

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-FRANÇOISE COSTE ROY

Sur les analogies entre le réel et le p -adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 11 (1983-1984), exp. n° 21, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1983-1984__11__A13_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1983-1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ANALOGIES ENTRE LE RÉEL ET LE p -ADIQUE

par Marie-Françoise COSTE ROY (*)

Dans tout cet exposé p est un nombre fixé.

1. Analogie p -adique du 17e problème de Hilbert et du Nullstellensatz.

Dans [2], KOCHEN introduit la fonction :

$$\gamma(x) = [(x^p - x) - (x^p - x)^{-1}]^{-1}$$

qui envoie n'importe quel élément de $\mathbb{Q}_p$ sur un élément de $\mathbb{Z}_p$. Cette fonction est l'analogie p -adique de l'élévation au carré dans le cas réel (qui envoie tout élément de $\mathbb{R}$ sur un élément de $\mathbb{R}^+$). La fonction γ est définie pour tout corp K . Si on appelle R l'anneau engendré par $\gamma(K)$, T la partie multiplicative $\{1 + pa ; a \in \mathbb{R}\}$, et Γ la clôture intégrale de $T^{-1}R$ dans K , on a le résultat suivant, dans le cas où $K = \mathbb{Q}_p(X_1, \dots, X_n)$:

(H_p) Une fraction rationnelle F du corps $\mathbb{Q}_p(X_1, \dots, X_n)$ appartient à l'ensemble Γ si, et seulement si, pour tout point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{Q}_p^n$ où elle est définie, elle prend une valeur dans $\mathbb{Z}_p$.

La démonstration de ce résultat, due à KOCHEN, est analogue à celle donnée par ARTIN au 17e problème de Hilbert :

(H_∞) Une fraction rationnelle F du corps $\mathbb{R}(X_1, \dots, X_n)$ est une somme de carrés de fractions rationnelles si, et seulement si, pour tout point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ où elle est définie, elle prend une valeur positive ou nulle,

et repose sur la théorie des corps formellement p -adiques (analogues des corps formellement réels) et des corps p -adiquement clos (analogues des corps réels clos).

Le Nullstellensatz p -adique qu'on trouve chez PRESTEL et ROQUETTE [4] est le résultat suivant :

(N_p) Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$. Le polynôme P de $\mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$ s'annule en tout point $(x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{Q}_p^n$ où les polynômes $P_1, \dots, P_n$ sont nuls si, et seulement si, il existe un entier N , des polynômes $A_1, \dots, A_n$ et des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de Γ tels que

$$P^N = \lambda_1 A_1 P_1 + \dots + \lambda_n A_n P_n.$$

(*) Marie-Françoise COSTE ROY, 14 rue de la Rabine, 35510 CESSON SÉVIGNÉ.

Ce résultat est démontré par les mêmes techniques que son analogue réel, dû à DUBOIS :

(N_∞) Soient $P_1, \dots, P_n$ des polynômes de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. Le polynôme P de $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ s'annule en tout point de $\mathbb{R}^n$ où les polynômes $P_1, \dots, P_n$ sont nuls si, et seulement si, il existe un entier N , des polynômes $A_1, \dots, A_n$ et des sommes de carrés de fractions rationnelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que :

$$P^N = \lambda_1 A_1 P_1 + \dots + \lambda_n A_n P_n.$$

Remarquons toutefois qu'il existe un Nullstellensatz réel, dû à RISLER, qui est plus général que celui de DUBOIS car valable aussi pour des anneaux de coordonnées de variétés non irréductibles :

(N') Soient $P, P_1, \dots, P_n$ des polynômes de l'anneau $\mathbb{R}[V]$ d'une variété réelle. Le polynôme P s'annule en tout point de V où les polynômes $P_1, \dots, P_n$ sont nuls si, et seulement si, il existe un entier N et des polynômes $Q_1, \dots, Q_p, R_1, \dots, R_n$ de $\mathbb{R}[V]$ tels que

$$P^{2N} + Q_1^2 + \dots + Q_p^2 = R_1 P_1 + \dots + R_n P_n.$$

Ce résultat est lié à la notion d'idéal réel (c'est-à-dire un idéal I tel que si $x^{2m} + a_1^2 + \dots + a_n^2$ appartient à I , alors il en est de même de x). Comme on n'a, semble-t-il, pas de bonne notion d'idéal p -adique, le Nullstellensatz réel de RISLER n'a pas d'analogue p -adique. Cette question semble liée au fait que les sommes de carrés sont définies dans tout anneau, alors que la fonction γ n'est définie que pour les corps.

2. Analogue p -adique des ensembles semi-algébriques.

Les ensembles de $\mathbb{R}^n$ qui sont définis par une combinaison booléenne d'inégalités polynomiales s'appellent ensembles semi-algébriques. Ces ensembles jouissent d'une remarquable propriété : ils sont stables par projection. Ce résultat est une forme géométrique affaiblie du théorème de Tarski-Seidenberg d'élimination des quantifications pour un corps réel clos. En gros, projeter revient à faire intervenir un quantificateur existentiel ; dire que l'ensemble obtenu est semi-algébrique revient à éliminer ce quantificateur.

Dans [3], Mac INTYRE utilise le langage des corps munis d'un prédicat V qui représente l'anneau de valuation ($V(y) = \{|y| \leq 1\}$) et, pour chaque n , d'un prédicat R_n qui représente les puissances n -ièmes ($R_n(y) = \{x ; x^n = y\}$). Les ensembles définissables de $\mathbb{Q}_p^n$ sont alors définis par combinaison booléenne à partir des ensembles définis par les prédicats de base. Des méthodes de théorie des modèles permettent de démontrer que les ensembles définissables sont stables par projection.

Dans [1], DENEF utilise les ensembles définissables pour calculer explicitement certaines intégrales et pour montrer, sans utiliser la résolution des singularités,

son théorème sur la rationalité des séries de Poincaré.

3. Spectre p-adique.

D'après le théorème de finitude de la géométrie algébrique réelle, tout fermé semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ est une union finie d'ensembles semi-algébriques définis par un nombre fini d'inégalités polynômiales larges (en particulier ces ensembles sont décrits sans inégalité stricte !). Dans [5], ROBINSON démontre un résultat analogue pour $\mathbb{Q}_p$: tout ensemble fermé définissable de $\mathbb{Q}_p^n$ est une union finie d'ensembles définis par un nombre fini de conditions de la forme $t = t'$, $V(t)$, $R_n(t)$, où t est fabriqué à l'aide de $+$, de $\times$, d'éléments de $\mathbb{Q}_p$ et de variables (en particulier, il n'y a pas de passage au complémentaire). Il étudie ensuite le spectre p-adique d'un anneau (analogue du spectre réel introduit depuis quelques années en géométrie algébrique réelle). Disons seulement que les points du spectre p-adique de l'anneau A sont définis par les morphismes de A dans un corps p-adiquement clos, et que, dans le cas de l'anneau $A = \mathbb{Q}_p[X_1, \dots, X_n]$, le spectre p-adique de A contient $\mathbb{Q}_p^n$ avec sa topologie canonique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] DENEFF. - The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points of a variety, Preprint.
 - [2] KOCHEN (Simon). - Integer valued rational functions over the p-adic numbers : A p-adic analogue of the theory of real fields, "Number theory", p. 57-73. - Providence, American mathematical Society, 1969 (Proceedings of symposia in pure Mathematics, 12).
 - [3] Mac INTYRE (Angus). - On definable subsets of p-adic fields, J. of symb. Logic, t. 41, 1976, p. 605-610.
 - [4] PRESTEL (A.) and ROQUETTE (P.). - Lectures on formally p-adic fields. - Berlin, Springer-Verlag, 1984 (Lecture Notes in Mathematics, 1050).
 - [5] ROBINSON (E.). - Affine schemes in p-adic geometry, Ph. D. Cambridge.
-