

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

THONG NGUYEN-QUANG-DO

Formulations algébriques de la conjecture de Leopoldt et applications

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 2 (1981-1982), exp. n° 19, p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_2_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FORMULATIONS ALGÈBRIQUES DE LA CONJECTURE DE LEOPOLDT
ET APPLICATIONS

par NGUYEN-QUANG-DO Thong (*)

Soient k un corps de nombres, et p un nombre premier fixé. Le but de cet exposé est de donner (sans prétendre être exhaustif) diverses formulations algébriques de la conjecture de Leopoldt pour k et p , avec, pour chaque formulation, des applications en direction de la démonstration de cette conjecture.

On notera toujours r_1 et r_2 les nombres respectifs de places réelles et complexes de k , et $\rho = r_1 + r_2 - 1$ le $\mathbb{Z}$ -rang du groupe des unités E_k de k .

1. Rappels.

Soit (u_i) un système fondamental d'unités de k . On pose la matrice

$$R_p = (\log_p \iota(u_i)) ,$$

où $\log_p$ désigne le logarithme p -adique, et ι parcourt les plongements de k dans Ω_p ($=$ complété de $\bar{\mathbb{Q}}_p$).

CONJECTURE DE LEOPOLDT. - Le rang de la matrice R_p est maximal, c'est-à-dire égal à ρ

Si le corps k est totalement réel, cette conjecture équivaut à $\det R_p \neq 0$, c'est-à-dire à la non-nullité du régulateur p -adique [7].

Par des méthodes "à la Baker", A. BRUMER a démontré le théorème suivant.

THÉOREME 1 (BRUMER [1]). - Si k est une extension abélienne de $\mathbb{Q}$ ou d'un corps quadratique imaginaire, k vérifie la conjecture de Leopoldt.

Pour d'autres résultats de type analytique, voir par exemple l'exposé d'EMSALEM [3]

2. Traduction par le corps de classes.

Il est immédiat que le rang de R_p ne change pas si l'on prend, à la place des u_i , des éléments de E_k engendrant un sous-groupe de E_k d'indice fini. On prend d'habitude le sous-groupe E_k^1 , défini comme suit.

(*) Texte reçu le 4 octobre 1982.

NGUYEN-QUANG-DO Thong, 49 rue Pierre Valette, 92240 MALAKOFF.

Pour toute place v de k au-dessus de p , soit U_v^1 le groupe des unités principales du complété k_v de k . Soit $U^1 = \prod_{v/p} U_v^1$. Posons

$$E_k^1 = \{x \in E_k ; i(x) \in U^1\},$$

où i désigne le plongement diagonal. Désignons par $\overline{i(E_k^1)}$ la fermeture de $i(E_k^1)$ pour la topologie-produit. Par le corps de classes, nous avons une suite exacte :

$$(*) \quad 0 \longrightarrow U^1 / \overline{i(E_k^1)} \longrightarrow \text{Gal}(M_k / F_k) \longrightarrow A_k \longrightarrow 0,$$

où : $F_k = p$ -extension abélienne maximale non ramifiée de k ,

$M_k = p$ -extension abélienne maximale non ramifiée en toute place de k ne divisant pas p ,

$A_k = p$ -groupe des classes d'idéaux de k .

Posons enfin $\delta(k) = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \text{Ker}(E_k^1 \otimes_{\mathbb{Z}_p} \overline{i(E_k^1)})$ (cet homomorphisme envoie $u_j \otimes a_j$ sur $i(u_j)^{a_j}$; il est surjectif).

THÉOREME 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) k vérifie la conjecture de Leopoldt,
- (ii) $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_k = 1 + r_2$, où $X_k = \text{Gal}(M_k / k)$,
- (iii) $\delta(k) = 0$ ($\delta(k)$ est appelé le "défaut" de la conjecture de Leopoldt).

Preuve. - En prenant les $\mathbb{Z}_p$ -rangs dans la suite exacte (*), on a :

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_k = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} U_k^1 - \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \overline{i(E_k^1)} = r_1 + 2r_2 - \rho + \delta(k) = 1 + r_2 + \delta(k).$$

Q. E. D.

Une autre façon d'exprimer la condition (ii) est de dire que k **doit posséder** exactement $(1 + r_2)$ $\mathbb{Z}_p$ -extensions indépendantes.

Remarque 1. - Au lieu de considérer seulement les places de k divisant p , on peut introduire un ensemble fini S de places de k , contenant toutes les places divisant p . En désignant alors par M_k la p -extension abélienne maximale de k non ramifiée hors de S , et $X_k = \text{Gal}(M_k / k)$, le théorème 2 reste entièrement valable.

Application. - Supposons maintenant que k contient le groupe μ_p des racines p -ièmes de l'unité. Suivant BERTRANDIAS et PAYAN [2], introduisons les deux sous-groupes suivants de $k^\times / k^{\times p}$:

$\Phi_k = \{a \in k^\times/k^{\times p} ; k(\sqrt[p]{a}) \text{ se plonge dans une } \mathbb{Z}_p\text{-extension de } k\}$,

$\Psi_k = \{a \in k^\times/k^{\times p} ; k(\sqrt[p]{a}) \text{ se plonge, pour tout entier } n, \text{ dans une surextension cyclique de } k, \text{ de degré égal à } p^n\}$.

En notant $\dim$ la dimension sur le corps $\mathbb{F}_p$, il est clair que $\dim \Psi_k \geq \dim \Phi_k$ (pas d'égalité en général), et $\dim \Phi_k \geq 1 + r_2$, avec égalité si, et seulement si, k vérifie la conjecture de Leopoldt (voir théorème 2). Pour que k vérifie Leopoldt il suffit donc que $\dim \Psi_k = 1 + r_2$.

Exemples ([2], [8]).

(i) $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{d})$.

Pour $d = -2, -5, -11, -14, -17, -35$, $\dim \Psi_k = 1 + r_2 = 3$.

Pour $d = 83$, $\dim \Psi_k = 4$.

(ii) $p = 5$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-11}, \mu_p)$, alors $\dim \Psi_k = 2 + r_2$.

(iii) $k = \mathbb{Q}(\mu_p)$, p irrégulier, alors $\dim \Psi_k > 1 + r_2$.

(iv) $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{7}, \sqrt[4]{\alpha})$, avec $\alpha = -3(2 + \sqrt{7})^2$. On vérifie que $k = \mathbb{Q}(\sqrt{7}).N$, où $N = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-7}, \sqrt{6+4\sqrt{-3}})$ (corps diédral), et $\dim \Psi_k = 1 + r_2$.

THÉOREME 3 (MIKI [8]). - Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim \Psi_k = 1 + r_2$.

(ii) $X_k \simeq \mathbb{Z}_p^{1+r_2} \times (\prod_{v/p} \mu_{k_v})/\mu_k$, où μ_L désigne le p-groupe des racines de l'unité contenues dans le corps L .

Exemple. - $p = 3$, $k = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2+3\sqrt{-3}})(4+3\sqrt{-3}), \mu_p)$. Alors $X_k \simeq (\mathbb{Z}/3)^2 \times (\mathbb{Z}_3)^3$.

3. Traduction par la théorie d'Iwasawa.

Dans toute cette section, k_∞/k désigne la $\mathbb{Z}_p$ -extension cyclotomique de k , $\Gamma = \text{Gal}(k_\infty/k)$, $\Lambda = \mathbb{Z}_p[[\Gamma]] \simeq \mathbb{Z}_p[[T]]$ (l'algèbre d'Iwasawa des séries formelles en T , à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$). Deux modules d'Iwasawa vont intervenir de façon essentielle :

M_∞ = la p -extension abélienne maximale de k_∞ , non ramifiée en toute place de k_∞ ne divisant pas p , et $X_\infty = \text{Gal}(M_\infty/k_\infty)$.

L_∞ = la p -extension abélienne maximale de k_∞ , non ramifiée, décomposant totalement toute place de k_∞ divisant p , et $Y_\infty = \text{Gal}(L_\infty/k_\infty)$.

X_∞ et Y_∞ sont des Λ -modules, via l'action naturelle de Γ .

On peut maintenant compléter le théorème 3.

THÉOREME 4 (GILLARD [4]). - Si $\dim \psi_k = 1 + r_2$, alors $Y_\infty = 0$. La réciproque est vraie si aucune place de k au-dessus de p ne se décompose dans k_∞/k .

Les modules Y_∞ et X_∞ sont liés par un résultat fondamental d'IWASAWA [6].

Soit N_∞ l'extension de k_∞ obtenue en ajoutant toutes les racines p^n -ièmes (n variable) des p -unités de k_∞ . Alors $\text{Gal}(N_\infty/k_\infty)$ est quasi isomorphe à $\dot{Y}_\infty$, où la notation $(\cdot)$ signifie qu'on a "tordu" le module Y_∞ par le caractère cyclotomique. Le module X_∞ lui-même vérifie le théorème suivant.

THÉOREME 5 (IWASAWA [6]). - On a $\text{rang}_\Lambda X_\infty = r_2$.

COROLLAIRE 1. - On a $\delta(k) = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_\infty^\Gamma = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \dot{Y}_\infty^\Gamma$. En particulier, k vérifie la conjecture de Leopoldt si, et seulement si, $X_\infty^\Gamma = 0$, si, et seulement si, $\dot{Y}_\infty^\Gamma = 0$.

Preuve. - D'après le théorème de structure pour les Λ -modules, on a :

$$\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_\infty / TX_\infty = r_2 + \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_\infty^\Gamma.$$

Or la théorie de Galois fournit une suite exacte

$$0 \rightarrow X_\infty / TX_\infty \rightarrow X_k \rightarrow \mathbb{Z}_p \rightarrow 0.$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. - Soit (k_n) la tour canonique des extensions cycliques contenues dans k_∞/k . Alors les défauts $\delta(k_n)$ sont bornés ("forme faible" de Leopoldt, voir [5]).

Preuve. - Comme précédemment, $\delta(k_n) = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_\infty^{\Gamma_n}$, où $\Gamma_n = \text{Gal}(k_\infty/k_n)$. Or X_∞ est un Λ -module noethérien, donc la suite des sous-modules $X_\infty^{\Gamma_n}$ est stationnaire.

Q. E. D.

Remarque 2. - IWASAWA [6] a montré que X_∞ n'a pas de sous-module fini non nul. La condition $X_\infty^\Gamma = 0$ équivaut à ce que T ne divise pas la série caractéristique de X_∞ .

4. Traduction par la cohomologie galoisienne.

Les notations sont les mêmes que dans la section 2. En outre, désignons par G_k le groupe de Galois de la p -extension (non abélienne) maximale de k , non ramifiée en toute place de k ne divisant pas p . Soit d (resp. r) le nombre minimal de générateurs (resp. de relations) du groupe G_k . Par définition, on a

$$d = \dim H^1(G_k, \mathbb{F}_p) \quad \text{et} \quad r = \dim H^2(G_k, \mathbb{F}_p),$$

et l'on sait que $-1 + d - 2 = r_2$ (caractéristique d'Euler-Poincaré). Par des considérations de suites spectrales, on montre le théorème suivant.

THÉOREME 6 (voir [9]). - Soit K une extension galoisienne finie de k , non ramifiée hors de p , dont le groupe de Galois est un p -groupe G . On a une suite exacte de $(\mathbb{Z}_p G)$ -modules.

$$(**) \quad 0 \rightarrow \Delta(K) \rightarrow (\mathbb{Z}_p G)^r \rightarrow R_d^{ab}(G) \rightarrow X_K \rightarrow 0,$$

où $\Delta(K)$ est le dual de Pontrjagin de $H^2(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$, et le module $R_d^{ab}(G)$ est le "module des relations" de G , défini comme suit.

Considérons G comme un quotient du pro- p -groupe libre F_d à d générateurs. Soit R_d le noyau de la projection $F_d \rightarrow G$. Par définition, $R_d^{ab}(G)$ est l'abélianisé de R_d , sur lequel G opère naturellement.

COROLLAIRE. - On a $\delta(K) = \text{rang}_{\mathbb{Z}_p} \Delta(K)$. En particulier, K vérifie la conjecture de Leopoldt si, et seulement si, $H^2(G_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p) = 0$.

Preuve. - Il suffit de calculer les $\mathbb{Z}_p$ -rangs dans la suite exacte (**), en sachant que $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} R_d^{ab}(G) = \# G(d-1) + 1$.

Q. E. D.

Propriété fonctorielle. - Soit L/k une surextension contenant K/k . On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_L & \xrightarrow{\quad v \quad} & X_L \\ \text{can} \searrow & & \nearrow \text{Ver} \\ & X_K & \end{array}$$

où can est l'homomorphisme canonique $G_L^{ab} \rightarrow G_K^{ab}$, Ver est le transfert $G_K^{ab} \rightarrow G_L^{ab}$, et v est la norme $\sum_{\sigma \in E} \sigma$, $E = \text{Gal}(L/k)$.

THÉOREME 7. - On garde les hypothèses du théorème 6. Si k vérifie la conjecture de Leopoldt, alors K la vérifie également.

Preuve. - D'après le théorème 6 et la propriété fonctorielle, on a un diagramme commutatif aux lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \Delta(K) \rightarrow (\mathbb{Z}_p G)^r \rightarrow R_d^{ab}(G) \rightarrow X_K \rightarrow 0 \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 0 \rightarrow \Delta(k) \rightarrow (\mathbb{Z}_p)^r \rightarrow R_d^{ab}(1) = (\mathbb{Z}_p)^d \rightarrow X_k \rightarrow 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches canoniques.

On en déduit deux diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow \Delta(K) \longrightarrow (\mathbb{Z}_p G)^r \longrightarrow T_K \longrightarrow 0 & \text{et} & 0 \longrightarrow T_K \longrightarrow R_d^{ab}(G) \longrightarrow X_K \longrightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow \Delta(k) \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^r \longrightarrow T_k \longrightarrow 0 & & 0 \longrightarrow T_k \longrightarrow (\mathbb{Z}_p)^d \longrightarrow X_k \longrightarrow 0
 \end{array}$$

De plus, par définition du module des relations, on sait que le transfert $R_d^{ab}(1) \longrightarrow R_d^{ab}(G)$ est injectif. Le lemme des cinq et la propriété fonctorielle montrent alors que $\nu(T_K) \simeq T_k$, où $\nu = \sum_{\sigma \in G} \sigma$.

Supposons que k vérifie Leopoldt. Alors $T_k \simeq (\mathbb{Z}_p)^r$, d'où $\nu(T_K) \simeq (\mathbb{Z}_p)^r$, d'où $\nu(T_K/p T_K) \simeq (\mathbb{F}_p)^r$. Comme T_K est sans torsion (en tant que sous-groupe de R_d^{ab}), il résulte d'un lemme de représentation modulaire bien connu que le $(\mathbb{Z}_p G)$ -module T_K admet $(\mathbb{Z}_p G)^r$ comme facteur direct. Un calcul de $\mathbb{Z}_p$ -rangs dans la suite exacte (**) montre alors que $\text{rang}_{\mathbb{Z}_p} X_K \leq 1 + \#|G| r_2$, i. e. K vérifie Leopoldt.

Q. E. D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRUMER (A.). - On units of algebraic number fields, *Mathematika*, London, t. 14, 1967, p. 121-124.
- [2] BERTRANDIAS (F.) et PAYAN (J.-J.). - Γ -extensions et invariants cyclotomiques, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 5, 1972, p. 517-543.
- [3] EMSALEM (M.). - Comportement des fonctions L p -adiques au voisinage de zéro, *Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique*, 9e année, 1981/82, n° 17, 19 p.
- [4] GILLARD (R.). - Formulations de la conjecture de Leopoldt et étude d'une condition suffisante, *Abh. Seminar Univ. Hamburg*, t. 48, 1979, p. 125-138.
- [5] GREENBERG (R.). - On the structure of certain Galois groups, *Invent. Math.*, Berlin, t. 47, 1978, p. 85-99.
- [6] IWASAWA (K.). - On $\mathbb{Z}$ -extensions of algebraic number fields, *Annals of Math.*, Series 2, t. 98, 1973, p. 246-326.
- [7] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 209, 1962, p. 54-71.
- [8] MIKI (H.). - On the maximal abelian l -extension of a finite algebraic number field with given ramification, *Nagoya Math. J.*, t. 70, 1978, p. 183-202.
- [9] NGUYEN-QUANG-DO (T.). - Formations de classes et modules d'Iwasawa (à paraître).