement le lemme suivant.

LEMME 7.

$$\begin{array}{ccc} S_k^t(W) & \xrightarrow{\delta_k} & S_k(W) \\ \text{Frob}_p^0 \downarrow & & \downarrow \text{Frob}_p^0 \\ S_k^t(W) & \xrightarrow{\delta_k} & S_k(W) \end{array}$$

le diagramme ci-dessus est commutatif à un facteur p^k -près, c'est-à-dire

$$(4.4.4) \quad \delta_k \circ \text{Frob}_p^0 = p^k \text{Frob}_p^0 \circ \delta_k .$$

Au § 3.3, on a défini l'application $\gamma : V_k \dashrightarrow V_k$ comme l'application induite par l'action Dw_p sur le complexe D_k . Si l'on note β l'application sur V_k induite par l'action Frob_p sur le complexe D_k , on a

$$(4.4.5) \quad \gamma \circ \beta = p \text{ Identité.}$$

Par passage au quotient, δ_k définit l'isomorphisme

$$(4.4.6) \quad \delta : V_k^t \dashrightarrow V_k ,$$

où $V_k^t := S_k^t(W) \wedge / d S_k^t(W)$.

Donc le lemme 7 entraîne le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.

$$\begin{array}{ccc} V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \\ \gamma^t \downarrow & & \downarrow \gamma \\ V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \\ \beta^t \downarrow & & \downarrow \beta \\ V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \end{array}$$

les diagrammes ci-dessus sont commutatifs à facteur p^k -près, c'est-à-dire qu'on a

$$(4.4.7) \quad \begin{cases} \delta \circ \gamma^t = p^k \gamma \circ \delta \\ \delta \circ \beta^t = p^k \beta \circ \delta . \end{cases}$$

Comme $S_k^t(W)$ est stable par Frob_p^0 et Dw_p^0 , on obtient encore, par passage au quotient, des endomorphismes

$$\hat{S}_k^t(W)/S_k^t(W) \xrightarrow{\overline{Dw}_p^0} \hat{S}_k^t(W)/S_k^t(W)$$

et

$$\hat{S}_k^t(W)/S_k^t(W) \xrightarrow{\overline{\text{Frob}}_p^0} \hat{S}_k^t(W)/S_k^t(W) .$$

Puisque Dw_p et Frob_p sont des morphismes de complexes alors $K_k := \text{Ker } \bar{d}$ est stable pour les applications $\overline{Dw}_p^0$ et $\overline{\text{Frob}}_p^0$.

Nous noterons ces endomorphismes de K_k , γ^* et β^* respectivement.

Le lemme suivant découle de [Ro-3] § 5.5 et du corollaire 2.

LEMME 8.

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k & \xrightarrow{\hat{d}} & V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \\
 \gamma^* \downarrow & & \downarrow \gamma^t & & \downarrow p^{-k} \gamma \\
 K_k & \xrightarrow{\hat{d}} & V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k
 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccc}
 K_k & \xrightarrow{\hat{d}} & V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k \\
 \beta^* \downarrow & & \downarrow \beta^t & & \downarrow p^k \beta \\
 K_k & \xrightarrow{\hat{d}} & V_k^t & \xrightarrow{\delta} & V_k
 \end{array}$$

sont commutatifs.

Mais du lemme 8, il découle tout de suite le corollaire suivant.

COROLLAIRE 3.

β et γ sont stables sur $\text{Im } \delta \circ \hat{d}$

β^* et γ^* sont stables sur $\text{Ker } \delta \circ \hat{d}$.

On a vu au § 4.2 que $\hat{d}$ et $\delta \circ \hat{d}$ ne sont pas bijectives. Néanmoins $\delta \circ \hat{d}$ établit un isomorphisme entre $K_k / \text{Ker } \hat{d}$ et $\text{Im}(\delta \circ \hat{d})$. De plus, on vérifie facilement que, dans la dualité entre K_k et V_k , $\text{Ker } \hat{d}$ est le polaire de $\text{Im}(\delta \circ \hat{d})$.

Notons $\bar{\beta}^*$ l'application déduite de β^* par passage au quotient sur $K_k / \text{Ker } \hat{d}$. Il résulte du lemme 6 et de la remarque précédente que $\bar{\beta}^*$ est l'application transposée de l'application $\gamma \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})$. Ces deux applications ont donc même polynôme caractéristique et donc

$$(4.4.8) \quad \tilde{H}_k(T) = \det(1 - T\bar{\beta}^*) = \det(1 - T\gamma \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})).$$

D'après le lemme 8,

$$(4.4.9) \quad \det(1 - T\beta^*) = \det(1 - Tp^k \beta \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})).$$

Compte tenu du fait que $\gamma \circ \beta = p$ Identité, on obtient

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_k(T) &= \det(1 - T\bar{\beta}^*) = \det(1 - T\gamma \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})) \\
 &= \det(1 - T\gamma \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})) \det(1 - p^{-1} T^{-1} \beta \mid \text{Im}(\delta \circ \hat{d})) \\
 &= CT^p \det(1 - p^{-k-1} T^{-1} \beta^*) = CT^p \tilde{H}_k\left(\frac{1}{p^{k+1} T}\right)
 \end{aligned}$$

où C est une constante, et

$$\rho = \deg \tilde{H}_k = \dim V_k - \dim \text{Ker } \hat{d} = k + 1 - \begin{cases} 3 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

Posons $P_k(T) = \det(1 - T\beta^* \mid \text{Ker } \hat{d})$. On a donc $H_k(T) = P_k(T) \tilde{H}_k(T)$, où $\tilde{H}_k(T)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\tilde{H}_k(T) = CT^p \tilde{H}_k\left(\frac{1}{p^{k+1}T}\right).$$

Nous allons déterminer le facteur trivial P_k .

(4.5) Facteur trivial. - Il s'agit de trouver les valeurs propres de l'opérateur de Frobenius β^* agissant dans $\text{Ker } \hat{d}$. Or nous savons déjà au § 4.2 que

$$\text{Ker } \hat{d} \simeq \text{Ker}_{\hat{S}_k^t(W)} d \simeq \text{Ker}_{R'(B)} \mathcal{L}_k \simeq \text{Ker}_{R'_0} \mathcal{L}_k \oplus \text{Ker}_{R'_1} \mathcal{L}_k \oplus \text{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k.$$

On a vu que $\text{Ker}_{R'_0} \mathcal{L}_k$ était engendré par $F(\lambda)^k$. Il en résulte de [Dw-2], formule (6.2.8), que $F(\lambda)$ est vecteur propre associé à la valeur propre $(-1)^{(p-1)/2}$, et donc $F(\lambda)^k$ est vecteur propre associé à la valeur propre $(-1)^{k(p-1)/2}$. On a vu que $\text{Ker}_{R'_1} \mathcal{L}_k$ était engendré par $F(1-\lambda)^k$. Il résulte de [Ad-1] que $F(1-\lambda)$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1, donc $F(1-\lambda)^k$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1 également. Enfin on a vu que $\text{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k$ était engendré par $\lambda^{-k/2} F(\frac{1}{\lambda})^k$ pour k pair (et $\text{Ker}_{R'_\infty} \mathcal{L}_k = \{0\}$ pour k impair) et encore en suivant [Ad-1], on trouve que $\lambda^{-k/2} F(\frac{1}{\lambda})^k$ est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Finalement on obtient

$$P_k(T) = \begin{cases} (1 - (-1)^{k(p-1)/2} T)(1-T)^2 & \text{si } k \text{ pair} \\ (1 - (-1)^{k(p-1)/2} T)(1-T)^2 & \text{si } k \text{ impair.} \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [Ad-1] ADOLPHSON (A.). - A p -adic theory of Hecke polynomials, Duke Math. J., t. 43, 1976, p. 115-145.
- [Ad-2] ADOLPHSON (A.). - An index theorem for p -adic differential operators, Trans. Amer. math. Soc., t. 216, 1976, p. 279-293.
- [Am-1] AMICE (Y.). - Les nombres p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [Ch-1] CHRISTOL (G.). - Un théorème de transfert pour les disques singuliers réguliers, "Cohomologie p -adique", Astérisque n° 119-120, 1984, p. 151-168.
- [Dw-1] DWORK (B.). - On Hecke polynomials, Invent. Math., Berlin, t. 12, 1971, p. 249-256.
- [Dw-2] DWORK (B.). - p -Adic cycles. - Paris, Presses universitaires de France, 1969 (Institut des hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-116).
- [Dw-3] DWORK (B.). - Lectures on p -adic differential equations. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 253).
- [Ih-1] IHARA (Y.). - Hecke polynomials as congruence ζ functions in elliptic modular case, Annals of Math., Series 2, t. 85, 1967, p. 267-295.

- [Ro-1] ROBBA (P.). - Index of p -adic differential operators III. Applications to twisted exponential sums, "Cohomologie p -adique", Astérisque n° 119-120, 1984, p. 191-266.
- [Ro-2] ROBBA (P.). - Indice d'un opérateur différentiel IV, Cas des systèmes. Mesure de l'irrégularité dans un disque, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 35, 1985, fasc. 2, p. 13-55.
- [Ro-3] ROBBA (P.). - Une introduction naïve aux cohomologies de Dwork, Mémoires de la Soc. math. France (à paraître).
- [Ro-4] ROBBA (P.). - Cohomologie p -adique et fonctions L. Cours de D. E. A., Université Paris-XI, Orsay, 1982/83.
- [Se-1] SERRE (J.-P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques. Publications mathématiques, 12).
-