

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

YVES ANDRE

Équations différentielles p -adiques et dégénérescence de groupes de Hodge

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 7, p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A4_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p -ADIQUES ET DÉGÉNÉRESCENCE DE GROUPES DE HODGE

par Yves ANDRE (*)

Résumé. - Ce texte reprend, en la complétant sur certains points, une partie de ma thèse [1]. Soit $(X_s)_{s \in S}$ une famille algébrique de variétés abéliennes paramétrée par une courbe affine lisse S , le tout étant défini sur le corps $\bar{\mathbb{Q}}$ des nombres algébriques. Le groupe de Hodge G_s de X_s est le groupe algébrique qui fixe les cycles de Hodge dans la cohomologie rationnelle de $X_s|_{\mathbb{C}}$, un plongement de $\bar{\mathbb{Q}}$ dans $\mathbb{C}$ étant donné. On sait ([5], 2.11) que, pour tout s hors d'une partie maigre de $S(\mathbb{C})$, les G_s sont isomorphes ; on appelle G ce groupe de Hodge "générique" ; alors pour tout $s \in S(\bar{\mathbb{Q}})$, G_s se plonge dans G .

Sous certaines hypothèses simplificatrices, je donne une condition de nature arithmétique sur les points $s \in S(\bar{\mathbb{Q}})$ tels que le groupe de Hodge de la fibre X_s dégénère, c'est-à-dire que l'image de G_s dans G soit distincte de G . La preuve est fondée en partie sur les propriétés p -adiques du système différentiel de Picard-Fuchs associé à la famille $(X_s)_{s \in S}$.

1. Rappels sur la structure de Hodge des variétés abéliennes.

Soit A une variété abélienne complexe ; cela correspond à la donnée d'une structure complexe polarisable sur le réelifié d'un réseau L (c'est-à-dire un endomorphisme J de $\mathbb{R}L$ de carré-Id, ou, ce qui revient au même, un morphisme $\varphi : \mathbb{U}^1 \rightarrow GL(\mathbb{R}L)$ tel qu'il existe une structure symplectique $\alpha : L \wedge L \rightarrow \mathbb{Z}$ pour laquelle $\alpha_{\mathbb{R}}(x, \varphi(i)y)$ est définie positive sur $\mathbb{R}L \times \mathbb{R}L$).

L'enveloppe algébrique sur $\mathbb{Q}$ de l'image de φ est appelée groupe de Hodge de A , et sera notée $G(A)$; c'est un $\mathbb{Q}$ -groupe réductif connexe de centre compact [8]. Soit V le dual sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}L$; on l'identifie canoniquement au premier groupe de cohomologie rationnelle $H^1(A, \mathbb{Q})$ de A . Alors la cohomologie rationnelle $H^*(A, \mathbb{Q})$ de A s'identifie à l'algèbre extérieure sur V , et par le théorème de Künneth, celle de A^n s'identifie à $\otimes^n A V$.

Via les représentations contragrédientes et tensorielles, on obtient une action de $G(A)$ sur $\otimes^n A V$.

D'autre part, la théorie de Hodge fournit une décomposition de $H^n(A, \mathbb{C}) = H^n(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$:

$$H^n(A, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}(A).$$

(*) Yves ANDRÉ, Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75231 PARIS CEDEX 05.

Puisque A est une variété abélienne, cette décomposition correspond, au cran H^1 , à la décomposition en sous-espace propre de tJ sur $V \otimes \mathbb{C}$ (dual de GL), et est compatible aux crans supérieurs avec les identifications décrites précédemment.

On appellera cycle de Hodge sur A tout élément d'un espace $H^n(A^n, \mathbb{Q}) \cap H^{p,p}(A^n)$. Les constructions précédentes montrent qu'il revient au même de considérer un cycle de Hodge, sur A comme un élément d'une puissance tensorielle de V fixé par $G(A)$.

On peut montrer d'ailleurs que $G(A)$ est le plus grand $\mathbb{Q}$ -groupe algébrique qui fixe ces éléments ([5], 3.4).

Dans la suite, on fera le plus souvent sur les variétés abéliennes A l'hypothèse simplificatrice suivante :

(*) A est isogène géométriquement à un produit de variétés abéliennes simples de dimension égale à un nombre premier (non précisé) ou à 1.

Remarque. - Cette hypothèse entraîne [9] que les cycles de Hodge sur A sont engendrés sous le cup-produit par les classes de cohomologie de diviseurs. En particulier, $G(A)$ ne dépend que de A et non du morphisme $A \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}$.

2. Dégénérescence du groupe de Hodge dans une famille à un paramètre de variétés abéliennes.

On normalise les valeurs absolues $|\cdot|_v$ d'un corps de nombres K de degré d sur $\mathbb{Q}$ de la manière suivante :

(i) si $v|p$, on pose $|p|_v = p^{-d_v/d}$ où d_v est le degré local en v , i. e. le degré du complété K_v de K en v sur $\mathbb{Q}_p$,

(ii) si $v|\infty$ et si v est réelle, on pose $|x|_v = |x|^{1/d}$,

(iii) si $v|\infty$ et si v est complexe, on pose $|x|_v = |x|^{2/d}$, où $|\cdot|$ est la valeur absolue usuelle sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

La formule du produit s'écrit $\prod_v |x|_v = 1$ pour $x \in K^\times$. On note V_0^K l'ensemble des places finies de K .

On écrit $\log^+$ pour $\sup(\log, 0)$, et on note $h(x)$ la hauteur logarithmique absolue $(\sum_v \log^+ |x|_v)$ de x .

Etant donné un schéma abélien $X \xrightarrow{f} S$ sur une courbe affine lisse S , munie d'un point fermé s , f et S étant définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$, on construit les objets suivants :

1° un morphisme étale fini π de S sur $\mathbb{A}^1$ qui envoie s sur 0 ,

2° un entier N et un corps de nombres K d'anneau d'entiers R tels que f , S , s et π soient définis sur $R[\frac{1}{N}]$.

3° une "fonction de Weil" $\lambda_v(t)$, donnée par $\log^+ |\pi(t)|_v^{-1}$,

4° la hauteur associée $h(t) = \sum_v \lambda_v(t)$, qui ne dépend pas de K ,

5° la partie "ordinaire" (ord) de la hauteur

$$h_{\text{ord}}(t) = \sum_v \lambda_v(t),$$

la somme étant étendue à l'ensemble de places v de K ne divisant pas N et ordinaires pour X_t ; cette expression ne change pas si on remplace K par une extension finie,

6° le groupe de Hodge "générique" de f , défini comme le groupe de Hodge $G(f)$ de la fibre en un "point générique de Weil" de $S(\mathbb{C})$. Sous l'hypothèse (*), l'indépendance vis-à-vis du choix de ce point générique est claire (voir la remarque qui suit (*)). Dans le cas général, c'est impliqué par ([5], 2.11]. On remarquera que si $\dim X/S = g$ est < 4 , toute fibre de f vérifie (*).

Le théorème annoncé s'énonce comme suit.

THÉOREME. - Soit $f : X \rightarrow S$ un schéma abélien sur une courbe affine lisse S , f et S étant définis sur $\bar{\mathbb{Q}}$. On suppose qu'une fibre $X_s = f_s$ est une variété abélienne de type "multiplications complexes". Il existe trois constantes α, β, γ positives, effectivement calculables en fonction de (X, S, s) , avec $\beta < 1$, telles que l'énoncé suivant soit vérifié ;

Soit X_t une fibre de f vérifiant (*) ; alors

(i) si $\dim G(X_t) < \dim G(f) - \dim X_t$, on a

$$h_{\text{ord}}(t) < \alpha h(t)^\beta [K(t) : \mathbb{Q}]^\gamma$$

(ii) si pour tout $v | \infty$, $\lambda_v(t) = 0$ et si $\dim G(X_t) < \dim G(f)$, on a

$$h_{\text{ord}}(t) < \alpha h(t)^\beta.$$

La preuve de ce théorème utilise la théorie des G -fonctions de Siegel sous la forme que lui a donnée BOMBIERI [4].

Dans un prochain article, je donnerai une application de ce type de technique au problème de l'infinitude des places supersingulières des courbes elliptiques d'invariant algébrique.

3. Equations de Picard-Fuchs associées aux schémas abéliens et G -fonctions.

3.1. Les G -fonctions et leurs valeurs.

Soit K un corps de nombres. Par opérateur différentiel défini sur K , on entendra un opérateur différentiel à coefficients dans $K(z)$ en une seule variable z .

Si $\mathcal{L}$ est un opérateur différentiel défini sur K , on note $r_v(\mathcal{L})$ le rayon de v -analyticité de $\mathcal{L}_v := \mathcal{L} \otimes_K K_v$ sur un disque générique ([4], 6), et $s(\mathcal{L})$ l'ensemble des singularités non apparentes de $\mathcal{L}$. Soit $Y(z)$ un vecteur dont la j -ième composante est une série de Taylor $Y_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{jn} z^n$ ($j = 1, 2, \dots, n$),

avec $a_{jh} \in K$, de rayon de convergence $r_v(Y_j)$ en 0.

On dira, avec E. BOMBIERI ([4], 7), que $Y(z)$ est une G-fonction si la quantité positive

$$\tilde{\sigma}(Y) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_v \max_{j \leq m, h \leq m} (-h \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} + \log |a_{jh}|_v) + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)}$$

est finie.

Cette condition un peu technique, mais d'usage commode, entraîne que

$$\sigma(Y) = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_v \max_{j \leq m, h \leq m} \log |a_{jh}|_v$$

est fini, et signifie heuristiquement que les tailles et dénominateurs des coefficients croissent au plus géométriquement.

La propriété arithmétique des valeurs de G-fonctions qui sera utilisée est la suivante ;

Rappel (E. BOMBIERI ([4], 10, 12)).

1° Soit $\mathcal{F}$ un opérateur différentiel d'ordre n défini sur un corps de nombres K , tel que $\sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{F})} < \infty$.

Soit $Y(z)$ une G-fonction solution de $\mathcal{F}Y = 0$ au voisinage de $z = 0$. Soit $\xi \in K^x$, distinct des singularités de $\mathcal{F}$; et soit M un ensemble fini de places de K tel que

$$|\xi|_v < \min(1, r_v(Y_i))$$

si $v \in M$ (de sorte que pour chaque $v \in M$, $Y_i(\xi)$ est un élément bien défini dans K_v), et tel qu'il existe r relations de dépendance linéaire indépendantes sur K : $\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} Y_j(\xi) = 0$, avec $\lambda_{ij} \in K$, valides dans toute complétion K_v , $v \in M$ (avec le sens qu'y prend $Y_j(\xi)$).

On suppose que les composantes $Y_j(z)$ de Y sont linéairement indépendantes sur $K(z)$.

Alors, pour tout τ , $0 < \tau \leq 1/2$, on a :

$$(n - 2\tau) \sum_{v \in M} \log |\xi|_v + (n - r + 2\tau |s(\mathcal{F})|) h(\xi) \geq -c(\mathcal{F}, Y, \tau)$$

où $c(\mathcal{F}, Y, \tau)$ est une constante positive qui ne dépend que de $\mathcal{F}$, Y et τ (pas de K), donnée explicitement par

$$c(\mathcal{F}, Y, \tau) = 2(n - r) \log 2 + (n - r) n^2 \frac{\tilde{\sigma}(Y)}{2\tau} + (n - r) \tau \left[\sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{F})} + \sum_{\xi \in s(\mathcal{F}), \xi \neq 0} h(\xi) + \log 2 + |s(\mathcal{F})| \log 2 + n - 1 \right]$$

2° Lorsqu'on note $\sum_{k=1}^{(k)} \frac{\text{la puissance symétrique } k\text{-ième de } \mathcal{F}}{Y_1^{k_1} \dots Y_n^{k_n}} \text{ pour } k_j \geq 0 \text{ et } k_j = k$, et } $Y^{(k)}$ le vecteur de composantes

$$s(\mathcal{L}^{(k)}) \subset s(\mathcal{L}) , \quad \sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L}^{(k)})} \leq \sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L})} ,$$

et

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{Y}^{(k)}) \leq (1 + \log k) \tilde{\sigma}(\mathcal{Y}) .$$

La partie 2° permet de substituer dans 1° des polynômes homogènes de degré k aux formes linéaires, en changeant convenablement les "constantes" n et $\tilde{\sigma}(\mathcal{Y})$.

L'intérêt de considérer plusieurs places éventuellement dans M est mis en évidence par la remarque suivante, due à E. BOMBIERI ;

pour plus de précision, on note $\gamma_i^{(v)}(\xi^{(v)})$ l'élément de K_v défini, lorsque $|\xi|_v < r_v(Y_i)$, par $\sum a_{ij}^{(v)} \xi^{(v)}$ où $a_{ij}^{(v)}$ et $\xi^{(v)}$ sont les images de a_{ij} et de ξ , par l'homomorphisme (d'inclusion) $K \hookrightarrow K_v$.

Soit $Q \in K[y_1, \dots, y_n]$. On dit que la relation $Q(y_1(\xi), \dots, y_n(\xi)) = 0$ est globale, si on a $Q^{(v)}(\gamma_1^{(v)}(\xi^{(v)}), \dots, \gamma_n^{(v)}(\xi^{(v)})) = 0$

pour toute place v de K telle que $|\xi|_v < \min(1, r_v(Y_i))$ (on note $Q^{(v)}$ l'image de Q par l'injection canonique $K[y_1, \dots, y_n] \rightarrow K_v[y_1, \dots, y_n]$). On pose $M = \{v \text{ place de } K \mid |\xi|_v < \min_i(1, r_v(Y_i))\}$. Alors

$$\sum_{\substack{v \in M \\ |\xi|_v < 1}} \log(\xi)_v = - \sum_{v \in M} \log^+ |\xi|_v \geq - \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)}$$

d'où

$$\sum_{v \in M} \log |\xi|_v \leq - \sum_v \log^+ \frac{1}{|\xi|_v} + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} = -h(\xi) + \sum_v \log^+ \frac{1}{\min_i r_v(Y_i)} .$$

On en tire que si $\mathcal{L}, Y$ sont comme ci-dessus, et si $Y_1(z), \dots, Y_n(z)$ ne vérifient aucune relation algébrique homogène de degré k à coefficients dans $\tilde{\mathbb{Q}}(z)$, les points $\xi \in \tilde{\mathbb{Q}}$, en lesquels il existe une relation globale de degré $k > 1$, ont une hauteur bornée

$$h(\xi) < c'(\mathcal{L}, Y) \cdot k^{3n-3} \cdot \log k \quad ([4], 11) ,$$

$c'(\mathcal{L}, Y)$ étant une constante > 0 effectivement calculable en fonction de $\mathcal{L}$ et Y .

D'une manière générale, le théorème de Bombieri donne un résultat d'autant plus fort que le nombre de places v dans M augmente, le maximum étant obtenu dans le cas des relations globales.

3.2. Opérateur différentiel associé à un schéma abélien.

On considère de nouveau un schéma abélien $X \xrightarrow{f} S$ sur une courbe affine lisse S munie d'un point fermé s , f et S étant définis sur $\tilde{\mathbb{Q}}$, et on reprend les constructions 1° et 2° du paragraphe 2 : plus précisément, on suppose que S est

étale de degré δ au-dessus de A_K^1 , via une section z de $\mathcal{O}_S$ qui s'annule en un point s de $S(K)$, et, par abus de langage, on note aussi z la section de $\mathcal{O}(A^1)$ d'image z sous $\mathcal{O}_{A^1} \rightarrow \mathcal{O}_S$.

Au module à connexion $H_{\text{dif}}^1(X/S)$ (cohomologie de De Rham algébrique relative de X/S), identifié à son dual via une polarisation de la fibre générique de f , correspond un système différentiel $\mathcal{E}_f = d/dz - \underline{A}_f$ sur S , et, en notant π le morphisme $S \rightarrow A_K^1$, un système différentiel $\pi^* \mathcal{E}_f$ sur A_K^1 (à coefficients dans $K(z)$); si f est de dimension relative g , et π de degré δ , $\mathcal{E}_f$ est de rang $2g$ et $\pi^* \mathcal{E}_f$ de rang $2g\delta$.

On peut "descendre" f en un schéma abélien $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ sur un schéma $\tilde{S}$ lisse sur un sous-anneau B de K de type fini sur $\mathbb{Z}$ (on peut prendre $\mathcal{O}_{K[\frac{1}{N}]}[1/N]$ pour ce sous-anneau, pour N assez grand); alors les modules de De Rham $H_{\text{dif}}^n(\tilde{X}/\tilde{S})$ sont localement libres et la formation de H_{dif} commute aux changements de base ([7], [3] p. 99).

Quitte à agrandir B , on peut supposer que s définit un point B -rationnel de $\tilde{S}$, qu'on note encore s , et que π se prolonge en un morphisme étale de $\tilde{S}$ sur A_B^1 (théorème de lissité générique de Chevalley).

On considère l'opérateur différentiel $\mathcal{E}_f$ associé à $H_{\text{dif}}^1(X/S)$, et $2g$ "vecteurs solutions" $y_{(i)}^s(z)$ de $\mathcal{E}_f$ au voisinage de s , pour $i \in \{1, \dots, 2g\}$, tels que la matrice carrée formée des vecteurs colonnes $y_{(i)}^s(s)$ soit la matrice identité: on entend par "vecteur solution" de $\mathcal{E}_f$ au voisinage de s un élément horizontal dans $H_{\text{dif}}^1(X/S) \otimes_{\mathcal{O}_S} \hat{\mathcal{O}}_{S,s}$, où $\hat{\mathcal{O}}_{S,s}$ désigne le complété de l'anneau local en le point K -rationnel s . Les composantes $y_{(i)j}^s(z)$ sont appelées périodes globales de f au voisinage de s . A un tel vecteur solution $y_{(i)}^s(z)$ de $\mathcal{E}_f$ correspond un vecteur solution $Y(z)$ de $\pi^* \mathcal{E}_f$ de la manière suivante:

Comme π est étale et comme les δ points $s_1 = s, \dots, s_\delta$ de $\pi^{-1}(0)$ sont K -rationnels, on a des isomorphismes $\hat{\mathcal{O}}_{A_K^1, 0} \rightarrow \hat{\mathcal{O}}_{S, s_K}$, d'où pour chaque $y_{ij}^{s_K}(z)$ (construit comme $y_{ij}^s(z)$) un élément correspondant $y_{ij}^{s_K}(z)$ dans $\hat{\mathcal{O}}_{A_K^1, 0}$, i. e. une série de Taylor en z à coefficients dans K ; en notant $i = (i_1, \dots, i_\delta)$ et $y_{(i)}^{s_K}(z)$ le vecteur de composantes $y_{ij}^{s_K}(z)$,

$$Y_i(z) = \begin{pmatrix} y_{(i_1)}^{s_1}(z) \\ \vdots \\ y_{(i_\delta)}^{s_\delta}(z) \end{pmatrix}$$

est un vecteur solution de $\pi^* \mathcal{E}_f$, et la matrice $(2g\delta) \times (2g\delta)$ formée de tous les $Y_i(0)$ dans un ordre convenable est la matrice identité. On pose $n = 2g\delta$.

On note R_v ou $\mathcal{O}_{K_v}$ l'anneau des entiers du complété K_v de K en une place finie v . Soient $v|p$ une place finie de K , $v \nmid N$, et $\tilde{S}_v$ le schéma formel complété p -adique de $\tilde{S}/K_v$. A $\tilde{S}_v$ est associé un espace analytique rigide $\tilde{S}_v^{\text{an}}$

dont les points sont les sous-schémas formels fermés de $\tilde{S}_v$ intègres finis et plats sur $\mathcal{O}_{K_v} ([2], 1)$; on note $\tilde{X}_v$, $\tilde{f}_v$, resp. $\tilde{X}_v^{an}$, $\tilde{f}_v^{an}$ les objets déduits de $\tilde{X}$, $\tilde{f}$ par les foncteurs G. A. G. F. (resp. G. F. G. rig-an) .

La théorie de cohomologie cristalline munit le $\mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$ -module à connexion

$$R^i \tilde{f}_v^* (\Omega_{X_v/\tilde{S}_v}^j) \approx H_{\text{dif}}^i(\tilde{X}^j/\tilde{S}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}_v}$$

d'une structure de F-cristal ([2], [6]), qui induit un F-cristal convergeant sur $\tilde{S}_v^{an}$ ([2], [6]).

Le système différentiel p-adique associé est défini sur le sous-corps K de K_v ; en reprenant les notations précédentes, lorsque $i = j = 1$, ce système est $\mathcal{L}_{f|K_v}$.

3.3. Les périodes globales comme G-fonctions.

On pourra utiliser le théorème de Bombieri grâce à l'énoncé suivant.

PROPOSITION. - Avec les notations précédentes, soit $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel $\pi^* \mathcal{L}_f$, et pour un δ -uplet fixé i , soit $\gamma(z) = Y_i(z)$. Alors

$$\sum_{v \in V_0^K} \log^+ \frac{1}{r_v(\mathcal{L})} < \infty$$

et $\gamma(z)$ est une G-fonction solution de $\mathcal{L}$ au voisinage de 0.

Preuve. - Il suffit de prouver d'une part que pour l'ensemble fini des places v de K telles que $v|\infty$ ou $v|N$, $r_v(\gamma_i) > 0$ et $r_v(\mathcal{L}) > 0$, et d'autre part que $\sum' \log^+ 1/(r_v(\mathcal{L})) < \infty$, le symbole indiquant que les sommations sont effectuées sur l'ensemble complémentaire de l'ensemble de places précédent.

En fait, on $r_v(\gamma_i) > 0$ et $r_v(\mathcal{L}) > 0$ pour toute place de K , puisque 0 est un point ordinaire de $\mathcal{L}$. On va prouver que $\sum' \log^+ 1/(r_v(\mathcal{L})) = 0$ i. e. $r_v(\mathcal{L}) \geq 1$ pour $v \nmid N$, $v \nmid \infty$. On a le morphisme de spécialisation (morphisme d'espaces annelés, qui est fonctoriel) de $\tilde{S}_v^{an}$ dans $\tilde{S}_v$ qui associe à un sous-schéma formel fermé intègre fini et plat (sur R_v), de $\tilde{S}_v$ son support, qui est un point de $\tilde{S}_v$; d'autre part, grâce au choix de N , π s'étend en un morphisme $\tilde{\pi}_v$ de schémas formels $\tilde{S}_v \rightarrow \hat{A}_{k_v}^1$, où k_v désigne le corps résiduel de K_v , et il existe un morphisme $\tilde{\pi}_v^{an}$ d'espaces analytiques rigides tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S}_v^{an} & \xrightarrow{\tilde{\pi}_v^{an}} & (\hat{A}_{k_v}^1)^{an} = \text{boule unité fermée } B_v(0, 1^+) \text{ de la droite analytique rigide} \\ \downarrow \text{Sp} & & \downarrow \text{Sp} \\ \tilde{S}_v & \xrightarrow{\pi_v} & \hat{A}_{k_v} = \text{Spec } \varinjlim R_v[T]/p^n R_v[T] \end{array}$$

Comme $H_{\text{dif}}^1(\tilde{X}/\tilde{S}) \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{S}}} \mathcal{O}_{\tilde{S}_v}^{an}$ est muni d'une structure de F-cristal convergeant pour $v \nmid N$, $v \nmid \infty$, le système différentiel associé $\mathcal{L}_{f|K_v}$ admet une base de solutions

convergentes dans $\text{sp}^{-1}(t)$ pour tout point t de $\tilde{S}_v$ [2] ; on en déduit que $\mathcal{E}|_{K_v}$ admet une base de solutions convergentes dans $\text{sp}^{-1}(u_v(t))$ pour tout point $\tilde{u}_v(t)$, la spécialisation se référant à l'espace analytique rigide $B_v(0, 1^+)$.

En particulier, $r_v(y_1) \geq 1$; pour avoir $r_v(\mathcal{E}) \geq 1$, on étend les scalaires de K_v à un corps complet Ω_v contenant une unité t_v dont l'image dans le corps résiduel soit transcendante sur k_v ; comme précédemment, on trouve que $\mathcal{E}|_{\Omega_v}$ admet une base de solutions convergentes dans $\text{sp}^{-1}(t_v) = B(t_v, 1^-)$.

En fait, la condition sur $\mathcal{E}$ suffit à assurer que les solutions en séries de Taylor à coefficients dans un corps de nombres sont des G -fonctions, mais comme ce résultat n'est pas explicité en [4], on va montrer que $\sigma^1(Y) < \infty$, i. e.

$$\overline{\lim} \frac{1}{n} \sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{i \leq n, h \leq n} \log |a_{jh}|_v < \infty.$$

Soit A_n la matrice dont les coefficients sont des fonctions rationnelles et telle que $(d/dz)^n Y = n! A_n Y$; on a

$$\max_{j \leq n} \log |a_{jh}|_v \leq \log^+ |A_n(0)|_v.$$

Pour estimer $|A_n(0)|_v$ on dispose, puisque 0 est un point ordinaire pour $\mathcal{E}$ et que $\mathcal{E}$ admet une base de solutions analytiques sur $B(0, 1^-)$, de l'inégalité de Dwork [4]

$$|A_n(0)|_v \leq \{n, n-1\}_v \max_{h \leq n-1} \|A_h\|_0^v$$

$\|A_h\|_0^v$ désignant le maximum des normes de Gauss des coefficients de A_h , et $\{n, n-1\}_v$ désignant $\sup (1/|\lambda_1 \times \dots \times \lambda_{n-1}|_v)$ sur tous les $(n-1)$ -uplets d'entiers distincts bornés par n .

Or $\sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{h \leq n} \log \{h, n-1\}_v \leq (n-1) \psi(n)$ où ψ est la fonction arithmétique usuelle (voir [4], 6). D'où

$$\sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \max_{h \leq n} \log^+ |A_n(0)|_v \leq (n-1) \psi(n) + \sum_{v \nmid \infty, v \nmid N} \log^+ \max_{h \leq n-1} \|A_h\|_0^v < \infty$$

(voir [4], lemme 7) et $\sigma^1(Y) \leq n-1$.

C. Q. F. D.

4. Périodes.

4.1. Périodes complexes.

Soit A une variété abélienne sur un corps de nombres K ; dans la suite, ce sera une fibre du schéma abélien $\tilde{f}$.

Soit v une place complexe de K (éventuellement, prolongement d'une place réelle) qu'on peut voir comme un plongement de K dans $\mathbb{C}$. On note A_v la variété abélienne complexe $A \times_K \mathbb{C}$ associée à ce plongement et issue de A .

On a un accouplement $H_1(A_v, \mathbb{Z}) \times H_{\text{dif}}^1(A/K) \rightarrow \mathbb{C}$, donné par $(\gamma, \omega) \rightarrow \int_{\gamma} \omega$ qui induit un isomorphisme de vectoriels complexes

$$H_{\text{dif}}^1(A/K) \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^1(A_v, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C};$$

les nombres $\int_{\gamma} \omega$ sont appelés classiquement périodes (et pseudo-périodes) associées à $A/\mathbb{K}$; on les appellera périodes v-adiques (complexes), et on les notera $p_{\alpha, \beta}^v$, α et β décrivant $\{1, \dots, 2\dim A\}$; on les regardera comme les coefficients d'une matrice de l'isomorphisme ci-dessus sur des bases de $H_{\text{dif}}^1(A/K) \otimes_K \mathbb{C}$, resp. $H^1(A_v, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, adaptés aux structures "rationnelles" sous-jacentes $H_{\text{dif}}^1(A/K)$ resp. $H^1(A_v, \mathbb{Q})$.

On sait que le degré de transcendance sur $K(2i\pi)$ des $p_{\alpha, \beta}^v$ est majoré par $g(A_v)$, ([5], 6.4). L'égalité découlerait d'une conjecture de Grothendieck (voir [1], 1).

Lorsque A varie dans une famille algébrique $(X_s)_{s \in S}$, on peut définir localement pour la topologie complexe sur $S(\mathbb{C})$, des fonctions analytiques $p_{\alpha, \beta}^v$ telles que les $p_{\alpha, \beta}^v(s)$ représentent un système de périodes v-adiques de X_s pour tout s dans $S(K)$, ce au moins localement en s (voir [1], 3). Ces fonctions donnent une base de solutions localement pour $\mathcal{E}_f \otimes_{K, v} \mathbb{C}$, formée de vecteurs du type $(p_{\alpha, \beta}^v)_{\beta=1, \dots, 2\dim A}$.

4.2. Périodes p-adiques.

On commence par rappeler, dans une variante analytique rigide, la construction de périodes v-adiques, avec v ultramétrique (d'après OGUS [5], p. 397), pour une fibre X_s , définie sur $R[\frac{1}{N}] \subset K$, un schéma abélien $\tilde{T} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ considéré en 3.2. On suppose que $v \nmid N$ et que R est l'anneau des entiers du corps de nombres K . $\tilde{X}_s$ est donc un schéma abélien sur $B = R[1/N]$; on note K_v le complété de K en v , R_v son anneau d'entiers, et k_v son corps résiduel.

Soient C_v un corps, complet pour la topologie p-adique, contenant K_v et l'anneau de Witt de la clôture algébrique de k_v . Pour $v \nmid N$, la réduction de $\tilde{X}_s$ modulo l'idéal maximal $\mathfrak{m}_v$ de R_v est une variété abélienne $\tilde{X}_{s, \sigma} = \tilde{X}_{\sigma}$ (image de $\tilde{X}_s$ par le changement de base $\sigma : \text{Spec } k_v \rightarrow \text{Spec } R[1/N]$); on note $H_v^m(\tilde{X}_{\sigma})$ son m-ième groupe de cohomologie analytique rigide [2].

On a un isomorphisme canonique [2]

$$\sigma_v : H_{\text{dif}}^m(\tilde{X}_s^{\text{an}}/R[1/N]) \otimes_{R[1/N]} K_v \rightarrow H_v^m(\tilde{X}_{\sigma}^{\text{an}}),$$

et une décomposition dite "décomposition en pentes", du cristal convergent $H_v^m(\tilde{X}_{\sigma}^{\text{an}})$ en $\bigoplus \{H_{\lambda} ; \lambda \in \mathbb{Q}\}$, telle que $H_{\lambda} \otimes_{K_v} C_v$ soit isomorphe à une somme directe de copies du F-cristal convergeant standard de pente λ sur C_v .

Ecrivons $\lambda = a/b$ en fraction irréductible, et notons K_b le corps des fractions de $W(\mathbb{F}_b)$, et φ_v l'endomorphisme F-linéaire canonique sur

$$H_V^m(\tilde{X}_\sigma \times_{K_V} \dots \times_{K_V} \tilde{X}_\sigma)$$

induit par l'endomorphisme de Frobenius "absolu" sur $\tilde{X}_\sigma$. Alors

$$V_\lambda = \{x \in H_\lambda \otimes_{K_V} C_V / \phi_V^b(x) = p^a x\}$$

est une K_p -structure sur $H_\lambda \otimes_{K_V} C_V$.

Pour chaque V_λ non nul, on choisit une base $(\gamma_\alpha^{(\lambda)} = \gamma_\alpha)$ de $\text{Hom}(V_\lambda, K_p)$ et on note $(\gamma_\alpha^{(\lambda)})^\vee$ la K_p -base duale; lorsque $m = n = 1$, et lorsque λ décrit $\tilde{Q}$ en croissant, on obtient ainsi une C_V -base de $H_V^1(\tilde{X}_\sigma) \otimes_{K_V} C_V$. Quitte à priver S de quelques points, on peut supposer que $H_{\text{dif}}^1(\tilde{X}/\tilde{S})$ est libre, et on en choisit une base ω_β . Les coefficients de la matrice de l'isomorphisme

$$H_{\text{dif}}^1(\tilde{X}_s) \otimes_{R[1/N]} C_V \xrightarrow{\sim} H_V^1(\tilde{X}_\sigma) \otimes_{K_V} C_V$$

dans ces bases s'appellent périodes v-adiques de $\tilde{X}_s$, et sont notées $\int_{\gamma_\alpha} \omega_\beta$ ou $p_{\alpha,\beta}^v$ (α et β décrivent $1, 2, \dots, 2g$).

On a d'autre part un isomorphisme de F-isocristaux

$$H_V^*(\underbrace{\tilde{X}_\sigma \times \dots \times \tilde{X}_\sigma}_{n \text{ facteurs}}) \simeq \mathbb{S}^n \wedge H_V^1(\tilde{X}_\sigma)$$

qui permet d'exprimer l'isomorphisme σ_V (après tensorisation par C_V) à l'aide d'une matrice dont les coefficients sont des polynômes "universels" en les $p_{\alpha,\beta}^v$ (à coefficients entiers).

On remarque qu'il est loisible de multiplier une période par un facteur dans $\mathbb{Q}_p^*$ on obtient une période associée à la même pente.

On examine maintenant ce qui se passe lorsque $\tilde{X}_s$ varie dans la famille algébrique $(\tilde{X}_z)_{z \in \tilde{S}}$.

Pour cela, on considère le F-cristal convergeant

$$[H_V = \mathbb{R}^n \otimes_V^* (\Omega^* \tilde{X}_V \times_{\tilde{S}_V} \dots \times_{\tilde{S}_V} \tilde{X}_V / \tilde{S}_V) \otimes_{\tilde{S}_V}^* \mathcal{O}_{\text{Sp}^{-1}(\sigma)}^*, \phi_V],$$

où σ est un point fermé de $\tilde{S}_V$. Soient s et t deux points de $\tilde{S}$ à valeurs dans R_V au-dessus de σ . On sait qu'il existe un relèvement de Frobenius F_s (resp. F_t) pour lequel s (resp. t) est un point de Teichmüller au-dessus de σ . Evaluons en s et t le F-cristal précédent: $\phi_{V,F}$ se spécialise en le Frobenius semi-linéaire de la cohomologie rigide de $\tilde{X}_\sigma^n$. Mais les applications

$$\phi_{V,F_s}^*: F_s^* H_V \rightarrow H_V \quad \text{et} \quad \phi_{V,F_t}^*: F_t^* H_V \rightarrow H_V$$

sont horizontales, par définition. Il en découle que si ξ est le prolongement horizontal d'un élément ξ_s de $H_V \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Sp}^{-1}(\sigma)}}^* \mathcal{O}_{(s)}$ vérifiant $s^*[\phi_V^* F_s^a] \xi_s = p^b \xi_s$, alors $\phi_{V,F_s}^a \xi = p^b \xi$ identiquement.

Comme les deux membres sont horizontaux, cette identité est encore vraie si on change F_s en F_t ; ainsi $t^*[\varphi_v F_t^a] \xi_t = p^b \xi_t$.

Cela montre qu'on peut définir une section horizontale unique $p_{\alpha, \beta}^v(z)$ de

$$R^1 \tilde{F}_v^* (\Omega_{\tilde{X}_v/\tilde{S}_v}^1) \otimes_{\mathcal{O}_{S_v}} \mathcal{O}_{sp^{-1}(\sigma)} \mid \mathcal{C}_v$$

qui se spécialise en $p_{\alpha, \beta}^v$ pour $A = \tilde{X}_s$.

Ainsi, le vecteur formé des fonctions $p_{\alpha, \beta}^v(z)$, lorsque α est fixé, est solution de $\mathcal{E}_f|_{\mathcal{C}} = 0$, et en tout point z de $sp^{-1}(\sigma)$ à valeur dans $K \subset \mathcal{C}_v$, les $p_{\alpha, \beta}^v(z)$ sont des périodes v -adiques pour la fibre $\tilde{X}_z$, au sens ci-dessus.

On notera l'analogie avec le cas où v est une place complexe : les F -cristaux convergents jouent le rôle de systèmes locaux, $\mathcal{C}_v$ remplaçant $\mathcal{C}$. C'est pourquoi dans la suite on notera $H_v^n(X_s^n)$ les espaces notés précédemment $H^n(X_s^n \times_{K, v} \mathcal{C}, \mathbb{Q})$.

4.3. Lien avec les périodes globales.

Comme en 3.2 les $p_{\alpha, \beta}^v(z)$, qui sont des solutions locales de $\mathcal{E}_f \otimes \mathcal{C}_v$, définissent des solutions locales $P_{i, j}^v(z)$ de $\mathcal{E} \otimes \mathcal{C}_v$, et on a la relation

$$P_{i, j}^v(z) = \sum_{k=1}^{2g\delta} P_{i, k}^v(0) Y_{kj}^v(z).$$

5. Comment les cycles de Hodge forcent des relations entre périodes.

5.1. Relations entre périodes complexes.

L'origine de cette construction remonte à la conjecture de A GROTHENDIECK mentionnée plus haut. Pour simplifier (et éviter ainsi la théorie des cycles de Hodge absolus), on fera l'hypothèse (*).

Alors un cycle de Hodge est une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Q}(2i\pi)$ de classes de cohomologie de certaines sous-variétés, intersections multiples de diviseurs de puissances de A .

On écrit la classe de cohomologie de De Rham de ces sous-variétés V dans $H_{\text{dif}}^{2i}(A_V^n/\mathbb{Q})$, puis leur classe de cohomologie singulière dans

$$H^{2i}(A_V^n, \mathbb{Q}) \otimes (2\pi)^i \mathbb{Q} \quad (\text{avec } i = \text{codim } V),$$

et on compare au moyen des puissances tensorielles ou alternées de l'isomorphisme d'intégration décrit en 4.1.

On obtient ainsi des relations de degré $2i$ à coefficients dans $\mathbb{Q}(\pi)$ entre les $p_{\alpha, \beta}^v$. De plus, la variété décrite par ces relations est un $\mathbb{Q}(\pi)$ -espace principal homogène sous $G(A_V)$ (cf. [1], 1 et 2). Ces relations n'interviennent pas dans le cas (ii) du théorème.

5.2. Relations entre périodes p -adiques.

Ce paragraphe est le noyau de la démonstration du théorème. On reprend les hypo-

thèses du § 2 et de 4.2, avec (*), relativement à la variété abélienne $A = X_S$. Quitte à agrandir K on peut supposer que les diviseurs mentionnés en 5.1 sont définis sur R (on peut prendre en effet un nombre fini de tels diviseurs d'après NÉRON-SEVERI). Soit ξ la classe de cohomologie de De Rham d'un tel diviseur, ou d'une de leurs intersections multiples ; ξ est dans un espace $H_{\text{dif}}^{2i}(A^n/B)$.

Il est connu (cf. [5]) que l'image $\sigma_v(\xi)$ de ξ sous l'isomorphisme

$$H_{\text{dif}}^{2i}(A^n/B) \otimes_B K_v \xrightarrow{\sim} H_v^{2i}(A_v^n)$$

est "vecteur propre" de ϕ_v avec la valeur propre p^i : $\phi_v(\sigma_v(\xi)) = p^i \sigma_v(\xi)$.

D'après 4.2, ceci équivaut à dire que $\langle \gamma_\alpha^{(\lambda)}, \sigma_v(\xi) \rangle = 0$ si $\lambda \neq i$ et $\langle \gamma_\alpha^{(i)}, \sigma_v(\xi) \rangle \in \mathbb{Q}_p$, λ étant la pente associée à $\gamma_\alpha = \gamma_\alpha^{(\lambda)}$.

D'après 4.2 encore, on peut choisir pour $(\gamma_\alpha^{(\lambda)})$ une base adaptée à celle de $H_v^1(A_\sigma) \otimes_{K_v} C_v$; les relations $\langle \gamma_\alpha^{(\lambda)}, \sigma_v(\xi) \rangle = 0$ pour $\lambda \neq 0$ fournissent, de manière tout à fait analogue à (5.1), des relations de la forme

$$Q_\xi^v(p_{\alpha, \beta}^v) = 0 \quad \text{où, si } \xi \in H_{\text{dif}}^{2i}(A^n/B),$$

Q_ξ^v est un polynôme en $4g^2$ indéterminées, à coefficients dans $B \subset K$, homogène de degré $2i$.

De manière plus précise, le système de relations $(Q_\xi^v = 0)$ a les propriétés suivantes ;

chaque monôme M de Q_ξ^v s'écrit $M = b_M \prod_{j=1}^{2i} p_{\alpha_j, \beta_j}^v$ avec $b_M \in K$ et $\sum_{j=1}^{2i} \lambda_j \neq i$, en notant $\lambda_j = \lambda(\alpha_j)$ la pente associée à la période v -adique p_{α_j, β_j} ; le seul cas où ce système de relations est vide si $i \neq ng$ (i. e. si ξ n'est pas la classe de cohomologie d'une variété de dimension nulle) est celui d'une place v supersingulière (cas où on a $\sum_{j=1}^{2i} \lambda_j = i$ pour tout $2i$ -uplet de pentes).

La remarque fondamentale pour la suite est que, pour ξ fixé, le système de relations $(Q_\xi^v = 0)$ ne dépend que du polygone de Newton du cristal $H_v^1(A_\sigma)$ lorsque $v \nmid N$, $v \nmid \infty$.

A fortiori, en convenant de choisir un système vide pour $v \mid N$, il n'y a qu'un nombre fini de systèmes de relations $(Q_\xi^v = 0)$ lorsque v décrit V_0^K . En les multipliant, on peut obtenir un système de relations $(R_\xi^v = 0)$ satisfaites par toute place finie non supersingulière et ne divisant pas N , les différents R_ξ^v correspondant à différents choix de $(2i)$ -uplets $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2i})$, α_j parcourant $1, \dots, 2g$, tels que $\sum_{j=1}^{2g} \lambda(\alpha_j) \neq i$. Il est clair qu' hormis le cas supersingulier, c'est le polygone ordinaire qui fournira en général le moins de relations Q_ξ .

A l'aide de ces constructions, on montre les lemmes suivants.

LEMME 1. - On suppose que $A_{\overline{\mathbb{Q}}}$ est une variété abélienne de type "multiplications complexes" (ne vérifiant pas nécessairement (*)). Alors on peut choisir un système de

périodes p-adiques $p_{\alpha,\beta}^v$ dans $\bar{\mathbb{Q}}$, pour tout $v \in V_0^K$, $v \nmid N$, v ordinaire. (Voir [1], 6.3.2, pour le cas des puissances d'une courbe elliptique.)

LEMME 2. - Soient $X \xrightarrow{f} S$ un schéma abélien comme en 3.2, $G(f)$ son groupe de Hodge générique, et v une place finie $\nmid N$ et ordinaire. Soit X_s une fibre vérifiant (*) telle que $\dim G(X_s) < \dim G(f)$. Alors

$$\deg \operatorname{tr}_K p_{\alpha,\beta}^v(X_s) < \deg \operatorname{tr}_{K(S)}(p_{\alpha,\beta}^v(z)).$$

Esquisse de la preuve. - Comme cet énoncé ne dépend, d'après ce qui précède, que du polygône de Newton de $H_v^1(\tilde{X}_v)$, on se ramène à supposer que le degré résiduel de v est 1, et v non ramifié.

Il s'agit de montrer, par l'absurde, que si $\deg \operatorname{tr}_K p_{\alpha,\beta}^v(X_s) = \deg \operatorname{tr}_{K(S)}(p_{\alpha,\beta}^v(z))$, alors toute classe de cohomologie de De Rham ξ_s d'un diviseur sur une puissance de X_s , se prolonge horizontalement en une classe de cohomologie ξ d'une combinaison de diviseurs sur une puissance de X , toute entière (en vertu du théorème de Lefschetz). Or l'égalité des degrés de transcendance montrerait qu'on peut supposer, quitte à remplacer S par un revêtement étale fini surjectif, que les relations $Q_{\xi_s}^v(p_{\alpha,\beta}^v(s)) = 0$ s'étendent en des relations "fonctionnelles" $Q_{\xi}^v(p_{\alpha,\beta}^v(z)) \equiv 0$ à coefficients dans $K(S)$. On pourrait ainsi construire une section globale ξ de $H_{\text{dif}}^2(X/\tilde{S})$ prolongeant ξ_s telle que les périodes de ξ satisfassent aux relations $Q_{\xi}^v(p_{\alpha,\beta}^v(z)) \equiv 0$, ce qu'on écrit formellement $Q_{\xi}^v(p_{\alpha,\beta}^v) = 0$, avec $\lambda(\alpha_1) + \lambda(\alpha_2) \neq 1$. En tout point t de $\tilde{S}(R_v)$ relevant σ on aurait le système de relations $Q_{\xi_t}^v(p_{\alpha,\beta}^v(t)) = 0$ où $Q_{\xi_t}^v$ désigne le polynôme $Q_{\xi}^v = Q^v$ spécialisé en t ; on va montrer que ceci entraîne l'horizontalité de

$$\xi \otimes 1 \quad H_{v,s} := H_{\text{dif}}^2(\tilde{X}^{\text{in}}/B) \otimes_B \mathbb{Z}_p[[t]]$$

$\mathbb{Z}_p[[t]]$ étant identifié (non canoniquement) à l'algèbre du spectre formel complété de $\tilde{S}_v$ le long du point σ (cette identification est loisible, puisque $\tilde{S}_v$ est lisse et v est non ramifié de degré 1).

Il existe un relèvement unique φ de l'endomorphisme de Frobenius absolu de $\sigma = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ tel que $\varphi^*(t) = t^p$; à ce relèvement correspond un morphisme horizontal $\varphi_{v,\varphi}^* : \varphi^* H_{v,s} \rightarrow H_{v,s}$.

Par hypothèse, on a un système de relations $(Q_{\xi}^v(p_{\alpha,\beta}^v) = 0; \lambda(\alpha_1) + \lambda(\alpha_2) \neq 1)$, ce qui revient à dire que $\varphi_{v,\varphi}^*[\varphi^*(\xi \otimes 1)] = p(\xi \otimes 1)$. On utilise alors une astuce de A. OGUS [5]: comme $\varphi^*(dt) = pt^{p-1} dt$, φ^* envoie $\Omega_{\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p}^2[[t]]$ dans

$(t) \Omega_{\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p}^1[[t]]$ et un calcul simple montre que si

$$\nabla(\xi \otimes 1) \in (t^j) \Omega_{\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p}^1[[t]] \otimes H_{v,s},$$

alors

$$p \nabla[\xi \otimes 1] = (\varphi^* \otimes \varphi_{v,\varphi}^* \varphi^*)[\nabla(\xi \otimes 1)] \in (t^{(j+1)}) \Omega_{\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p}^1[[t]] \otimes H_{v,s}.$$

Ainsi $\nabla(\xi \otimes 1)$ est nul, donc ξ est localement horizontal ; comme c'est une section globale, ξ est horizontal.

Pour conclure à l'algébricité, on utilise alors ([5], 2.12).

Ainsi, on en fait prouvé le résultat plus précis suivant : tout cycle de Hodge exceptionnel sur une fibre X_t (i. e. ne provenant pas d'un cycle de Hodge absolu sur une fibre "générique" de f) fournit, pour chaque place v comme dans le lemme, au moins une relation $Q_\xi^v = 0$ en les $p_{\alpha,\beta}^v(X_t)$ à coefficients dans K , indépendante des relations obtenues par spécialisation en t des relations algébriques à coefficients dans $K(S)$ entre périodes "fonctionnelles" $p_{\alpha,\beta}^v(z)$; de plus, il existe un nombre fini de polynômes Q_ξ tels que la relation $Q_\xi^v = 0$ soit l'une des relations $Q_\xi = 0$ d'après la remarque fondamentale ci-dessus).

5.3. Relations entre périodes globales.

Dans le cas des périodes complexes, c'est la minoration, déduite de 5.1.

$$\deg \operatorname{tr}_{\bar{\mathbb{Q}}} p_{\alpha,\beta}^v(X_t) \leq \dim G(X_{t,v}) + 1 ,$$

qui remplace le lemme précédent.

Les relations Q_ξ entre $p_{\alpha,\beta}^v$ pour des places complexes distinctes n'ont aucune raison d'être égales, comme on peut déjà le voir en dimension 1.

Pour obtenir une relation satisfaite par $p_{\alpha,\beta}^v$ pour tout v complexe, on les multiplie entre elles, ce qui donne des relations S_ξ de degré à priori $2[K(t) : \bar{\mathbb{Q}}]$ (dépendant donc du "degré" de t).

Que v soit complexe ou finie, le principe pour obtenir des relations entre les $Y_{ij}(z)$ consiste à éliminer $P_{ij}(z)$ et $P_{ij}(0)$ entre les relations $R_\xi(P_{ij}(z))$ ou $R_\xi S_\xi(P_{ij}(z))$ (dans le cas (i) du théorème), les relations semblables pour $z = 0$ et les relations $P_{ij}(z) = \sum_k P_{ik}(0) Y_{kj}(z)$.

Dans les cas (i) et (ii) c'est possible sous les hypothèses indiquées, compte tenu de ce que X_S est une variété abélienne à multiplications complexes, donc $\dim G(X_S) \leq \dim X_S$, et en vertu du lemme 1.

Pour les détails du cas (i), voir [1], 5.3.4.

6. Conclusion de la preuve du théorème.

On applique l'énoncé de Bombieri, rappelé en 3.1, à l'opérateur puissance symétrique k -ième de $\pi_{*f} \otimes \dots \otimes \pi_{*f} \otimes d/dz$ ($2g\delta$ copies de π_{*f}) dont les monômes de degré $\leq k$ en les $Y_{ij}(z)$ sont des solutions au voisinage de 0.

Dans le cas (i), on prend pour M l'ensemble des places de $K' = K(t)$ (que l'on prend comme nouveau corps de base K , ce qui est loisible, puisque les constantes de l'énoncé de Bombieri sont indépendantes de ce corps), qui satisfont :

$$\lambda_v(t) > \log^+ \frac{1}{r_v(Y_{ij})} ;$$

dans le cas (ii), on prend l'intersection de cet ensemble avec V_K^0 .

D'après 5.3., on a en chaque point t , pour lequel X_t vérifie l'une des hypothèses du théorème, une relation algébrique entre les $Y_{ij}(\pi(t))$ de degré $O[K(t) : \mathbb{Q}]$ [resp. $O(1)$] dans le cas (i) (resp. (ii)). De plus, ces quantités sont effectivement calculables.

On conclut en faisant tendre k vers l'infini avec $h(t)$ de manière à ce que le nombre de monômes de degré $\leq k$ en les Y_{ij} linéairement indépendants sur $\bar{\mathbb{Q}}(z)$ soit de l'ordre de $(h(t)/\log h(t))^{1/2}$ (selon la méthode exposée dans [4], théorème 7).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDRÉ (Yves). - Structure de Hodge, équations différentielles p -adiques et indépendance algébrique de période d'intégrales abéliennes, thèse de 3e cycle, Université Paris-VI, juin 1984.
- [2] BERTHELOT (Pierre). - Géométrie rigide et cohomologie de variétés algébriques de caractéristique p , Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 9e année, 1981/82, n° J2, 18 p.
- [3] BERTHELOT (Pierre), BRENN (L), MESSING (W.). - Théorie de Dieudonné cristalline II. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (Lecture Notes in Mathematics, 930).
- [4] BOMBIERI (E.). - On G -functions, "Recent progress in analytic number theory", vol. 2, p. 1-67. - London, New York, Toronto [etc.], Academic Press, 1981.
- [5] DELIGNE (P.), OGUS (A. et al.). - Hodge cycles on abelian varieties, "Hodge cycles, motives and Shimura varieties", p. 9-100, 357-414. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1982 (Lecture Notes in Mathematics, 900).
- [6] KATZ (Nicholas). - Travaux de Dwork, "Séminaire Bourbaki", vol. 1971/72, exp. 409, p. 167-200. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 317).
- [7] KATZ (Nicholas). - Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. - Paris, Presses universitaires de France, 1970 (Institut des hautes Etudes scientifiques; Publications mathématiques, 39, p. 175-232).
- [8] MUMFORD (David). - Families of Abelian varieties, "Algebraic groups and discontinuous subgroups", p. 347-351. - Providence, American mathematical Society, 1966 (Proceedings of Symposia in pure Mathematics, 9).
- [9] RIBET (K.). - Hodge classes on certain types of Abelian varieties, Amer. J. of Math., t. 105, 1983, p. 523-538.