

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

## Suites récurrentes et polynômes à plusieurs variables

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 10, n° 1 (1982-1983), exp. n° 2, p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1982-1983\\_\\_10\\_1\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1982-1983__10_1_A1_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1982-1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUITES RÉCURRENTES ET POLYNÔMES À PLUSIEURS VARIABLES

par Jean-Paul BÉZIVIN (\*)

### 1. Introduction.

Le but de cet exposé est de généraliser un résultat de LEWIS et MORTON dans [4], ces auteurs prouvent le résultat suivant : Soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_s]$ , et  $m_1, \dots, m_s$  des entiers naturels premiers entre eux deux à deux ; l'hypothèse  $P(m_1^n, \dots, m_s^n)/Q(m_1^n, \dots, m_s^n)$  appartient à  $\mathbb{Z}$  pour tout  $n$  assez grand entraîne que  $Q$  divise  $P$  dans  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ . Leur méthode de démonstration leur permet de démontrer un résultat analogue pour un corps de nombres inclus dans  $\mathbb{R}$ .

### 2. Notations et rappels.

Soit  $L$  un corps de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , on note  $\mathcal{R}(L)$  l'ensemble des applications de  $\mathbb{N}$  dans  $L$  de la forme  $A(n) = \sum_{i=1}^t P_i(n) a_i^n$ , où les  $a_i$  sont des éléments non nuls de  $L$ , et les  $P_i$  des éléments de  $L[X]$ . Si  $A$  est dans  $\mathcal{R}(L)$ , on dira que les  $P_i$  sont les coefficients de  $A$ , et les  $a_i$  les fréquences de  $A$ . L'ensemble  $\mathcal{R}(L)$  est muni d'une manière évidente d'une structure d'anneau non intègre, nous noterons  $\mathcal{R}^*(L)$  les éléments réguliers de  $\mathcal{R}(L)$  pour la multiplication.

On sait que les éléments inversibles de  $\mathcal{R}(L)$  sont caractérisés par la propriété suivante : Il existe un entier  $M$  non nul, et des éléments de  $L^*$   $b_r$  et  $c_r$  pour  $0 \leq r < M - 1$  tels que  $I(kM + r) = b_r c_r^k$ ,  $\forall k, r$ . Pour  $A$  dans  $\mathcal{R}(L)$  non nul, nous noterons  $\Gamma_0(A)$  le sous-groupe multiplicatif de  $L$  engendré par les fréquences de  $A$ , et nous poserons  $\Gamma(A) = \{z \in L; \exists h \geq 1, z^h \in \Gamma_0(A)\}$ .

On dira qu'un élément  $A$  de  $\mathcal{R}(L)$  est associé à  $B$ , s'il existe  $I$  inversible dans  $\mathcal{R}(L)$  tel que  $A = IB$ .

Avec ces notations, on a le résultat suivant [2].

PROPOSITION 1. - Soit  $A$  dans  $\mathcal{R}^*(L)$ . Il existe  $I$  inversible dans  $\mathcal{R}(L)$ , à fréquences dans  $\Gamma(A)$ , tel que  $\tilde{A} = IA$  possède la propriété suivante : Soient  $B$  et  $C$  dans  $\mathcal{R}(L)$ , tels que  $A = BC$ , alors il existe  $\tilde{B}$  et  $\tilde{C}$ , associés à  $B$  et  $C$ , et à fréquences dans  $\Gamma(A)$  tels que  $\tilde{A} = \tilde{B}\tilde{C}$ .

---

(\*) Jean-Paul BÉZIVIN, Mathématiques, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75230 PARIS CEDEX 05

Nous rappelons d'autre part la conjecture du quotient de Hadamard pour les suites récurrentes : Soient  $u(n)$  et  $v(n)$  deux suites récurrentes linéaires, dont les coefficients et les fréquences sont dans un corps de nombres  $K$ , et  $S$  un ensemble fini de places de  $K$ , contenant les places infinies. On suppose que, pour tout entier  $n$  assez grand, on a  $v(n)$  non nul et  $u(n)/v(n)$   $S$ -entier de  $K$ ; dans ces conditions la suite  $u(n)/v(n)$  est une suite récurrente linéaire.

On a le résultat suivant (voir [1]).

THÉORÈME 1 [PISOT-CANTOR]. - On suppose qu'il existe une valeur absolue de  $K$ , telle qu'il existe une unique fréquence de  $v$  de plus grande valeur absolue. Alors la conjecture du quotient de Hadamard est vraie.

### 3. Généralisation du résultat de LEWIS et MORTON.

Soit  $K$  un corps de nombres, et  $a_1, \dots, a_s$   $s$  éléments non nuls de  $K$ . On suppose qu'il existe une valeur absolue de  $K$ , que nous noterons  $|\cdot|$ , telle que  $|a_1|, \dots, |a_s|$  soient multiplicativement indépendants. Soient d'autre part  $P$  et  $Q$  deux polynômes de  $K[X_1, \dots, X_s]$ , et  $S$  un ensemble fini de place de  $K$ , contenant les places à l'infini. On suppose que, pour tout  $n$  assez grand,  $W(n) = P(a_1^n, \dots, a_s^n)/Q(a_1^n, \dots, a_s^n)$  est un  $S$ -entier.

LEMME 1. - Dans ces conditions,  $W(n)$  est une suite récurrente linéaire.

Preuve. - Il suffit de remarquer que, pour la valeur absolue  $|\cdot|$ , il existe parmi les fréquences de  $v(n) = Q(a_1^n, \dots, a_s^n)$  une seule de plus grande valeur absolue, et d'appliquer le théorème 1.

LEMME 2. - Dans les mêmes conditions, il existe un monôme  $\tilde{X}^v = X_1^{v_1}, \dots, X_s^{v_s}$  tel que  $\tilde{X}^v P(\tilde{X})/Q(\tilde{X})$  soit un polynôme.

Preuve. - D'après le lemme 1, la suite  $W(n)$  est une suite récurrente linéaire; il existe donc des constantes  $b_j$ ,  $0 \leq j \leq h$ , avec  $b_0, b_h$  non nul, telles que  $\sum_0^h b_j W(n+j) = 0$  pour tout  $n$  assez grand.

Soit  $F$  la fraction rationnelle

$$F(X_1, \dots, X_s) = \sum_{j=0}^{j=h} b_j P(a_1^j X_1, \dots, a_s^j X_s) / Q(a_1^j X_1, \dots, a_s^j X_s).$$

On a alors  $F(a_1^n, \dots, a_s^n) = 0$  pour tout  $n$  assez grand; les  $a_i$  étant multiplicativement indépendants, on en déduit que  $F = 0$ . Il est clair que l'on peut supposer  $P$  et  $Q$  premiers entre eux dans  $K[\tilde{X}]$ .

Si  $Q$  n'est pas alors un monôme, il existe  $x_1, \dots, x_s$  dans une clôture algébrique de  $K$ , tels que  $x_i \neq 0$  pour tout  $i$  et  $Q(x_1, \dots, x_s) = 0$ ,  $P(x_1, \dots, x_s) \neq 0$ .

Soit  $G = P/Q$ , en utilisant la relation  $F = 0$ , on montre qu'il existe une suite d'entiers  $n_k$  strictement croissante telle que  $G(a_1^{n_k} X_1, \dots, a_s^{n_k} X_s)$

soit non régulière au point  $(x_1, \dots, x_s)$  ; on en déduit donc que  $Q(a_1^{n_k} x_1, \dots, a_s^{n_k} x_s) = 0$  pour tout  $k$ , ce qui entraîne que  $Q$  est le polynôme nul puisque aucun des  $x_i$  n'est nul, et les  $a_i$  multiplicativement indépendants, et cette contradiction prouve le lemme.

PROPOSITION 2. - Soit  $K$  un corps de nombres, et  $a_1, \dots, a_s$  des éléments non nuls de  $K$ , on suppose qu'il existe une valeur absolue  $|\cdot|$  de  $K$  telle que les  $|a_i|$  soient multiplicativement indépendants, et de plus que, pour tout  $i$ , il existe un nombre premier  $p_i$  vérifiant  $|a_i|_{p_i} < 1$  et  $|a_j|_{p_i} = 1$  pour  $j$  différent de  $i$ . Soient  $P$  et  $Q$  deux éléments de  $K[X_1, \dots, X_s]$ , alors l'hypothèse  $P(a_1^n, \dots, a_s^n)/Q(a_1^n, \dots, a_s^n)$  entier pour tout  $n$  assez grand entraîne  $P/Q$  est un polynôme.

Preuve. - D'après le lemme 2, il suffit de regarder le cas où  $Q$  est un monôme. On suppose que l'exposant de  $X_i$  dans  $Q$  est non nul, et que l'on peut écrire  $P(X_1, \dots, X_s) = H(X_2, \dots, X_s) + X_1 R(X_1, \dots, X_s)$  avec  $H$  non nul. Il est facile de voir qu'il existe alors une constante  $C$  telle que l'on ait, pour tout  $n$  assez grand,

$$(*) \quad |H(a_2^n, \dots, a_s^n)|_{p_1} \leq C_1 |a_1|_{p_1}^n,$$

où  $p_1$  est le nombre premier donné dans les hypothèses de la proposition 2.

On sait qu'il existe un entier  $T \geq 1$  tel que les applications  $k \rightarrow a_i^{kT}$ ,  $2 \leq i \leq s$ , se prolongent en des applications continues de  $\mathbb{Z}_{p_1}$  dans  $\mathbb{C}_{p_1}$  ; Soit  $y$  un élément de  $\mathbb{Z}_{p_1}$  et  $k$  une suite d'entiers tendant  $p_1$ -adiquement vers  $y$  et tendant vers  $+\infty$  dans  $\mathbb{R}$ . Puisque  $|a_1|_{p_1} < 1$ , il résulte de la continuité des applications  $x \rightarrow a_i^{xT}$  et de l'inégalité (\*), que l'on a

$$H(a_2^{yT}, \dots, a_s^{yT}) = 0$$

pour tout  $y$  dans  $\mathbb{Z}_{p_1}$ , et donc pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , ce qui montre, puisque les  $a_i$  sont multiplicativement indépendants, que  $H = 0$ .

Il en résulte donc que  $P/Q$  est un polynôme, ce qui démontre la proposition 2.

Remarque. - Dans le cas où  $K = \mathbb{Q}$ , on améliore faiblement le résultat de [4] ; en effet, on peut appliquer la proposition 2, par exemple pour  $a = 6$  et  $a = 10$  dans le cas  $s = 2$ , et 6 et 10 ne sont pas premiers entre eux.

On peut aussi affaiblir les hypothèses du lemme 2 et de la proposition 2, de la manière suivante :

Définition. - Soit  $A$  une partie de  $\mathbb{N}$ , on dit que  $A$  est arithmétiquement dense (noté a.r) si  $A$  rencontre toute progression arithmétique.

Propriétés.

(a) Si  $A$  est a.r, alors  $A$  est dense dans  $\mathbb{Z}_p$  pour tout  $p$  premier.

(b) Si  $A$  est a.r, et si  $a$  et  $b$  sont des éléments de  $\underline{\mathbb{N}}$  avec  $a$  non nul, alors  $B = \{k ; ak + b \in A\}$  est aussi a.r.

PROPOSITION 3. - On se place dans le cas où les hypothèses du début du § 3 sont réalisées, à l'exception de  $W(n)$  S-entier pour tout  $n$ , que l'on remplace par :  $W(n)$  est S-entier pour tout  $n$  appartenant à une partie a.r de  $\underline{\mathbb{N}}$ . Alors la conclusion du lemme 2 est encore valable.

Preuve. - Il suffit de montrer que  $W(n)$  est S'-entier,  $S'$  étant un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes de  $K$ . On prend pour  $S'$  les places de  $S$  et aussi les places non archimédiennes où l'un des  $a_i$  n'est pas une unité du corps valué correspondant.

Soit  $v$  une place n'appartenant pas à  $S$ , elle induit sur  $\underline{\mathbb{Q}}$  une valeur absolue ultramétrique que nous noterons  $|\cdot|_p$ ,  $p$  étant le nombre premier correspondant. Il existe un entier  $M$  non nul, tel que chacune des applications  $k \rightarrow a_i^{kM+1}$  de  $\underline{\mathbb{N}}$  dans  $K$  se prolonge en une application continue de  $\underline{\mathbb{Z}}_p$  dans  $\underline{\mathbb{C}}_p$ ; il en est donc de même pour  $W(kM+r)$ , qui sera donc continue en tout point où elle sera définie. Comme par hypothèse,  $W(n)$  est dans la boule unité de  $\underline{\mathbb{C}}_p$  pour tout  $n$  dans une partie a.r de  $\underline{\mathbb{N}}$ , on en conclut facilement que  $W(n)$  est  $v$ -entier chaque fois que  $W(n)$  est défini, ce qui montre que  $W(n)$  est S'-entier, et démontre la proposition 3.

On peut aussi donner une version affaiblie de la proposition 2, en supposant  $W(n)$  entier pour tout  $n$  dans une partie a.r de  $\underline{\mathbb{N}}$ .

#### 4. Étude d'un problème de nature analogue.

Soit  $K$  un corps de nombre, et  $h$  un entier non nul. On se propose d'étudier les conséquences, pour un polynôme  $P$  de  $K[X_1, \dots, X_s]$  d'une hypothèse de la forme  $P(a_1^n, \dots, a_s^n) = (b_n)^h$ , où  $b_n$  est un S-entier de  $K$  pour tout  $n$  dans  $\underline{\mathbb{N}}$ , et les  $a_i$  des éléments non nuls de  $K$ .

On rappelle le résultat suivant (Voir [1]).

THÉOREME 2 [PISOT]. - Soit  $u(n)$  une suite récurrente d'éléments de  $K$ . On suppose que, pour tout  $n$ ,  $u(n)$  est la puissance  $h$ -ième d'un S-entier de  $K$ , et qu'il existe une valeur absolue de  $K$ , telle qu'il existe une unique fréquence de  $u$  de plus grande valeur absolue, celle-ci étant pôle simple de la fraction rationnelle associée à la suite récurrente  $u(n)$ . Dans ces conditions, on peut écrire  $u(n) = (v(n))^h$  où  $v(n)$  est une suite récurrente.

PROPOSITION 4. - Soient  $a_1, \dots, a_s$  des éléments de  $K^*$ , tels qu'il existe une valeur absolue de  $K$  vérifiant  $|a_1|, \dots, |a_s|$  sont multiplicativement indépendants. Soit  $P$  un élément de  $K[X_1, \dots, X_s]$  tel que, pour tout  $n$  entier naturel, on ait  $P(a_1^n, \dots, a_s^n) = (b_n)^h$ , où  $b_n$  est un S-entier de  $K$ . Dans

ces conditions, on a  $P = \underline{X}^v Q^h$ , où  $\underline{X} = X_1^{v_1}, \dots, X_s^{v_s}$  est un monôme, et  $Q$  un élément de  $K[X_1, \dots, X_s]$ .

Preuve. - D'après le théorème 2, on peut écrire  $u(n) = P(a_1^n, \dots, a_s^n) = v(n)$ , où  $v(n)$  est une suite récurrente.

On utilise ensuite la proposition 1, en notant  $L$  un corps contenant  $K$  et toutes les fréquences et coefficients de  $v(n)$ .

Il existe donc  $I(n)$ , inversible dans  $\mathcal{R}(L)$ , à fréquences dans  $\Gamma(u)$ , et  $J(n)$  inversible dans  $\mathcal{R}(L)$ , tels que  $J(n)v(n)$  et  $I(n)j^{-1}(n)v(n)^{h-1}$  soient toutes deux à fréquences dans  $\Gamma(u)$ .

D'après la propriété caractéristique des éléments inversibles de  $\mathcal{R}(L)$  et la définition de  $\Gamma(u)$ , on peut trouver un entier non nul  $M$  tel que  $J(nM) = \lambda \mu^n$  et  $(Jv)(nM) = T(n)$  soit à fréquences dans  $\Gamma_0(u)$ . On peut alors écrire  $P(a_1^{nM}, \dots, a_s^{nM}) = \lambda^{-h} \mu^{-hn} T(n)^h$ , d'où on déduit facilement que  $\mu^{-h}$  appartient à  $\Gamma_0(u)$ . Il en résulte, puisque les  $a_i$  sont multiplicativement indépendants, que l'on peut écrire  $P(X_1^M, \dots, X_s^M) = X_1^{r_1}, \dots, X_s^{r_s} G(X_1, \dots, X_s)^h$ , où l'on peut supposer que, pour tout  $i$ ,  $X_i$  ne divise pas le polynôme  $G$ .

Le facteur  $X_i^{r_i}$  est alors la plus grande puissance de  $X_i$  qui divise  $P(X_1^M, \dots, X_s^M)$ . On écrit  $P(X_1, \dots, X_s) = X_1^{\alpha_1}, \dots, X_s^{\alpha_s} Q(X_1, \dots, X_s)$  avec  $X_i$  ne divisant pas  $Q$ , et on est ramené à étudier l'égalité  $Q(X_1^M, \dots, X_s^M) = [G(X_1, \dots, X_s)]^h$ .

On trouve dans [3] le lemme suivant.

LEMME 3. - Soit  $H$  un polynôme irréductible de  $L[X_1, \dots, X_s]$ , où  $L$  est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, que l'on suppose non divisible par les variables  $X_i$ . Soient d'autre part  $t_1, \dots, t_s$  des entiers non nuls. Si le polynôme  $H(X_1^{t_1}, \dots, X_s^{t_s})$  est réductible, soit  $A$  un de ses facteurs irréductibles, alors on obtient tous les autres facteurs irréductibles de  $H(X_1^{t_1}, \dots, X_s^{t_s})$  en remplaçant dans  $A$  les  $X_i$  par  $\xi_i X_i$ , où les  $\xi_i$  sont des racines  $t_i$ -èmes de l'unité, et en prenant une, et une seule, fois chaque polynôme à équivalence près (deux polynômes sont équivalents si l'un est multiple scalaire de l'autre). En particulier,  $H(X_1^{t_1}, \dots, X_s^{t_s})$  n'a pas de facteurs multiples.

On utilise le lemme 3 de la manière suivante : tout d'abord, si  $B$  et  $C$  sont des facteurs irréductibles distincts de  $Q(X_1, \dots, X_s)$ , alors  $B(X_1^M, \dots, X_s^M)$  et  $C(X_1^M, \dots, X_s^M)$  sont premiers entre eux. On regarde alors la décomposition de  $B(X_1^M, \dots, X_s^M)$  par exemple, qui d'après le lemme n'a que des facteurs simples. Soit  $D$  l'un d'entre eux, la multiplicité de  $D$  dans  $Q(X_1^M, \dots, X_s^M)$  est donc égale à la multiplicité de  $B$  dans  $Q(X_1, \dots, X_s)$ . Comme  $Q(X_1^M, \dots, X_s^M)$  est une puissance  $h$ -ième, la multiplicité de  $D$  est un multiple de  $h$ ; donc la multiplicité de tout facteur irréductible de  $Q(X_1, \dots, X_s)$  est un multiple de

$h$ , et  $Q$  est la puissance  $h$ -ième d'un polynôme, a priori à coefficients dans une extension algébrique de  $K$ . On montre facilement, en utilisant la relation de départ  $P(a_1^n, \dots, a_s^n) = (b_n)^h$  avec  $b_n$  dans  $K$ , que  $Q$  est en fait la puissance  $h$ -ième d'un polynôme de  $K[X_1, \dots, X_s]$ .

Remarque. - L'exemple  $s = 1$ ,  $P(X) = X$ ,  $a = 4$ ,  $h = 2$ , montre que l'on n'obtient pas que  $P$  est une puissance  $h$ -ième en général.

COROLLAIRE 1. - Sous les hypothèses de la proposition 4, si l'on suppose de plus que  $P$  n'est divisible par aucun des  $X_i$ , alors  $P$  est la puissance  $h$ -ième d'un élément de  $K[X_1, \dots, X_s]$ .

On peut enfin donner un résultat plus précis que celui de la proposition 4 en faisant des hypothèses sur les  $a_i$ , nous donnons un énoncé pour le cas  $K = \mathbb{Q}$ :

COROLLAIRE 2. - Soit  $h$  un entier naturel non nul,  $P$  un polynôme à  $s$  variables à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ , et  $a_i$  des éléments non nuls de  $\mathbb{Q}$ . On suppose que  $P(a_1^n, \dots, a_s^n)$  est la puissance  $h$ -ième d'un rationnel pour tout  $n$  entier naturel, et que de plus, pour tout  $i$ , il existe un nombre premier  $p$  tel que la valuation  $p_i$ -adique de  $a_i$  soit 1, et celle des  $a_j$  avec  $j \neq i$  soit nulle, alors  $P$  est la puissance  $h$ -ième d'un polynôme de  $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_s]$ .

Preuve. - Il est facile de voir que l'on est dans les conditions d'application de la proposition 4. On peut donc écrire  $P = X_1^{r_1}, \dots, X_s^{r_s} Q^h$ . On regarde alors la valuation  $p_i$ -adique des deux membres de l'égalité

$$P(a_1^n, \dots, a_s^n) = a_1^{r_1 n}, \dots, a_s^{r_s n} Q(a_1^n, \dots, a_s^n)^h,$$

$n$  appartenant à  $\mathbb{N}$ , on a alors  $r_i$  multiple de  $h$ , d'où le résultat.

#### RÉFÉRENCES

- [1] BENZAGHOU (Benali). - Algèbres de Hadamard, Bull. Soc. math. France, t. 98, 1970, p. 209-252.
- [2] BÉZIVIN (Jean-Paul). - Factorisation de suites récurrentes, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique, 7e-8e années, 1979-1981, n° 33, 9 p.
- [3] GOURIN (Eli). - Irreducibles polynomials in several variables which become reducible when the variables are replaced by powers of themselves, Trans. Amer. math. Soc., t. 32, 1930, p. 485-501.
- [4] LEWIS (D. J.) and NORTON (Patrick). - Quotients of polynomials and a theorem of Pisot and Cantor, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Section 1, t. 28, 1981, p. 813-823.