

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Sur la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 14, p. 1-18

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A8_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SÉRIE D'IWASAWA ATTACHÉE À UN CARACTÈRE DE DIRICHLET

par Daniel BARSKY (*)

[Université Paris-7]

Résumé. - En partant de la définition de KUBOTA et LEOPOLDT des fonctions L p -adiques, on donne une construction de la série d'Iwasawa associée. Comme application, on donne une démonstration analytique p -adique du théorème de Ferrero-Washington pour $p = 2$ et pour $p = 3$, sur la nullité de l'invariant $\mu_p(K)$ d'Iwasawa ($p = 2$ ou $p = 3$ seulement) pour un corps abélien, K , sur ${}^p\mathbb{Q}$. Cette démonstration est différente de celle de FERRERO et WASHINGTON, et fournit aussi une majoration de l'invariant $\lambda_p(K)$, $p = 2$ ou $p = 3$.

Notations et rappels. - On désigne par p un nombre premier. On pose $q = p$ si $p \neq 2$, et $q = 4$ si $p = 2$. Les notations non définies ci-après sont celles d'AMICE [1], ou IWASAWA [8]. On désigne par $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$; la valeur absolue sur $\mathbb{C}_p$ est notée $|\cdot|$ et normalisée par $|p| = p^{-1}$.

On désigne par θ un caractère de Dirichlet primitif, pair, de conducteur m ou mq , avec $(m, p) = 1$. On note μ_n le groupe des racines p^n -ièmes de l'unité, et μ_n^* le groupe des racines primitives p^n -ièmes de l'unité. Soit $\zeta \in \mu_n^*$, on note π l'unique caractère de Dirichlet de conducteur qp^n et d'ordre p^n , tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$; c'est un caractère de deuxième espèce au sens d'IWASAWA [8], et tout caractère de Dirichlet χ (pair ou impair) de conducteur mqp^n peut se mettre de manière unique sous la forme $\chi = \theta\pi$ ou bien $\chi\omega = \theta\pi$, où θ est un caractère pair de conducteur m ou mq . ω est le caractère de Teichmüller sur $\mathbb{Z}_p$, et π est un caractère de deuxième espèce de conducteur qp^n et d'ordre p^n (cf. [8]). On pose $\rho_p = qp^{-1/(p-1)}$.

On note $K_\theta = \mathbb{Q}_p[\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(mq-1)]$, on note $\mathcal{O}_\theta$ son anneau des entiers, et M_θ son idéal maximal. On note $s \mapsto L_p(s, \theta\pi)$ la fonction L p -adique de Kubota-Leopoldt associée au caractère $\theta\pi$ et définie pour $s \in D(1, \rho_p)^-$, où $D(1, \rho_p)^- = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - 1| < \rho_p\}$. On pose, si $a \in \mathbb{C}_p$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$:

$$D(a, \rho)^+ = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| \leq \rho\}, \quad D(a, \rho)^- = \{x \in \mathbb{C}_p; |x - a| < \rho\}.$$

Rappelons que la série d'Iwasawa $I_\theta(T)$ associée à θ est définie par les conditions suivantes: $(T - mp) I_\theta(T)$ est l'unique série de Taylor de $\mathcal{O}_\theta[[T]]$ telle que, pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $\zeta \in \bigcup_{n \geq 0} \mu_n^* = \mu_\infty^*$ et pour tout

(*) Texte reçu le 20 septembre 1982.

$s \in D(1, \rho_p)^-$, on a

$$L_p(s, \theta\pi) = I_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1),$$

où ζ est l'unique caractère de deuxième espèce associé à π par $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$.

Nous donnons aux paragraphes 1 et 2 une démonstration de l'existence de $I_\theta(T)$ à partir des formules de Kubota-Leopoldt, qui montre que les deux méthodes exposées dans [8] sont en fait identiques.

Soit K un corps de nombres abélien de degré fini sur $\mathbb{Q}$. Soit $K_\infty = \bigcup_{n \geq 0} K(\zeta_n)$, où $\zeta_n \in \mu_n^*$, soit $K_n = K(\zeta_n)$. IWASAWA a montré que, si h_n est le nombre de classe de K_n , et si p^{e_n} est la plus grande puissance de p qui divise h_n , il existe des entiers $n_0(K) = n_0$, $\mu_p(K) = \mu_p$, $\lambda_p(K) = \lambda_p$, $\nu_p(K) = \nu_p$ tels que $e_n = \mu_p p^n + \lambda_p n + \nu_p$ si $n \geq n_0$. Le théorème de Ferrero-Washington affirme que $\mu_p(K) = 0$ (cf. [5]). Soit K_n^+ le sous-corps totalement réel maximal de K_n , soit h_n^+ son nombre de classe, soit $h_n^- = h_n/h_n^+$. On sait que h_n^- est un entier (cf. [6]), et IWASAWA a montré qu'il existe des entiers $n_0(K) = n_0$, $\mu_p^-(K) = \mu_p^-$, $\lambda_p^-(K) = \lambda_p^-$, $\nu_p^-(K) = \nu_p^-$ tels que, si $p^{e_n^-}$ est la plus grande puissance de p qui divise h_n^- , on ait

$$e_n^- = \mu_p^- p^n + \lambda_p^- n + \nu_p^- \quad \text{si } n \geq n_0 \quad (\text{cf. [8]}).$$

On sait, depuis les travaux de FERRERO (cf. [4]), que $\mu_p^-(K) = 0$, pour tout corps abélien K sur $\mathbb{Q}$, entraîne $\mu_p(K) = 0$, en outre on sait que $\lambda_p(K) \leq 2\lambda_p^-(K)$ (cf. [5]).

Posons, pour un caractère de Dirichlet θ non trivial (primitif, pair de conducteur m ou mq avec $(m, p) = 1$)

$$p^{-u_\theta} = \sup_{|T| < 1} \left| \frac{1}{2} I_\theta(T) \right| = \left\| \frac{1}{2} I_\theta \right\|.$$

Nous montrons au paragraphe 3 que, si $p = 2$ ou $p = 3$, $\mu_\theta = 0$ pour tout θ . Il est bien connu que ce résultat entraîne le théorème de Ferrero-Washington, pour $p = 2, 3$, car $\mu_p^- = \sum_\theta \mu_\theta$, où θ parcourt les caractères primitifs pairs non triviaux de $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ (cf. [3]).

Le principe de la démonstration est le suivant. Toute fonction analytique bornée sur $D(0, 1)^-$, $F(T)$, peut s'écrire de manière unique

$$F(T) = \sum_{i \geq 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i F_{h,i}(T),$$

où $F_{h,i}(T)$ est un polynôme de $\mathbb{C}_p[T]$ de degré $p^h - 1$ au plus, et en outre on a :

$$\sup_{|T| < 1} |F(T)| = \sup_{i \geq 0} \sup_{|T| < 1} |F_{h,i}(T)| = \sup_{h \geq 0} \sup_{|T| < 1} |F_{h,0}(T)|.$$

On écrit donc :

$$I_{\theta}(T) = \sum_{i \geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i I_{\theta, h, i}(T),$$

où $I_{\theta, h, i}(T) \in \mathbb{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus. On calcule alors directement $I_{\theta, h, 0}(T)$ et, si $p = 2, 3$, on peut montrer que $\sup_{|T| < 1} |\frac{1}{2} I_{\theta, h, 0}(T)| = 1$ pour h assez grand. Si $p \neq 2$ ou 3 , la même démonstration montre qu'en fait, il existe toujours au moins un entier $2j$, $0 \leq 2j \leq p-3$, tel que

$$\sup_{|T| < 1} |\frac{1}{2} I_{\theta, h, 0} - 2j(T)| = 1,$$

ce qui permet d'espérer un résultat plus général en p . On notera, pour toute fonction analytique bornée, F , sur $D(0, 1)^-$: $\|F\| = \sup_{|T| < 1} |F(T)|$. Si $a \in \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p$, on notera $\langle a \rangle = a/\omega(a)$ (cf. [8]).

1. Existence de la série d'Iwasawa attachée à un caractère de Dirichlet.

Dans ce paragraphe et dans les suivants, on note ϵ le caractère trivial. Soit f un entier positif ($\neq 0$). On note $(\mathbb{Z}/f\mathbb{Z})^*$ l'ensemble des éléments inversibles $\mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$ pour la multiplication.

LEMME 1. - Pour tout entier $h \geq 0$, pour tout entier $m \geq 1$ premier à p , on a

$$(\mathbb{Z}/mqp^h\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \times (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1 + q\mathbb{Z}_h}{1 + qp\mathbb{Z}_h} \right) \simeq (\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1 + q\mathbb{Z}_h}{1 + qp\mathbb{Z}_h} \right).$$

Pour la démonstration, voir [6] ou [8].

LEMME 2. - Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur m ou mqp^n , avec $(m, p) = 1$ et $n \geq 0$, alors χ est de manière unique le produit d'un caractère de première espèce de conducteur m ou mq et d'un caractère de deuxième espèce π , de conducteur qp^n et d'ordre p^n , défini par la condition

$$\chi(1 + mq) = \pi(1 + mq) = \zeta^{-1}, \text{ où } \zeta \in \mathbb{Z}_n^*.$$

Pour la démonstration, voir [6] ou [8].

LEMME 3. - Soit $\zeta \in \mathbb{Z}_n^*$, soit m un entier positif non nul premier à p . Soit π l'unique caractère de 2-ième espèce d'ordre p^n et de conducteur qp^n tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$. Alors, pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ premier à p , on a :

$$\pi(a) = \zeta^{\psi(a)} \text{ où } \psi(a) = - \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1 + mq)}.$$

Dans la formule précédente les $\log$ sont à prendre au sens p -adiques (cf. [1], [8] ou [10]). La formule $\pi(a) = \zeta^{\psi(a)}$ est à prendre au sens suivant :

$$\zeta^{\psi(a)} = \sum_{k \geq 0} (\zeta - 1)^k \binom{\psi(a)}{k};$$

la série du second membre converge p -adiquement, car $\psi(a) \in \mathbb{Z}_p$ et donc $|\binom{\psi(a)}{k}| \leq 1$, et il est bien connu que, si $\zeta \in \mu_n^*$, on a

$$|\zeta - 1| = p^{-1/(p-1)p^{n-1}} \quad (\text{cf. [1] ou [10]}).$$

On sait que si a et b appartiennent à $\mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$,

$$|\psi(a) - \psi(b)| = \left| \frac{\langle a \rangle - \langle b \rangle}{\log(1 + mq)} \right|.$$

Donc $|a - b| \leq q^{-1} p^{-n}$ entraîne $|\psi(a) - \psi(b)| \leq p^{-n}$, car $|\log(1 + mq)| = q^{-1}$. Et par conséquent, $|a - b| \leq q^{-1} p^{-n}$ implique $\zeta^{\psi(a)} = \zeta^{\psi(b)}$. En outre, si a et b appartiennent à $\mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$, on a $\psi(ab) = \psi(a) + \psi(b)$, donc

$$\zeta^{\psi(ab)} = \zeta^{\psi(a)} \zeta^{\psi(b)}$$

et enfin $\zeta^{\psi(1+mq)} = \zeta^{-1}$. Ces remarques suffisent à prouver que, si l'on pose par convention $\zeta^{\psi(a)} = 0$ pour $a \in p\mathbb{Z}$, on a $\zeta^{\psi(a)} = \pi(a)$.

LEMME 4. - Soit $r_h = p^{-1/(p-1)p^h}$, $h \in \mathbb{N}$. Si $|T| = \rho < r_h$, alors

$$|\log(1 + T)| \leq \epsilon(\rho) p^h p^{-1/(p-1)}, \quad \text{avec } 0 \leq \epsilon(\rho) < 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\rho \rightarrow r_h} \epsilon(\rho) = 1.$$

Pour la démonstration, voir [1] ou [10].

LEMME 5. - Si $n = n_0 + n_1 p + \dots + n_i p^i$ avec $0 \leq n_k \leq p - 1$ pour $0 \leq k \leq i$, on pose

$$\text{Schiff}_p(n) = n_0 + n_1 + \dots + n_i.$$

On a

$$n! = p^{-v(n!)} \quad \text{avec} \quad v(n!) = \frac{n - \text{Schiff}_p(n)}{p - 1}.$$

Si $p - 1$ divise n , alors $p - 1$ divise $\text{Schiff}_p(n)$.

La formule donnant $v_p(n!)$ est bien connue (cf. [1] ou [10]), le reste est évident.

Rappelons (cf. [3]) que l'on sait, depuis les travaux de KUBOTA et LEOPOLDT, que, pour tout caractère de Dirichlet χ , primitif de conducteur f , il existe une unique fonction méromorphe sur $D(1, \rho_p)^- : s \rightarrow L_p(s, \chi)$, non identiquement nulle si, et seulement si, χ est pair, telle que

$$sL_p(s + 1, \chi) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{f_p^h} \sum_{a=0}^{f_p^h-1} \chi(a) \langle a \rangle^{-s},$$

où $\sum'_a$ désigne une sommation sur des entiers premiers à p , la limite est, bien

entendu, une limite au sens p -adique.

PROPOSITION 1. - Soit θ un caractère de Dirichlet pair de conducteur m ou mq . Il existe une unique fonction analytique sur $D(0, 1)^-$, $G_\theta(T) \in K_\theta[[T]]$, telle que : pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $\zeta \in \mu_n^*$, pour tout $s \in D(1, \rho_p)^-$, on a

$$G_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = sL_p(s + 1, \theta\pi),$$

où π est l'unique caractère de deuxième espèce de conducteur qp^n et d'ordre p^n tel que $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$. En outre, si r_h est défini comme au lemme 4, on a

$$\sup_{|T| < r_h} |G_\theta(T)| \leq qp^h p^{-1/(p-1)}.$$

Enfin, si $|T| < r_h$, on a

$$G_\theta(T) = - \sum_{k \geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{\psi(1+T)}{k} B_k \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) a^{-k(1+T)\psi(a)},$$

où B_k est le k -ième nombre de Bernoulli.

Dans toute la suite de l'exposé, on notera par $\sum_a'$ une sommation sur les entiers a , premiers à p . On sait (cf. [3] ou [11]) que, si $h \geq n \geq 0$ et si $s \in D(1, \rho_p)^-$, on a

$$sL_p(s + 1, \theta\pi) = - \sum_{k \geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{-s}{k} B_k \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta\pi(a) a^{-k\langle a \rangle^{-s}}.$$

D'après le lemme 3, on a

$$\pi(a) = \zeta^{\psi(a)} \quad \text{où } \zeta \in \mu_n^* \quad \text{et} \quad \pi(1 + mq) = \zeta^{-1}.$$

On a aussi, si $s \in D(1, \rho_p)^-$, $\langle a \rangle^{-s} = (1 + mq)^{s\psi(a)}$. Donc

$$sL_p(s + 1, \theta\pi) = - \sum_{k \geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{-s}{k} B_k \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) a^{-k((1 + mq)^s \zeta)^{\psi(a)}}.$$

Considérons la série obtenue par le changement de variable $1 + T = (1 + mq)^s \zeta$, qui implique que $|T| < r_h$ si $s \in D(1, \rho_p)^-$ et $\zeta \in \mu_n^*$ avec $n \leq h$. Il vient

$$G_{\theta,h}(T) = - \sum_{k \geq 0} (mqp^h)^{k-1} \binom{\psi(1+T)}{k} B_k \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) a^{-k(1+T)\psi(a)},$$

ceci définit $G_{\theta,h}(T)$. Nous allons montrer que la série du second membre converge pour $|T| < r_h$, et définit sur $D(0, r_h)^-$ une fonction analytique. Soit $\rho < r_h$ et soit T tel que $|T| = \rho$. Avec les notations du lemme 4, et grâce au lemme 5, on a

$$(1) \quad \left| \left(\psi \left(\frac{1+T}{k} \right) \right)^k \right| \leq \begin{cases} \varepsilon(\rho)^k (qp^h)^k p^{-1/(p-1)} & \text{si } p-1 \text{ ne divise pas } k, \\ \varepsilon(\rho)^k (qp^h)^k p^{-1} & \text{si } p-1 \text{ divise } k. \end{cases}$$

Il est bien connu (cf. [8]) que

$$(2) \quad |B_k| \begin{cases} \leq 1 & \text{si } p-1 \text{ ne divise pas } k, \\ = p & \text{si } p-1 \text{ divise } k. \end{cases}$$

Enfin, si $|T| < r_h$ on a

$$(3) \quad \left| \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) a^{-k} (1+T)^{\psi(a)} \right| \leq 1.$$

Les inégalités (1), (2), (3) suffisent alors à montrer la convergence pour $|T| < r_h$ de la série qui définit $G_{\theta,h}(T)$. Ces inégalités montrent en outre que

$$\sup_{|T| < r_h} |G_{\theta,h}(T)| \leq qp^h p^{-1/(p-1)}.$$

Il est évident, par construction, que, si $\zeta \in \mu_n^*$ avec $n \leq h$, et si $\zeta \in D(1, \rho_p)^-$, on a

$$G_{\theta,h}((1+mq)^s \zeta - 1) = sL_p(s+1, \theta\pi).$$

Donc toutes les fonctions analytiques $G_{\theta,h}(T)$, $h \in \mathbb{N}$, coïncident sur $D(0, r_0)^-$. Par conséquent, si $h' > h$, $G_{\theta,h'}(T)$ est le prolongement analytique de $G_{\theta,h}(T)$ à $D(0, r_{h'})^- \supset D(0, r_h)^-$. D'après le principe du prolongement analytique (cf. [1]), il existe une unique fonction analytique $G_{\theta}(T)$ sur $D(0, 1)^-$ telle que la restriction de $G_{\theta}(T)$ à $D(0, r_h)^-$ coïncide avec $G_{\theta,h}(T)$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1. - Si $T \in D(0, 1)^-$,

$$G_{\theta}(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-1}{mqp^h} \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) (1+T)^{\psi(a)}.$$

Rappelons (cf. [8]) que l'on a uniformément en k

$$B_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{p^l} \sum_{b=0}^{p^l-1} b^k.$$

Donc, si $|T| < r_h$,

$$G_{\theta}(T) = G_{\theta, h}(T)$$

$$= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-1}{mqp^{h+1}} \sum_{b=0}^{p^h-1} \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a)(1+T)^{\psi(a)} \sum_{k \geq 0} (mqp^h \frac{b}{a})^k (\psi(1+T))_k.$$

Or, si $|T| < r_h$,

$$\sum_{k \geq 0} (mqp^h \frac{b}{a})^k (\psi(1+T))_k = (1 + mqp^h \frac{b}{a})^{\psi(1+T)} = (1 + T^{\psi(a+mqp^h b) - \psi(a)}).$$

Par conséquent, si $|T| < r_h$,

$$\begin{aligned} G_{\theta}(T) = G_{\theta, h}(T) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-1}{mqp^{h+1}} \sum_{b=0}^{p^h-1} \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a)(1+T)^{\psi(a+mqp^h b)} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{-1}{mqp^{h+1}} \sum_{a=0}^{mqp^{h+1}-1} \theta(a)(1+T)^{\psi(a)}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2. -- La fonction

$$J_{\theta}(T) = \frac{\log(1+mq)}{\log(1+T)} G_{\theta}(T)$$

est une fonction méromorphe sur $D(0, 1)^-$ ayant au plus un pôle simple pour $T=0$.
En outre, J_{θ} vérifie les propriétés suivantes :

(i) Si θ est non trivial, $J_{\theta}(T)$ est analytique sur $D(0, 1)^-$ et
 $\sup_{|T| < 1} |J_{\theta}(T)| \leq 1$,

(ii) Si $\theta = \epsilon$, $J_{\epsilon}(T)$ a un pôle simple pour $T=0$, de résidu $-(1-\frac{1}{p})\log(1+q)$,
et $\|TJ_{\epsilon}(T)\| \leq q^{-1} p$,

(iii) Si $\zeta \in \mu_n^*$, si π est le caractère de deuxième espèce tel que $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$,
et si $s \in D(1, \rho_p)^-$, on a

$$J_{\theta}((1+mq)^s \zeta - 1) = L_p(s+1, \theta\pi).$$

Si $n \geq 1$ et si $\zeta \in \mu_n^*$, on a $G_{\theta}(\zeta - 1) = 0$, en outre, si θ est non trivial, on a aussi $G_{\theta}(0) = 0$, et si θ est trivial, on a $G_{\epsilon}(0) = -(1 - \frac{1}{p})$. Donc, si θ est non trivial, $G_{\theta}(T)$ a parmi ses zéros tous ceux de $\log(1+T)$. Par conséquent, dans ce cas, $G_{\theta}(T)/\log(1+T)$ est une fonction analytique sur $D(0, 1)^-$. D'après la proposition 1, on a, pour tout $h \geq 0$,

$$\sup_{|T| < r_h} |G_{\theta}(T) \frac{\log(1+mq)}{\log(1+T)}| \leq 1, \text{ d'où (i).}$$

Si $\theta = \epsilon$, alors $\frac{T}{\log(1+T)} G_{\epsilon}(T)$ est une fonction analytique sur $D(0, 1)^-$ et, d'après la proposition 1, on a

$$\sup_{|T| < r_h} |T G_\theta(T) \frac{\log(1 + mq)}{\log(1 + T)}| \leq q^{-1} p, \text{ d'où le (ii).}$$

COROLLAIRE 2. - On pose, pour $h \in \mathbb{N}$ et pour $T \in D(0, 1)^-$,

$$F_{\theta, h}(T) = \sum_{a=0}^{mqp^h-1} \theta(a) (1 + T)^{\psi(a)}.$$

Alors

$$J_\theta(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} - \frac{\log(1 + mq)}{mq} ((1 + T)^{p^h} - 1)^{-1} F_{\theta, h}(T).$$

Il est clair que $\|F_{\theta, h}\| \leq 1$, $\|(1 + T)^{p^h} - 1\| = 1$, et il est évident que $F_{\theta, h}(\zeta) = 0$ si $\zeta \in \mu_h - \{1\}$. Donc

$$T \frac{\log(1 + mq)}{mq} ((1 + T)^{p^h} - 1)^{-1} F_{\theta, h}(T) = \tilde{T} J_{\theta, h}(T)$$

est une fonction analytique sur $D(0, 1)^-$ bornée par 1 sur $D(0, 1)^-$. Enfin si $T \notin \mu_p - \{1\}$, alors $\lim_{h \rightarrow \infty} \tilde{T} J_{\theta, h}(T) = T J_\theta(T)$. Par prolongement analytique, on déduit que cette égalité est encore vraie si $T \in \mu_p - \{1\}$.

COROLLAIRE 3. - On pose

$$I_\theta(T) = J_\theta\left(\frac{1 + T}{1 + mq} - 1\right).$$

Alors I_θ est une fonction méromorphe sur $D(0, 1)^{**}$ ayant au plus un pôle simple pour $T = mq$ et telle que :

(i) Pour tout $\zeta \in \mu_p$, pour tout $s \in D(1, \rho_p)^-$, on a, si $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$,

$$I_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = L_p(s, \theta\pi),$$

(ii) Si θ est non trivial, I_θ est analytique sur $D(0, 1)^-$ et $\|I_\theta\| \leq 1$,

(iii) Si $\theta = \epsilon$, I_ϵ a un pôle simple pour $T = q$ de résidu $\frac{(1+q)(1-p)}{p} \log(1+q)$ et $\|(T - q) I_\epsilon(T)\| \leq q^{-1} p$.

En effet, $I_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = J_\theta((1 + mq)^{s-1} \zeta - 1)$ pour tout $s \in D(1, \rho_p)^-$ et $\zeta \in \mu_p$.

PROPOSITION 3. - Soit θ un caractère de Dirichlet de conducteur m ou mq .

(i) Si θ est non trivial, il existe une unique série $I_\theta(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$ telle que, pour $\zeta \in \mu_p$ et pour tout $s \in D(1, \rho_p)^-$,

$$I_\theta((1 + mq)^s \zeta - 1) = L_p(s, \theta\pi),$$

où π est le caractère de deuxième espèce défini par $\pi(1 + mq) = \zeta^{-1}$,

(ii) Si $\theta = \epsilon$, il existe une unique série de Laurent $I_\epsilon(T) \in \mathbb{Q}_p((T))$ telle que $(T - q) I_\epsilon(T) \in \mathbb{Z}_p[[T]]$, et pour tout $\zeta \in \mu_{p^\infty}$, $s \in D(1, \rho_p)^- - \{1\}$,

$$I_\epsilon((1 + q)^s \zeta - 1) = L_p(s, \pi).$$

C'est évident à partir des corollaires 2 et 3.

La série $I_\theta(T)$ est, par définition la série d'Iwasawa attachée au caractère θ (cf. [8]).

Si χ est un caractère de Dirichlet impair de conducteur m ou mq , alors $I_\chi(T) \equiv 0$.

2. Une expression de la série d'Iwasawa.

On notera φ l'indicatrice d'Euler, i. e. si $a \in \mathbb{N}^*$, alors $\varphi(a)$ est le cardinal de $(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^*$.

LEMME 6. - Pour tout entier $h \geq 0$, pour tout entier k , $0 \leq k \leq p^h - 1$, il existe un unique $\varphi(mq)$ -uplet de nombres entiers (premiers à p et à m) tels que, si a est un élément de ce $\varphi(mq)$ -uplet, on ait

- (i) $0 \leq a \leq mp^h - 1$ et $(a, mq) = 1$,
- (ii) $|\psi(a) - k| \leq p^{-h}$,
- (iii) en outre ce $\varphi(mq)$ -uplet est un système complet de représentants de $(\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^*$.

Les affirmations (i) et (ii) découlent immédiatement de l'isomorphisme

$$(4) \quad (\mathbb{Z}/mp^h\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/mq\mathbb{Z})^* \times \left(\frac{1 + q\mathbb{Z}}{1 + qp^h\mathbb{Z}} \right)$$

et du fait que l'application $a \mapsto \psi(a)$ est un isomorphisme du groupe multiplicatif $\frac{1 + q\mathbb{Z}}{1 + qp^h\mathbb{Z}}$ sur le groupe additif $\mathbb{Z}/p^h\mathbb{Z}$. L'affirmation (iii) découle en fait de (i) et (ii) ou bien de (4).

DÉFINITION 1. - Soit h un entier ≥ 0 et k un entier, $0 \leq k \leq p^h - 1$. On définit $\sum_a^{(m, k, h)}$, comme étant une sommation sur les entiers a vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) du lemme 6.

PROPOSITION 4. - Posons, pour tout caractère θ primitif pair de conducteur m ou mq et pour tout entier $i \in \mathbb{N}$,

$$\varphi_i(k, h, \theta) = \sum_a^{(m, k, h)} \theta(a) \left(\frac{\psi(a) - k}{i} / p^h \right).$$

Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_i(k, h, \theta)| \leq 1$. En outre, si θ est non trivial

$$J_\theta(T) = - \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + mq)}{mq} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k, h, \theta) (1 + T)^k.$$

Si $\theta = \epsilon$

$$J_\epsilon(T) = \frac{\log(1 + mq)}{mq} \left\{ \frac{\alpha(p, \epsilon)}{T} - \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k, h, \epsilon) (1 + T)^k \right\},$$

$$\text{où } \alpha(p, \epsilon) = \begin{cases} 1 - p & \text{si } p \neq 2, \\ -2 & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) (\psi(a)_i - k)p^{-h}$, on a $\frac{\psi(a) - k}{p^h} \in \mathbb{Z}_p$ (condition (ii) du lemme 6). Ceci implique que $|\varphi_i(k, h, \theta)| \leq 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. D'après le lemme 6, on peut écrire, avec les notations du corollaire 2,

$$\begin{aligned} (5) \quad F_{\theta,h}(T) &= \sum_{k=0}^{p^h-1} \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) (1 + T)^{\psi(a)} \\ &= \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) (((1 + T)^{p^h} - 1) + 1)^{(\psi(a)-k)p^{-h}} \end{aligned}$$

Il vient alors aisément de la formule (5) :

$$F_{\theta,h}(T) = \sum_{i \geq 0} ((1 + T)^{p^h} - 1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k, h, \theta),$$

où la série du second membre converge simplement sur $D(0, 1)^-$.

Si θ est non trivial, $\varphi_0(k, h, \theta) = 0$, et donc, dans ce cas,

$$F_{\theta,h}(T) = ((1 + T)^{p^h} - 1) \sum_{i \geq 1} ((1 + T)^{p^h} - 1)^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k, h, \theta).$$

Si $\theta = \epsilon$, on a $\varphi_0(k, h, \epsilon) = p - 1$ si $p \neq 2$ (resp. $= 2$ si $p = 2$), et donc :

$$F_{\epsilon,h}(T) = ((1 + T)^{p^h} - 1) \left\{ -\frac{\alpha(p, \epsilon)}{T} + \sum_{i \geq 1} ((1 + T)^{p^h} - 1)^{i-1} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1 + T)^k \varphi_i(k, h, \epsilon) \right\}.$$

Donc, si l'on pose $\alpha(p, \theta) = -\varphi_0(k, h, \theta)$,

$$J_\theta(T) = \frac{\log(1 + mq)}{mq} \left\{ \frac{\alpha(p, \theta)}{T} - \sum_{k=0}^{p^h-1} \varphi_1(k, h, \theta) (1 + T)^k \right\} + E_{\theta,h}(T) ((1 + T)^{p^h} - 1)$$

où $E_{\theta,h}(T) \in \mathcal{O}_\theta[[T]]$. Or, il est bien connu que, pour la topologie de la convergence simple sur $D(0, 1)^-$, on a $\lim_{h \rightarrow \infty} ((1 + T)^{p^h} - 1) = 0$ (cf. [2]).

PROPOSITION 5. - Soit θ un caractère de Dirichlet de conducteur m ou mq .

Avec les notations de la proposition 4, on a :

(i) Si θ est non trivial,

$$I_{\theta}(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}$$

(ii) Si $\theta = \epsilon$,

$$I_{\epsilon}(T) = \frac{\log(1+q)}{q} \frac{(1+q) \alpha(p, \epsilon)}{T-q} + \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a \rangle - (1+q)^{-k}}{qp^h}$$

On a montré, à la proposition 3, qu'il existe une unique fonction analytique bornée sur $D(0, 1)^-$:

$$I_{\theta}^*(T) = I_{\theta}(T) - \frac{\log(1+mq)}{mq} \frac{(1+mq) \alpha(p, \theta)}{T-mq},$$

telle que, pour tout $s \in D(1, \rho_p)^-$, pour tout $\zeta \in \mu_p^{\infty}$, si $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$,

$$I_{\theta}^*((1+mq)^s \zeta - 1) = L_p(s, \theta\pi) - \frac{\log(1+mq)}{mq} \frac{(1+mq) \alpha(p, \theta)}{(1+mq)^s \zeta - 1 - mq}.$$

Posons alors :

$$I_{\theta,h}^*(T) = \sum_{k=0}^{p^h-1} (1+T)^k \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h}.$$

Par définition de $\sum_a^{(m,k,h)}$,

$$\left| \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1+mq)^{-k}}{mqp^h} \right| \leq 1..$$

D'après la définition de Kubota-Leopoldt des fonctions L p -adiques, on a, si $\zeta \in \mu_h$, et si π est le caractère de deuxième espèce tel que $\pi(1+mq) = \zeta^{-1}$:

$$I_{\theta,h}^*(\zeta - 1) = L_p(0, \theta\pi), \text{ si } \theta \neq \epsilon.$$

Si $\theta = \epsilon$:

$$I_{\epsilon,h}^*(\zeta - 1) = \sum_{k=0}^{p^h-1} \zeta^k \sum_a^{(1,k,h)} \frac{\langle a \rangle - (1+q)^{-k}}{qp^h} = L_p(0, \pi) + \frac{\alpha(p, \epsilon)}{qp^h} \frac{1 - (1+q)^{-p^h}}{1 - \zeta/(1+q)}$$

Donc, pour $\zeta \in \mu_p^{\infty}$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} I_{\epsilon,h}^*(\zeta - 1) = L_p(0, \pi) - \frac{\alpha(p, \epsilon)}{q} \frac{\log(1+q)}{\zeta - 1 - q} = I_{\epsilon}^*(\zeta - 1).$$

Ceci entraîne, d'après [2] ou d'après [1] (lemme 4.4.2) :

$$I_{\theta}^*(T) = I_{\theta,h}(T) + ((1+T)^{p^h} - 1) \mathfrak{I}_{\theta,h}(T), \text{ si } \theta \neq \epsilon,$$

avec $\|\mathfrak{I}_{\theta,h}\| \leq \|I_{\theta}^*\|$ et $\mathfrak{I}_{\theta,h}(T) \in K_{\theta}[[T]]$, et si $\theta = \epsilon$, pour tout $n \geq 0$,

$$I_{\epsilon}^*(T) = \lim_{h \rightarrow \infty} I_{\epsilon,h}^*(T) + ((1+T)^{p^h} - 1) \mathfrak{I}_{\epsilon,n}(T)$$

avec $\|\mathfrak{I}_{\epsilon,n}\| \leq \|\mathfrak{I}_{\epsilon}^*\|$ et $\mathfrak{I}_{\epsilon,n}(T) \in \mathcal{Q}_p[[T]]$. D'où la proposition, car

$$\lim_{h \rightarrow \infty} ((1+T)^{p^h} - 1) = 0 \text{ si } |T| < 1.$$

3. Première application : Nullité de μ_p pour $p = 2$ et $p = 3$.

Nous allons démontrer directement par une étude des coefficients de son développement, comme à la proposition 5, que $\|\frac{1}{2} I_{\theta}\| = 1$ si $p = 2$ ou 3 . Ceci repose sur la proposition suivante qui nous sera utile ultérieurement aussi. En fait, on peut donner une présentation un peu moins calculatoire de la nullité de μ_p en perdant les majorations effectives sur λ_p (cf. la remarque à la fin du paragraphe

PROPOSITION 6. - Soit $F(T)$ une fonction analytique bornée sur $D(0, 1)^-$. Pour tout entier $h \geq 0$, il existe une unique écriture de $F(T)$ sous la forme

$$(6) \quad F(T) = \sum_{i \geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i F_{i,h}(T),$$

où $F_{i,h}(T)$ est un polynôme de $\mathcal{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus. En outre, on a

$$\|F\| = \sup_{i \geq 0} \|F_{i,h}\| = \sup_{h \geq 0} \|F_{0,h}\|.$$

La série du second membre de (6) converge simplement sur $D(0, 1)^-$ et uniformément sur $D(0, \rho)^+$ pour tout ρ , $0 < \rho < 1$.

On sait (cf. [2] ou [1] (lemme 4.4.2)) que toute fonction analytique bornée sur $D(0, 1)^-$, $F(T) \in \mathcal{C}_p[[T]]$, peut s'écrire de manière unique

$$F(T) = F_{0,h}(T) + ((1+T)^{p^h} - 1) G_{1,h}(T),$$

où $F_{0,h}(T) \in \mathcal{C}_p[T]$ est de degré $p^h - 1$ au plus, et où $G_{1,h}(T) \in \mathcal{C}_p[[T]]$, et enfin

$$\|F\| = \sup(\|F_{0,h}\|, \|G_{1,h}\|).$$

On peut définir par récurrence une suite de polynômes $F_{1,h}(T) \in \mathcal{C}_p[T]$, de degré $p^h - 1$ au plus, et une suite de fonctions analytiques (bornées) $G_{i+1,h}(T) \in \mathcal{C}_p[[T]]$

par

$$G_{i,h}(T) = F_{i,h}(T) + ((1+T)^{p^h} - 1) G_{i+1,h}(T), \quad G_{0,h}(T) = F(T).$$

On montre alors par récurrence que

$$\|F_{i,h}\| \leq \|G_{i,h}\| \leq \|F\|, \quad \|G_{i+1,h}\| \leq \|G_{i,h}\| \leq \|F\|.$$

Si $|T| = \rho < 1$, $|(1+t)^{p^h} - 1| \leq \sup_{0 \leq i \leq h} (\rho^{-i} \rho^{p^h-i})$. Donc la série

$$\sum_{i \geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i F_{i,h}(T)$$

converge sur $D(0, \rho)^+$, uniformément, pour tout ρ , $0 < \rho < 1$. Elle définit une fonction analytique bornée $f(T)$, sur $D(0, 1)^-$. On a pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout $\zeta \in \underline{\mathbb{P}}_\infty$:

$$\left| \frac{d^i}{dT^i} (f(T) - F(T)) \right|_{T=\zeta} = 0.$$

Ceci entraîne que $f(T) \equiv F(T)$. Supposons que $r_{h-1} < \rho < 1$, alors

$$\sup_{|T| < \rho} |(1+T)^{p^h} - 1| = \rho^{p^h}.$$

Donc :

$$\sup_{|T| < \rho} |F(T)| \leq \sup_{i \geq 0} \{ \rho^{ip^h} \sup_{|T| < \rho} |F_{i,h}(T)| \}.$$

En faisant tendre ρ vers 1, il vient $\|F\| \leq \sup_{i \geq 0} \|F_{i,h}\|$, et comme on a vu que $\|F_{i,h}\| \leq \|F\|$, on a bien $\|F\| = \sup_{i \geq 0} \|F_{i,h}\|$. Remarquons que, si $0 < \rho < 1$,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{|T| < \rho} |(1+T)^{p^h} - 1| = 0$$

d'où l'on tire

$$\sup_{|T| < \rho} |F(T)| \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{|T| < \rho} |F_{0,h}(T)|,$$

et en faisant tendre ρ vers 1 il vient $\|F\| \leq \lim_{h \rightarrow \infty} \|F_{0,h}\|$. La même remarque que ci-dessus permet de conclure que $\|F\| = \lim_{h \rightarrow \infty} \|F_{0,h}\|$.

DÉFINITION 2. - Soit m un entier strictement positif, premier à p . On note $\sum_a^{\sim}(m, k, h)$ (ou $\sum_a^{\sim}$ si aucune confusion n'est à craindre) une sommation sur les entiers a tels que :

$$(i) \quad 0 \leq a \leq qp^h - 1, \quad (a, p) = 1,$$

$$(ii) \quad \left| \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1 + mq)} + k \right| \leq p^{-h}.$$

Les a satisfaisant (i) et (ii) forment un système complet de représentant de $(\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$.

DÉFINITION 3. - Soit m un entier > 0 , premier à p . On note $\sum_a^{(m,k,h)}$ (ou $\sum_a$ si aucune confusion n'est à craindre) une sommation sur les entiers vérifiant les conditions (i) et (ii) de la définition 2 et, en outre,

$$(iii) \quad \omega(a) \equiv 1, \dots, \frac{p-1}{2} \pmod{p\mathbb{Z}_p} \text{ si } p \neq 2$$

(resp. $\omega(a) = 1$ si $p = 2$).

Remarquons que $\sum_a^{(m,k,h)}$ est différent en général de $\sum_a^{(1,k,h)}$ si $m \neq 1$ à cause de la condition (ii).

DÉFINITION 4. - Si $a \in \mathbb{Z}$ et si m est un entier > 0 , premier à p , on note $\bar{a}$ le plus petit résidu de $a \pmod{m\mathbb{Z}}$, positif ou nul.

LEMME 7. - On pose, pour tout caractère de Dirichlet θ , primitif, pair, de conducteur m ou mq avec $m > 1$, $\theta = \theta^* \omega^h$, où θ^* est primitif de conducteur m .

Si h est un entier tel que $qp^h \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1 + mq)^{-k}}{mqp^h} \\ = 2 \sum_a^{(m,k,h)} \frac{\omega^{h-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(a+j)} \theta^*(a+j) \\ + 2\theta^*(-1) \sum_a^{(m,k,h)} \omega^{h-1}(a) (\theta^*(\bar{1}) + \dots + \theta^*(\bar{a})) . \end{aligned}$$

Si $|\frac{\log \langle a \rangle}{\log(1+mq)} + k| \leq p^{-h}$, $h \geq 0$; alors pour tout entier j ,

$$|\frac{\log \langle a + jqp^h \rangle}{\log(1+mq)} + k| \leq p^{-h} .$$

En effet :

$$\begin{aligned} \frac{\log \langle a + jqp^h \rangle}{\log(1+mq)} &= \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1+mq)} + \frac{\log(1 + jqp^h/a)}{\log(1+mq)} \\ &= \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1+mq)} + \frac{jqp^h}{a \log(1+mq)} - \frac{(jqp^h)^2}{2a^2 \log(1+mq)} + \dots \end{aligned}$$

On pose :

$$\sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1 + mq)^{-k}}{mqp^h} = b_{k,h,0}(\theta) .$$

On a donc :

$$b_{k,h,0}(\theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \frac{\omega^{h-1}(a)}{mqp^h} \sum_{j=0}^{m-1} (a + jqp^h) \theta^*(a + jqp^h) .$$

Or $\sum_{j=0}^{m-1} \theta^*(a + jqp^h) = 0$, donc

$$\begin{aligned}
 b_{k,h,0}(\theta) &= \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h) \\
 &= \sum_a \left\{ \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h) + \frac{\omega^{\ell-1}(q^h - a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(q^h - a + jq^h) \right\},
 \end{aligned}$$

car $\left| \frac{\log \langle a \rangle}{\log(1+mq)} + k \right| \leq p^{-h}$ entraîne $\left| \frac{\log \langle q^h - a \rangle}{\log(1+mq)} + k \right| \leq p^{-h}$. Or

$$\sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(q^h - a + jq^h) = \sum_{j=1}^m (m-j)\theta^*(q^h - a + (m-j)q^h).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 b_{k,h,0}(\theta) &= \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h) \right. \\
 &\quad \left. + \theta^* \omega^{\ell-1}(-1) \sum_{j=1}^m (-j)\theta^*(a + (j-1)q^h) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{k,h,0}(\theta) &= \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \left\{ \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h) \right. \\
 &\quad \left. - \theta^* \omega^{\ell-1}(-1) \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h) \right\}.
 \end{aligned}$$

Or θ est un caractère pair par hypothèse, donc $\omega^{\ell-1} \theta^*(-1) = -1$, et par

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + jq^h).$$

Supposons maintenant que $q^h \equiv 1 \pmod{m}$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
 b_{k,h,0}(\theta) &= 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} j\theta^*(a + j) \\
 &= 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{j+a}) \theta^*(j+a).
 \end{aligned}$$

Or si l'on pose $a + j = (\overline{a+j}) + \lambda_a(j)m$, on a

$$\lambda_a(\overline{0}) = \dots = \lambda_a(\overline{m-a-1}) = \lambda_a(\overline{m-a}) - 1 = \dots = \lambda_a(\overline{m-1}) - 1.$$

Donc

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} ((\overline{a+j}) + \lambda_a(j)m) \theta^*(a+j),$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) - 2 \sum_a \omega^{\ell-1}(a) \sum_{j=\overline{m-a}}^{m-1} \theta^*(j+a),$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) - 2 \sum_a \omega^{\ell-1}(a) \sum_{j=0}^{\overline{m-1-a}} \theta^*(j),$$

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_a \frac{\omega^{\ell-1}(a)}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) + 2\theta^*(-1) \sum_a \omega^{\ell-1}(a) \sum_{j=1}^{\overline{a}} \theta^*(j).$$

THÉOREME 1. - Si $p = 2$ et si θ est un caractère de Dirichlet primitif pair de conducteur m ou $4m$ avec $(2, m) = 1$, on a

$$\|I_\theta/2\| = 1 \quad (\theta \text{ non trivial}).$$

Posons

$$b_{k,h,0}(\theta) = \sum_e^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1 + 4m)^{-k}}{4 \cdot 2^h m},$$

on sait, d'après les propositions 5 et 6, que

$$\|I_\theta\| = \lim_{h \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq k \leq 2^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)|.$$

Il découle du lemme 7 que, si $4 \cdot 2^h \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$, on a

$$\sup_{0 \leq k \leq 2^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)| \leq 1/2.$$

Donc, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, pour h assez grand vérifiant $4 \cdot 2^h \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$, on a

$$\sup_{0 \leq k \leq 2^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1/2.$$

Comme $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \{+1, -1\}$, on a, si $4 \cdot 2^h \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$,

$$b_{k,h,0}(\theta) = 2 \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j}) \theta^*(a+j)}{m} + 2\theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j).$$

Donc, pour montrer le théorème, il suffit de montrer que, si $4 \cdot 2^h \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$, on a

$$\sup_{0 \leq k \leq 2^h - 1} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j}) \theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j) \right| = 1.$$

Or il est clair que $\sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j)$ ne dépend pas de a . Si

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) \right| = 1,$$

on choisit $0 \leq a \leq 4 \cdot 2^h - 1$ tel que $a \equiv 1 \pmod{4\mathbb{Z}}$ et $a \equiv 0 \pmod{m\mathbb{Z}}$, ce qui est toujours possible si $4 \cdot 2^h > 4m$, car $(2, m) = 1$. Pour ce choix de a , on a

$$\left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j}) \theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j) \right| = \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\overline{a+j}) \theta^*(a+j)}{m} \right| = 1.$$

Maintenant si $\left| \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) \right| < 1$, on choisit $0 \leq a \leq 4 \cdot 2^h - 1$ vérifiant $a \equiv 1 \pmod{4\mathbb{Z}}$ et $a \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$, ce qui est toujours possible si $4 \cdot 2^h > 4m$ car $(2, m) = 1$. Pour ce choix de a , on a

$$\left| \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\overline{a+j}) \theta^*(a+j) + \theta^*(-1) \sum_{j=1}^{\bar{a}} \theta^*(j) \right| = |\theta^*(-1) \theta^*(1)| = 1.$$

THÉOREME 2. - Si $p = 3$, si θ est un caractère de Dirichlet, primitif, pair,

non trivial, de conducteur m ou 3m, avec $(3, m) = 1$, on a $\|I_\theta\| = 1$.

On pose :

$$b_{k,h,0}(\theta) = \sum_a^{(m,k,h)} \theta(a) \frac{\langle a \rangle - (1 + 3m)^{-k}}{3^{h+1} m}.$$

Pour montrer le théorème, il suffit donc de montrer que

$$\sup_{h \geq 0} \sup_{0 \leq k \leq 3^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1.$$

Donc il suffit de montrer que, si h est assez grand et si $3^{h+1} \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$, on a

$$\sup_{0 \leq k \leq 3^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1.$$

Donc il suffit de montrer que, si $3^{h+1} \equiv 1 \pmod{m\mathbb{Z}}$ et h assez grand,

$$\sup_{0 \leq k \leq 3^h - 1} \left| \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(a+j)\theta^*(a+j)}{m} + \theta^*(-1) \sum_{j=0}^a \theta^*(j) \right| = 1,$$

car $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \simeq \{+1, -1\}$. La démonstration est la même qu'au théorème 2.

COROLLAIRE 4. - Si $p = 2$ ou 3 et si K est un corps abélien sur $\mathbb{Q}$, l'invariant μ_p d'Iwasawa associé à K est nul.

Pour la définition de μ_p , (cf. [5]). Il est bien connu (cf. [4]) que, si K est abélien sur $\mathbb{Q}$, $\mu_p = 0$ équivaut à $\|I_\theta/2\| = 1$ pour tout caractère de Dirichlet primitif, pair, non trivial, θ , de conducteur m ou mq , avec $(m, p) = 1$. Si $p = 2$ ou 3 , les seuls caractères à considérer sont ceux pour lesquels $m > 1$.

Les démonstrations que nous avons données des théorèmes 1 et 2 sont effectives et permettent de donner une majoration de λ_θ qui est le nombre de zéros de I_θ dans $D(0, 1)^-$, λ_θ est fini car K_θ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$.

COROLLAIRE 5. - Si $p = 2$ ou 3 , et si λ_θ est le nombre de zéros de I_θ dans $D(0, 1)^-$, soit r un entier positif strictement tel que $p^{r\theta(m)} > qm$, alors, $\lambda_\theta > q^{-1} p^{r\theta(m)}$.

Posons $I_\theta(T) = \sum_{n \geq 0} a_n T^n$, $a_n \in \mathcal{O}_\theta \subset K_\theta$. Comme K_θ est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $|a_{n_0}| = \|I_\theta\|$. La théorie du polygone de Newton (cf. [1]) montre alors que $\lambda_\theta = n_0$. Or, si

$$I_\theta(T) = \sum_{i \geq 0} ((1+T)^{p^h} - 1)^i \sum_{k=0}^{p^h-1} b_{k,h,i}(\theta) (1+T)^k,$$

On a clairement, comme $\|I_\theta\| = 1$,

$$\sup_{0 \leq k \leq p^h - 1} |b_{k,h,0}(\theta)| = 1 \text{ implique } n_0 < p^h - 1.$$

Le corollaire est alors une conséquence immédiate de la démonstration des théorèmes 1 et 2.

Remarque 1. - La majoration obtenue pour λ_θ entraîne immédiatement une majoration de l'invariant λ_p^- , et donc de λ_p (cf. [5]), car $\lambda_p \leq 2\lambda_p^-$. Il est, en effet, facile de voir que $\lambda_p^- = \sum \lambda_\theta$, où la sommation porte sur les caractères primitifs pairs non triviaux θ du groupe de Galois de K sur $\mathbb{Q}$.

Remarque 2. - Le nombre r , défini au corollaire 5, peut être pris égal à 3 pour tout entier p et tout entier $m \geq 2$, il peut être pris égal à 2 si $p \geq 3$, $m \geq 2$, et si $p \geq 3$ et $m \neq 2, 3, 4, 6, 10$ et 12 , on peut choisir $r = 1$. Ce résultat m'a été communiqué par G. ROBIN et H. DELANGE.

Remarque 3. - On aurait pu donner une démonstration un peu moins calculatoire du lemme 7 en utilisant le lemme suivant :

LEMME. - Soit, pour $1 \leq i \leq n$, des nombres $\theta_i \in \mathbb{Z}_p$, avec $\theta_i \neq \theta_j$ si $i \neq j$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}_p$. Soit $F(T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (1+T)^{\theta_i}$. Alors $\|F\| = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i|$.

Mais les majorations obtenues, pour λ_θ , sont moins bonnes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Nombres p -adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [2] BARSKY (D.). - Mesures p -adiques et éléments analytiques, J. für reine und angew. Math., t. 291, 1977, p. 204-219.
- [3] DIAMOND (J.). - On the value of p -adic L functions at positive integers, Acta Arithm., Warszawa, t. 35, 1979, p. 223-237.
- [4] FERRERO (B.). - Iwasawa invariants of abelian number fields, Math. Annalen, t. 234, 1978, p. 9-24.
- [5] FERRERO (B.) and WASHINGTON (L.). - The Iwasawa invariant μ_p vanishes for abelian number fields, Annals of Math., Series 2, t. 109, 1979, p. 377-395.
- [6] HASSE (H.). - Number theory. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Grundlehren der mathematische Wissenschaften, 229).
- [7] HELSMOORTEI (E.). - Comportement local des fonctions continues sur un compact régulier d'un corps local, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 271, série A, 1970, p. 546-548.
- [8] IWASAWA (K.). - Lectures on p -adic L functions. - Princeton, Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1972 (Annals of Mathematic Studies, 74).
- [9] IWASAWA (K.). - On the theory of cyclotomic fields, Annals of Math., Series 2, t. 70, 1959, p. 530-561.
- [10] KOBLITZ (N.). - p -adic numbers, p -adic analysis and zeta function. - New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1977 (Graduate Texts in Mathematics, 53).
- [11] WASHINGTON (L.). - A note on p -adic L functions, J. Number Theory, t. 8, 1976, p. 245-250.