MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Coefficients constants d'un produit croulant

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 2 (1981-1982), exp. nº 22, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_2_A5_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 22, 8 p.

26 avril 1982

COEFFICIENTS CONSTANTS D'UN PRODUIT CROULANT

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Nous nous plaçons dans un corps k ultramétriquement valué, complet, maximalement complet et algébriquement clos. Nous allons étudier une fonction $f(x)$ analytique uniforme au sens de KRASNER [2], définie dans un disque $D(0\,,\,1^-)$ privé de ses pôles. On s'intéresse plus particulièrement ici au coefficient de degré 0 du développement en série de Laurent de f autour d'un de ses pôles.

1. Cas d'un produit infini à pôles simples.

PROPOSITION 1. - *Soit une suite* $\{b_i\}$, $i \in \underset{\sim}{N}$ *d'éléments du disque* $D(0\,,\,1^-)$ *tels que*

(i) $\inf |b_i - b_j|_p = \delta > 0$

(ii) $\lim_{i\to+\infty} |b_i|_p = 1$.

Soit $\{a_i\}$, $i \in \underset{\sim}{N}$, *une autre suite d'éléments de* $D(0\,,\,1^-)$ *tels que*

$$\lim_{i\to+\infty} |a_i - b_i|_p = 0 .$$

Posons

$$f(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x - a_i}{x - b_i}\right) - 1$$

et

$$\Delta_\rho = D(0\,,\,1^-) \setminus \bigcup_{i\in \underset{\sim}{N}} D(b_i\,,\,\rho) \quad (\forall\, \rho \in \underset{\sim}{R}^+\,,\quad \rho < \delta) .$$

Alors $\lim_{|x|\to 1, x\in\Delta_\rho} f(x) = 0$, $\forall\, \rho > 0$ si, et seulement si,

$$\liminf_{j\to+\infty} \left|\frac{1 - \prod_{i\neq j} ((b_j - b_i)/(b_j - a_i))}{b_j - a_j}\right|_p < +\infty .$$

(*) Texte reçu le 9 juillet 1982.
Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

Démonstration.

1° Préliminaires : Développement en série de Laurent de $f(x)$ autour d'un pôle b_j (j fixé).

Posons $x = b_j + h$.

$$f(b_j + h) = \left(\frac{b_j - a_j + h}{h}\right) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - a_i + h}{b_j - b_i + h}\right) - 1$$

$$= \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - a_i}{b_j - b_i}\right) \left[\left(1 + \frac{b_j - a_j}{h}\right) \left(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \frac{1 + (h/(b_j - a_i))}{1 + (h/(b_j - b_i))}\right) - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i}\right)\right]$$

Posons

$$f(b_j + h) = \left[\prod_{i=1, i\neq j}^{+\infty} \left(\frac{b_j - a_i}{b_j - b_i}\right)\right] \theta_j(h) .$$

Les zéros de $\theta_j(h)$ sont ceux de $f(b_j + h)$.

$$\theta_j(h) = \left(1 + \frac{b_j - a_j}{h}\right)\left[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \left(1 + \frac{h}{b_j - a_i}\right)\left(1 - \frac{h}{b_j - b_i} + \frac{h^2}{(b_j - b_i)^2} - \dots\right)\right] - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i}\right) .$$

D'où les deux premiers termes du développement en série de Laurent $\sum_{n=-1}^{+\infty} \omega_n^j h^n$ de $\theta_j(h)$, qui converge d'ailleurs pour $0 < |h| < \delta$:

$$(1) \quad \theta_j(h) = \frac{b_j - a_j}{h} + \left[1 - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i}\right) + (b_j - a_j) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq 1}}^{+\infty} \left(\frac{1}{b_j - a_i} - \frac{1}{b_j - b_i}\right)\right] + h\,\omega_1^\delta + h^2\,\omega_2^j + \dots$$

2° Condition nécessaire. - Supposons que

$$\lim_{|x|\to 1, x\in\Delta_p} f(x) = 0 .$$

Soit $(d_i)_{i\in N}$ l'ensemble des zéros de $f(x)$ sur $D(0 , 1^-)$; on ne peut pas numéroter la suite $(d_i)_{i\in \underset{\sim}{N}}$ de telle sorte que

$$\lim_{i\to+\infty} |d_i - b_i|_p = 0 .$$

(Sinon on pourrait se ramener au cas général en multipliant $f(x)$ par

$$\prod_{i=1}^{+\infty} ((x - b_i)/(x - d_i))$$

ce qui supprimerait les pôles, et on n'aurait pas

$$\lim_{|x|\to 1,\, x\in\Delta p} f(x) = 0 .$$

Il existe donc une constante $c \in \underset{\sim}{R}^+$, et une sous-suite $(q \longrightarrow b_{i_q})$ de pôles b_{i_q} telles que

$$\inf_{q\in \underset{\sim}{N}} |b_{i_q} - \alpha_{i_q}|_p \geqslant c$$

La fonction $\theta_{i_q}(h)$ n'a donc pas de zéro dans le disque $D(b_{i_q}, c)$ et par suite :

$$\frac{|\omega_{-1}^{i_q}|_p}{c} > |\omega_0^{i_q}|_p \quad \text{pour } \theta_{i_q}(h) ,$$

ce qui, d'après le développement (1), se traduit par

$$\frac{|b_{i_q} - a_{i_q}|_p}{c} \geqslant \left|1 - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_q}}^{+\infty} \left(\frac{b_{i_q} - b_i}{b_{i_q} - a_i}\right) + (b_{i_q} - a_{i_q}) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_q}}^{+\infty} \frac{a_i - b_i}{(b_{i_q} - a_i)(b_{i_q} - b_i)}\right|_p$$

Alors, l'une des deux relations suivantes est réalisée :

ou bien
$$\left|1 - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_q}}^{+\infty} \left(\frac{b_{i_q} - b_i}{b_{i_q} - a_i}\right)\right|_p \leqslant \frac{|b_{i_q} - a_{i_q}|_p}{c}$$

ou bien

$$\left|1 - \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_q}}^{+\infty} \left(\frac{b_{i_q} - b_i}{b_{i_q} - a_i}\right)\right|_p = |b_{i_q} - a_{i_q}|_p \left|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_q}}^{+\infty} \frac{a_i - b_i}{(b_{i_q} - a_i)(b_{i_q} - b_i)}\right|_p$$

$$\leqslant |b_{i_q} - a_{i_q}|_p \frac{\sup_{i\neq i_q} |a_i - b_i|_p}{\inf_{i\neq i_q} |b_{i_q} - b_i|_p^2} \leqslant \frac{|b_{i_q} - a_{i_q}|}{\delta^2}$$

à partir d'un certain rang q_0 .

Dans les deux cas, il existe $c \in \underset{\sim}{R}^+$ telle que

$$\frac{\left|1 - \prod_{i=1,\, i\neq i_q}^{+\infty} ((b_{i_q} - b_i)/(b_{i_q} - a_i))\right|_p}{|b_{i_q} - a_{i_q}|_p} \leqslant c .$$

3° <u>Condition suffisante</u>. - Supposons que

$$\liminf_{j\to+\infty} \left| \frac{1 - \prod_{i\neq j} ((b_j - b_i)/(b_j - a_i))}{b_j - a_j} \right|_p < \mu$$

(μ constante réelle positive).

Supposons que f ne tende pas vers 0 quand $|x|_p \to 1$, $x \in \Delta\rho$.

Alors on sait [3] que f se factorise sous la forme :

$$R(x) \prod_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{x - d_i}{x - b_i}\right)$$

où $R(x)$ est une fraction rationnelle et où $\lim_{i\to+\infty} (d_i - b_i) = 0$.

Par suite, $\forall\ \rho \in]0\ ,\ \delta[$, il existe $r_\rho \in]0\ ,\ 1[$ tel que f n'admette aucun zéro dans $\Gamma \cap \Delta\rho$, où $\Gamma = \{x\ ;\ r_\rho < |x| < 1\}$.

(Il suffit de considérer le zéro de plus grande valeur absolue $|x_0|_p$ de $R(x)$ et le plus petit entier $N\rho$, tel que $|d_i - b_i|_p < \rho$ pour $i \geqslant N\rho$, et de prendre $r_\rho = \max(|x_0|_p\ ,\ |\alpha_{N\rho}|_p\ )$.)

f admet alors, dans chaque disque $D(b_i\ ,\ \rho)$, un, et un seul zéro α_i (pour $|b_i|_p > r_\rho$, c'est-à-dire pour $i > N\rho$), et

$$\lim_{i\to+\infty} |d_i - b_i|_p = 0 .$$

Alors, en considérant toujours le développement de Laurent autour de chaque pôle b_j , pour $j > N\rho$, on voit que

$$\lim_{j\to+\infty} \left| \frac{1 - \prod\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \left(\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i}\right) + (b_j - a_j) \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{+\infty} \frac{a_i - b_i}{(b_j - a_i)(b_0 - b_i)}}{(b_j - a_j)} \right|_p = +\infty ,$$

et comme

$$\left| \sum_{i=1, i\neq j}^{+\infty} \frac{a_i - b_i}{(b_j - b_i)(b_j - a_i)} \right|_p \leqslant \frac{1}{\delta^2} ,$$

on voit que :

$$\lim_{j\to+\infty} \left| \frac{1 - \prod_{i=1, i\neq j}^{+\infty} ((b_j - b_i)/(b_j - a_i))}{b_j - a_j} \right|_p = +\infty$$

ce qui contredit l'hypothèse.

2. Cas général : pôles multiples

La généralisation des théorèmes de [3] au cas où la distance de deux pôles n'est plus inférieurement bornée, mais où les pôles sont groupés par paquets finis dans des disques disjoints dont la distance est inférieurement bornée, étant facile, nous donnerons à la proposition générale la forme suivante :

PROPOSITION 2. - Soit une suite $\{b_n\}$ $n \in \underset{\sim}{N}$ d'éléments du disque $D(0,1^-)$ tels que

(i) $\lim_{n\to+\infty} |b_n|_p = 1$.

(ii) Il existe $\delta \in \underset{\sim}{R}^+$ tel que l'ensemble des b_i contenus dans le disque $D(b_n , \delta)$ soit fini, $\forall$ $n \in \underset{\sim}{N}$.

On note r_n le réel positif tel que la couronne

$$\Gamma_n = \{x \in D(0 , 1^-) \ ; \ r_n < |x - b_n|_p < \delta\}$$

ne contienne aucun terme de la suite b_m .

Soit $(a_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant q_n}$ $(q_n \in \underset{\sim}{N})$ une famille d'éléments de $D(0 , 1^-)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant j\leqslant q_n} |a_{n,j} - b_n|_p = 0|$$

et soit

$$f(x) = [\prod_{n\in\underset{\sim}{N}} (\prod_{1\leqslant j\leqslant q_n} (\frac{x - a_{n,j}}{x - b_n}))] - 1 .$$

Soit $\sum_{-\infty}^{+\infty} \omega_{i,n}(x - b_n)^i$ le développement de Laurent de φ dans la couronne Γ_n, pour chaque $n \in \underset{\sim}{N}$.

Soit

$$\Delta\rho = D(0 , 1^-) \setminus \bigcup_{n\in\underset{\sim}{N}} D(b_n , \rho) .$$

Alors, $\lim_{|x|_p\to 1, x\in\Delta\rho} |f(x)| = 0$, a lieu si, et seulement si,

$$\lim_{n\to+\infty} |\omega_{0,n}|_p = 0 .$$

Démonstration. - Soit ρ un réel strictement inférieur à δ , et soit $r'_n = \max(r_n , \rho)$.

Alors il est clair que la couronne $\Gamma'_n = \{x \ ; \ r'_n < |x - b_n|_p < \delta\}$ est incluse dans $\Delta\rho$ quelque soit $n \in \underset{\sim}{N}$.

1° Supposons d'abord f non croulante. Alors f est quasi inversible dans $\Delta\rho$,

$\forall\ \rho \in \underset{\sim}{R}^+$, et, d'après les résultats de [3], on sait que f se factorise sous la forme

$$R(x) \prod_{n \in \underset{\sim}{N}} [\prod_{1 \leq j \leq q_n} (\frac{x - c_{n,j}}{x - b_n})] ,$$

où $R(x)$ est un élément analytique de $H(\Delta\rho)$ muni d'un nombre fini de zéros et de pôles dans $D(0\ ,\ 1^-)$, et où $c_{n,j} \in D(0\ ,\ 1^-)$ avec

$$\lim_{n\to\infty} (\max_{1\leq j\leq q_n} |c_{n,j} - b_n|_p) = 0 .$$

Par suite, il existe une constante réelle positive $R < 1$, une constante $\alpha \in \underset{\sim}{R}^+$, un entier relatif M tels que :

$$\left.\begin{matrix} R < |x|_p < 1 \\ \\ x \in \Delta\rho \end{matrix}\right\} \Longrightarrow |f(x)|_p = |R(x)|_p = \alpha\ |x|_p^M$$

Soit N tel que $|b_n|_p > R$ pour $n \geqslant N$. Alors,

$$|f(x)|_p = \alpha\ |x|_p^M \quad \text{pour} \quad x \in \Gamma'_n \quad \text{si} \quad n \geqslant N .$$

Or, dans Γ'_n , $|f(x)|_p$ est de la forme

$$\sup_i\ |\omega_{i,n}|_p\ \ |x - b_n|_p^i ,$$

ce qui exige $|f(x)|_p = |\omega_{0,n}|_p$, et donc

$$|\omega_{0,n}|_p = \alpha\ |b_n|_p^M \quad \text{pour} \quad n > N .$$

Donc $|\omega_{0,n}|_p$ reste borné inférieurement lorsque n devient infini.

2° Supposons maintenant, réciproquement, que $\lim_{|x|\to 1,\ x\in\Delta\rho} |f(x)|_p = 0$.

Or, dans Γ'_n , on a évidemment

$$\sup_{x\in\Gamma'_n} |f(x)|_p \geqslant |\omega_{0,n}|_p ,$$

d'où

$$\limsup_{n\to+\infty} |\omega_{0,n}|_p \leqslant \limsup_{n\to+\infty} \|f\|_{\Gamma'_n} \leqslant \limsup_{\substack{|x|\to 1 \\ x\in\Delta\rho}} |f(x)| = 0 .$$

Remarque. - Dans le cas où les pôles sont simples, la deuxième proposition donne comme condition nécessaire et suffisante pour que f soit croulante :

$$\lim_{j\to+\infty} |\omega_{0,j}|_p = 0$$

c'est-à-dire

$$\lim_{j\to+\infty} |1 - \prod_{i=1, i\neq j}^{+\infty} (\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i})|_p = 0$$

(puisque le deuxième terme de $|\omega_{0,j}|_p$ tend toujours vers 0 lorsque j devient infini). On vérifie facilement que cette condition est équivalente à :

$$\lim_{j\to+\infty} |1 - \prod_{i<j} (\frac{b_j - b_i}{b_j - a_i})|_p = 0 ,$$

ou encore à

$$\lim_{j\to+\infty} |1 - \prod_{i<j} (\frac{b_j - a_i}{b_j - b_i})|_p = 0$$

$$\lim_{j\to+\infty} |1 - (\prod_{i<j} \frac{a_i}{b_i}) \prod_{i<j} (\frac{(b_j/a_i) - 1}{(b_j/b_i) - 1})|_p = 0$$

$$\lim_{j\to+\infty} |\frac{\prod_{i<j} ((b_j/b_i) - 1) - (\prod_{i<j} (a_i/b_i)) \prod_{i<j} ((b_j/a_i) - 1)}{\prod_{i<j} ((b_j/b_i) - 1)}|_p = 0$$

ce qui exige

$$\lim_{j\to+\infty} |\prod_{i<j} (\frac{b_j}{b_i} - 1)|_p = + \infty$$

(car sinon il faudrait avoir $a_i = b_i$, $\forall$ i).

Mais cette condition nécessaire est équivalente à

$$\lim_{j\to+\infty} \prod_{i<j} |\frac{b_j}{b_i}|_p = + \infty .$$

Ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta\rho$ ait un T-filtre pour tout $\rho > 0$.

On trouverait la même condition nécessaire (en plus compliqué) dans le cas des pôles multiples : $\Delta\rho$ doit avoir un T-filtre pour tout ρ pour qu'il soit possible de trouver des $a_{n,j}$ tels que $f(x)$ soit croulante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.

[2] KRASNER (Marc). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, "Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres" [1964. Clermont-Ferrand], p. 97-141. - Paris, Centre national de la Recherche scientifique, 1966 (Colloques internationaux du CNRS, 143).

[3] SARMANT-DURIX (Marie-Claude). - Décomposition en produit de facteurs de fonctions méromorphes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 292, 1981, Série 1, p. 127-130.