

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

**Principe du maximum et théorème de Lubin-Hensel dans  $H(D)[[Y]]$**

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 9, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1981-1982\\_\\_9\\_1\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A5_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PRINCIPE DU MAXIMUM  
ET THÉORÈME DE LUBIN-HENSEL DANS  $H(D)[[Y]]$

par Alain ESCASSUT (\*)

Définition. - Rappelons d'abord qu'un fermé borné  $D$  de  $K$  est dit calibré si  $\text{diam}(D) \in |K|$  et si, pour tout trou  $T$  de  $D$ ,  $\text{diam}(T) \in |K|$  [2].

En outre, nous dirons ici qu'une partie  $D$  de  $K$  est fortement infraconnexe si, pour tout trou  $T = d^-(a, r)$ , il existe une suite  $b_n$  de  $D$  telle que

$$|b_n - a| = |b_n - b_m| = r, \quad \forall n \neq m.$$

Remarque. - On montre aisément qu'un ensemble fortement infraconnexe est infraconnexe. En effet, si un ensemble n'est pas infraconnexe, il admet au moins une couronne vide qui contient des trous  $d^-(a, r)$  tels que  $C(b, r) \cap D = \emptyset$ .

THÉORÈME 1. - Soit  $D$  un infraconnexe fermé borné. Alors les 2 propriétés suivantes sont équivalentes

- (i)  $D$  est fortement infraconnexe et calibré
- (ii) Pour tout  $f \in H(D)$ , il existe  $\alpha \in D$  tel que  $|f(\alpha)| = \|f\|_D$ .

On montre le théorème 1 essentiellement à l'aide de la proposition 1 suivante, qui est par ailleurs utilisée dans la démonstration du théorème de Lubin-Hensel.

PROPOSITION 1. - Soit  $D$  un fermé borné fortement infraconnexe, et soit  $f \in H(D)$  tel que  $\|f\|_D \in |K|$ . Alors il existe  $\alpha$  tel que  $|f(\alpha)| = \|f\|_D$ .

D'après les propriétés Mittag-Lefflériennes de  $f$ , on sait que ou bien

- (1) il existe  $f_0 \in H(\emptyset)$  tel que  $\|f_0\|_{\emptyset} = \|f\|_D$

(avec  $\emptyset =$  enveloppe cerclée de  $D$ ), ou bien

- (2) il existe un trou  $T$  de  $D$  de la forme  $d^-(b, R)$

et il existe  $f_1 \in H(C T)$  tel que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f_1(x) = 0$  et tel que  $\|f_1\|_{C T} = \|f\|_D$ .

Par exemple, supposons que nous sommes dans le cas (1), et soit

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x - a)^n \quad \text{où } \lambda_n \in K.$$

Alors  $\|f_0\|_{\emptyset}$  est de la forme  $|\lambda_q| R^q$ , d'où  $R^q \in |K|$ , et donc  $R \in |K|$  (puisque  $K$  est algébriquement clos).

---

(\*) Alain ESCASSUT, Laboratoire de mathématiques et d'informatique associé au CNRS, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

On procéderait de même dans le cas (2) pour  $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n / (x - b)^n$ , et on montrerait que  $R \in |K|$ .

Soit  $a \in D$ . Alors, puisque  $D$  est fortement infraconnexe, il existe une suite  $a_n$  de  $D$  telle que

$$|a_n - a| = |a_n - a_m| = R, \quad \forall n \neq m \text{ dans le cas (1)}$$

$$|a_n - b| = |a_n - a_m| = r, \quad \forall n \neq m \text{ dans le cas (2)}.$$

Par suite, pour  $n$  assez grand, on sait que

$$v(f_0(a_n)) = v_a(f_0, -\log R) = -\log \|f_0\|_{\mathcal{O}} \text{ dans le cas (1)}$$

$$v(f_1(a_n)) = v_b(f_1, -\log r) = -\log \|f_1\|_{\mathcal{C}_T} \text{ dans le cas (2)}.$$

Ainsi  $\|f\|_D$  est bien atteint.

Preuve du théorème 1. - Soit  $R = \text{diam}(D)$ . Il est facile de voir que (ii) entraîne (i). En effet, supposons  $D$  non calibré. Par exemple, supposons  $R \notin |K|$ . Soit  $a \in D$ ; alors

$$\|x - a\|_D = R > |\alpha - a|, \quad \forall \alpha \in D.$$

De même si le diamètre  $r$  d'un trou  $T = d^-(a, r)$  n'appartient pas à  $|K|$ , l'élément  $h(x) = 1/(x - a)$  montre que

$$\left\| \frac{1}{x - a} \right\| = \frac{1}{r} > |h(\alpha)|, \quad \forall \alpha \in D.$$

Enfin, supposons  $D$  non fortement circonférencié, et soit  $T = d^-(a, r)$  un trou de  $D$  tel que seul un nombre fini de classes du cercle  $C(a, r)$  rencontre  $D$ ; notons  $d^-(a_i, r)_{1 \leq i \leq n}$ , ces classes, et soit

$$h(x) = \sum_{i=1}^n (x - a_i) / (x - a)^{n+1}.$$

Alors  $\|h\|_D = 1/r$ , mais  $|h(x)| < 1/r$ ,  $\forall x \in K$  tel que  $|x - a| \geq r$ , donc en particulier  $|h(x)| < \|h\|_D$ ,  $\forall x \in D$ .

Montrons maintenant que si  $D$  est calibré et fortement infraconnexe, alors il existe  $\alpha \in D$  tel que  $|f(\alpha)| = \|f\|_D$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $\|f\|_D \in |K|$  et d'appliquer la proposition 1.

En effet :

ou bien  $\log \|f\|_D$  est de la forme

$$(3) \quad v_a(f_0, \log R), \quad f_0 \in H(\mathcal{O}),$$

et alors puisque  $D$  est calibré,  $R \in |K|$ , d'où  $v_a(f_0, -\log R) \in v(K)$

ou bien  $\log \|f\|_D$  est de la forme

$$(4) \quad v_b(f_1, -\log r), \quad f_1 \in H(\mathbb{C} T),$$

où  $T = d^-(b, r)$ , et alors  $r \in |K|$ , d'où  $v_b(f_1, -\log r) \in v(K)$ . Ainsi  $\|f\|_D \in |K|$  dans tous les cas ce qui achève la démonstration.

Théorème de Lubin-Hensel. - Avant d'énoncer le théorème 2 précisons quelques notations.

Soit  $D$  un fermé borné de  $K$ , et soit

$$F(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) Y^s \in H(D)[[Y]].$$

Pour tout  $\alpha \in D$  fixé, on notera

$$F_\alpha(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(\alpha) Y^s.$$

THÉORÈME 2. - Soit  $D$  un ouvert fermé borné fortement infraconnexe de  $K$ , sans T-filtre, et soit

$$F(Y) = \sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(x) Y^s \in H(D)[[Y]]$$

tel que

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \left\| \frac{\xi_s^{n-l} \xi_\ell^{s-n}}{\xi_n^{s-n}} \right\|_D < 1,$$

pour tout  $l = 0, \dots, n-1$ .

Soit  $M$  l'ensemble des  $\alpha \in D$  tels que  $\xi_i(\alpha) = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ . Supposons qu'il existe une fonction bornée  $r$  dans  $D \setminus M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que, pour tout  $x \in D \setminus M$ , le disque  $d(0, r(x))$  contienne exactement  $n$  zéros  $(y_1(x), \dots, y_n(x))$  de  $F_x$  (distincts ou confondus). Alors  $F$  se factorise dans  $H(D)[[Y]]$  sous la forme  $F = PG$ , où

$$P(Y) = \prod_{i=1}^n (Y - y_i(x)) \in H(D)[Y]$$

et où  $G \in H(D)[[Y]]$ .

COROLLAIRE. - Soit  $D$  un ouvert fermé borné fortement infraconnexe de  $K$ , sans T-filtre, et soit

$$F(Y) = \sum_{s=0}^q \xi_s(x) Y^s \in H(D)[Y].$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \leq q$ , et soit  $M$  l'ensemble des  $\alpha \in D$  tels que  $\xi_i(\alpha) = 0$  pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ . On suppose que, pour tout  $x \in D \setminus M$ , il existe un disque  $d(0, r(x))$  contenant exactement  $n$  zéros (distincts ou confondus)

$(y_1(x), \dots, y_n(x))$  de  $F_x$ .

Alors  $F$  se factorise dans  $H(D)[Y]$  sous la forme  $F = PG$ , où

$$P(Y) = \prod_{i=1}^n (Y - y_i(x)) \in H(D)[Y],$$

et où  $G(Y) \in H(D)[Y]$  ( $\deg G = q - n$ ).

Preuve. - Quand  $F \in H(D)[Y]$ , la condition sur la lim sup du théorème 2 est inutile.

Remarque 1. - Le polynôme  $F(Y) = x + x^2 Y$ , montre qu'il est indispensable de supposer la fonction  $r$  bornée dans  $D \setminus M$ , même si par exemple on choisit pour  $M$  l'ensemble des  $x \in D$  tels que  $\xi_0(x) = \dots = \xi_{n-1}(x) = 0$ .

Remarque 2. - Le polynôme  $F(Y) = 1 + Y + xY^2$  montre que l'hypothèse "D fortement infraconnexe" est elle aussi indispensable. Considérons en effet  $D = \bar{d}(0, 1)$ . Alors, pour tout  $x \in D$ , il existe bien un disque  $d(0, r(x))$ , où  $r(x) = 1$ , qui contient un seul zéro  $a(x)$  de  $F_x$ .

$$\text{Soit } \varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{1/2}{i} (-4x)^i; \text{ alors } a(x) = (\varphi(x) - 1)/2x.$$

Or on va voir que  $\varphi \notin H(D)$  et, par suite, le polynôme  $P(Y) = Y - a(x)$  n'appartient pas à  $H(D)[[Y]]$ . En effet, supposons  $\varphi \in H(D)$ ; alors il existe  $P/Q \in R(D)$  tel que  $\|\varphi - P/Q\|_D < 1$ , d'où  $\|\varphi^2 - P^2/Q^2\|_D < 1$ , et par suite,  $\|\varphi^2 Q^2 - P^2\|_D < 1$ . Or  $\varphi^2 = 1 - 4x$  d'où, dans l'anneau résiduel  $K[X]$ , on obtient  $(\bar{1} - \bar{4}x)\bar{Q}^2 = \bar{P}^2$  ce qui est impossible si  $\bar{2} \neq 0$ . (On pourrait choisir un exemple différent si la caractéristique résiduelle est 2).

Pour établir le théorème 2, on commence par démontrer la proposition 2 en reprenant la démonstration classique du lemme de Hensel.

PROPOSITION 2. - Soit  $D$  un fermé borné de  $K$ , et soit

$$F(Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i(x) Y^i \in H(D)[[Y]]$$

On suppose qu'il existe un entier  $n$  tel que  $\xi_n = 1$  et une fonction bornée  $\mu$  définie dans  $D$ , à valeur dans  $\mathbb{R}$  ainsi qu'un réel  $\lambda > 0$  tels que, pour tout  $x \in D$ , on ait

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq v(\xi_n(x)) + n\mu(x) \quad \text{si } i = 0, \dots, n-1$$

et

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq \lambda + n\mu(x) \quad \text{si } i > n.$$

Alors il existe un polynôme unitaire  $P(Y) \in H(D)[Y]$  de degré  $n$  tel que, pour tout  $x \in D$ ,  $P_x$  soit le polynôme unitaire qui admet pour zéros, les zéros

de  $F_x$  dans  $d(0, p^{-\mu(x)})$ .

Preuve. - On notera  $\mu_1$  et  $\mu_2$  deux réels tels que  $\mu_1 < 0 < \mu_2$  et

$$\mu_1 \leq \mu(x) \leq \mu_2, \quad \forall x \in D.$$

Soit  $P_1 = \sum_{i=0}^n \xi_i(x) Y$ . Puisque  $P_1$  est unitaire, on peut effectuer la division euclidienne dans l'anneau  $H(D)[[Y]]$ , de  $F(Y)$  par  $P_1$ , et l'on obtient

$$G_1(Y) \in H(D)[[Y]] \quad \text{et} \quad R_1 \in H(D)[Y]$$

tels que  $F = P_1 G_1 + R_1$ , et  $\deg R_1 < n$ .

En outre  $G_1$  et  $R_1$  sont uniques satisfaisant ces propriétés.

Plus généralement supposons obtenus pour chaque entier  $j = 0, \dots, m$ ,

$P_j \in H(D)[Y]$ , unitaire, de degré  $n$ ,

$G_j \in H(D)[[Y]]$

$R_j \in H(D)[Y]$  tel que  $\deg R_j < n$ , et tels que  $F = P_m G_m + R_m$ .

On pose alors  $P_{m+1} = P_m + R_m$ , et on voit que  $P_{m+1}$  est encore unitaire et de degré  $n$ .

Il existe donc  $G_{m+1} \in H(D)[[Y]]$  et  $R_{m+1} \in H(D)[Y]$  tel que  $\deg R_{m+1} < n$  et tels que  $F = P_{m+1} G_{m+1} + R_{m+1}$ , et  $G_{m+1}$ ,  $R_{m+1}$  sont uniques. On peut donc construire

- une suite de polynômes unitaires,  $R_m$  de degré  $n$ ,

- une suite de polynômes  $Q_m$  de degré  $< n$ ,

- une suite  $G_m$  de  $H(D)[[Y]]$

telles que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,  $F$  se décompose dans  $H(D)[[Y]]$  sous la forme

$$F = P_m G_m + R_m.$$

Par hypothèse, et compte tenu que  $\xi_n = 1$ , on a

$$v(\xi_i(x)) + i\mu(x) \geq n\mu(x) + \lambda \quad \text{pour tout } i > n,$$

d'où

$$(5) \quad v((F - P_1)_x, \mu(x)) \geq n\mu(x) + \lambda, \quad \forall x \in D.$$

Posons  $h(x) = v((F - P_1)_x, \mu(x)) - n\mu(x)$ . Supposons que jusqu'au rang  $q$ ,  $P_m$ ,  $G_m$ ,  $R_m$  vérifient

$$(6) \quad v((P_m - P_{m-1})_x, \mu(x)) \geq (m-1)h(x) + n\mu(x)$$

$$(7) \quad v((P_m)_x, \mu(x)) = n\mu(x)$$

$$(8) \quad v((R_m)_x, \mu(x)) \geq mh(x) + n\mu(x)$$

$$(9) \quad v((G_m - G_{m-1})_x, \mu(x)) \geq (m-1)h(x)$$

$$(10) \quad v((G_m)_x, \mu(x)) = 0.$$

Alors nous allons montrer que les relations (6), (7), (8), (9) et (10) sont encore vraies au rang  $q + 1$ .

Remarquons d'abord que (6) est satisfaite au rang  $q + 1$  grâce à (8) vrai au rang  $q$ , et que (7) est satisfaite au rang  $q + 1$ , car  $v((P_{q+1})_x, \mu(x)) \geq n_\mu(x)$  du fait que  $P_{q+1}$  est unitaire, et  $v((P_{q+1})_x, \mu(x)) \leq n_\mu(x)$  d'après (7) et (8) vrais au rang  $q$ .

D'autre part, on a

$$P_q G_q + R_q = (P_q + R_q) G_{q+1} + R_{q+1},$$

d'où

$$-R_q G_{q+1} = P_q (G_{q+1} - G_q) + R_{q+1} - R_q.$$

Et on reconnaît ici la division euclidienne de  $-R_q G_{q+1}$  par  $P_q$ .

Par suite, et toujours d'après le lemme 4.4.2 de [1], on a donc

$$v((G_{q+1} - G_q)_x, \mu(x)) \geq v((R_q G_{q+1})_x, \mu(x)) - v(P_q, \mu(x))$$

d'où, d'après (7) et (8) vrais au rang  $q$ ,

$$v((G_{q+1} - G_q)_x, \mu(x)) \geq qh(x) + n_\mu(x) + v((G_{q+1})_x, \mu(x)) - n_\mu > v((G_{q+1})_x, \mu(x))$$

ce qui prouve que  $v((G_{q+1})_x, \mu(x)) = v((G_q)_x, \mu(x))$  et par suite

$$v((G_{q+1} - G_q)_x, \mu(x)) \geq qh(x), \quad (9).$$

Alors, toujours d'après le lemme 4.4.2 de [1], on voit que

$$v((R_{q+1} - R_q)_x, \mu(x)) \geq v((-R_q G_{q+1})_x, \mu(x)) = v((R_q)_x, \mu(x)) = qh(x).$$

Nous allons en déduire la relation (8) au rang  $q + 1$ . En effet, considérons la division euclidienne de  $R_q(1 - G_{q+1})$  par  $P_q$ . On obtient

$$R_q(1 - G_{q+1}) = P_q(G_{q+1} - G_q) + R_{q+1},$$

d'où l'on déduit que

$$(11) \quad v((G_{q+1} - G_q)_x, \mu(x)) \geq v((R_q)_x, \mu(x)) + v(1 - (G_{q+1})_x, \mu(x)) - v((P_q)_x, \mu(x)).$$

Et  $v((R_{q+1})_x, \mu(x)) \geq v((R_q)_x, \mu(x)) + v((1 - G_{q+1})_x, \mu(x))$ .

Or  $v((R_q)_x, \mu(x)) \geq qh(x) + n_\mu(x)$ , et il reste donc à montrer que

$$v((1 - G_{q+1})_x, \mu(x)) \geq h(x).$$

Pour cela, remarquons d'abord que (11) ainsi que (7) et (8) vrais au rang  $q$ , et

(10) déjà vérifié au rang  $q + 1$ , nous donnent

$$(12) \quad v((G_{q+1} - G_q)_x, \mu(x)) \geq qh(x) \geq h(x) .$$

Considérons

$$v(1 - (G_{q+1})_x, \mu(x)) \geq \min[v((G_1)_x - 1, \mu(x)), \inf_{2 \leq m \leq q} v((G_{m+1} - G_m)_x, \mu(x))]$$

Grâce à (9) déjà vrai pour  $m \leq q$ , et à (11), on voit que

$$\inf_{2 \leq m \leq q} v((G_{m+1} - G_m)_x, \mu(x)) \geq h(x)$$

et que la division de  $F - P$  par  $P$  donne

$$v((G_1)_x - 1, \mu(x)) \geq v((F - P)_1)_x, \mu(x) - v((P_1)_x, \mu(x)) = h(x)$$

d'où finalement

$$v(1 - (G_{q+1})_x, \mu(x)) \geq h(x) .$$

Alors d'après (8) vrai au rang  $q$ , on a donc bien

$$v((R_{q+1})_x, \mu(x)) \geq (q + 1)h + n\mu(x) \text{ au rang } q + 1 .$$

Les relations (6), (7), (8), (9), (10) sont donc vraies par récurrence, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  (puisque elles sont vraies de façon évidentes pour  $m = 1$ ), et on en déduit aisément, que la suite  $R_m$  converge vers 0 dans  $H(D)[Y]$  pour la norme de Gauss définie sur  $H(D)[Y]$  par

$$\|\sum_{i=0}^q a_i(x) Y^i\|_D^* = \max_{0 \leq i \leq q} \|a_i(x)\|_D ,$$

puisque d'après (10), on a  $-\log \|R_m\|_D^* \geq m\lambda + n\mu_1$ .

Alors la suite  $P_m$  converge elle aussi dans  $H(D)[Y]$  vers un polynôme unitaire  $P$  de degré  $n$ .

Maintenant, d'après la démonstration classique du lemme de Hensel dans  $K[[Y]]$  appliquée à  $F_x$ , on sait que, pour tout  $x$  fixé, la suite  $(P_m)_x$  converge vers le polynôme unitaire dont les zéros sont les zéros de  $F_x$  dans  $d(0, p^{-\mu(x)})$ , ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 3. - Soit  $D$  un fermé borné de  $K$ , et soit  $F(Y) \in H(D)[[Y]]$ . On suppose qu'il existe un polynôme unitaire  $P(Y) \in H(D)[Y]$  de degré  $n$ , et une fonction  $r$  définie dans  $D$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  tels que, pour tout  $x \in D$ , les  $n$  zéros de  $P_x$  soient les zéros de  $F_x$  dans  $d(0, r(x))$ .

Alors  $F$  se factorise dans  $H(D)[[Y]]$  sous la forme

$$F(Y) = P(Y) G(Y) \quad (G(Y) \in H(D)[[Y]]) .$$

Preuve. - Considérons la division euclidienne de  $F$  par le polynôme unitaire  $P$



dans  $H(D)[[Y]]$ .

On a donc  $F = PG + R$ , où  $G \in H(D)[[Y]]$  et  $R \in H(D)[Y]$ ,  $\deg R < n$ .

Particulièrement,  $F_x = P_x G_x + R_x$ . Mais, puisque les zéros de  $P_x$  dans  $d(0, r(x))$  sont ceux de  $F_x$ , on reconnaît ici le lemme de Hensel connu dans  $K[[Y]]$  et, par suite,  $R_x = 0$ . Comme ceci est vrai pour tout  $x \in D$  on a donc  $R = 0$ .

Rappelons maintenant le classique théorème de Riemann.

LEMME 1. - Soit  $D = d(a, r) \setminus \{a\}$ , et soit  $f \in H(D)$  tel que  $\|f\|_D < +\infty$ . Alors  $f$  se prolonge en un élément de  $H(d(a, r))$ .

Rappelons également une propriété classique des éléments quasi inversibles.

LEMME 2. - Soit  $D$  un fermé borné et soient  $f_1, \dots, f_n$  des éléments quasi inversibles de  $H(D)$  tels que l'ensemble des  $x \in D$  pour lesquels

$$f_i(x) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n,$$

est vide. Alors il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\max_{1 \leq i \leq n} |f_i(x)| \geq \delta, \quad \forall x \in D.$$

Preuve du théorème 2. - D'après les hypothèses faites sur  $D$ , on sait que tout élément non nul de  $H(D)$  est quasi inversible, et en particulier les éléments qui n'ont pas de zéro dans  $D$  sont inversibles.

D'autre part, d'après la proposition 3, on voit qu'il suffit de montrer que le polynôme  $P(Y) = \prod_{i=1}^n (Y - y_i(x))$  appartient à  $H(D)[Y]$ .

Enfin, on peut toujours se ramener au cas où  $r(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i(x)|$ , ce que nous supposons donc, et on a alors les relations classiques

$$(13) \quad |\xi_n(x)| r(x)^n = \max_{0 \leq i \leq n-1} |\xi_i(x)| r(x)^i.$$

$$(14) \quad |\xi_n(x)| r(x)^n > |\xi_s(x)| r(x)^s \text{ pour tout } s > n.$$

D'après (13), on voit que  $\xi_n$  ne s'annule pas dans  $D \setminus M$ .

Supposons d'abord que  $M = \emptyset$ . Alors  $\xi_n$  est inversible dans  $H(D)$  et on peut supposer  $\xi_n = 1$  car  $\xi_n^{-1} F$  satisfait encore les hypothèses du théorème.

Maintenant, d'après le lemme 2, on sait qu'il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} |\xi_i(x)| \geq \delta$$

quel que soit  $x \in D$ . Alors on voit, grâce à (13) que, pour tout  $x \in D$ , il existe  $h \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta \leq r(x)^{n-h}$ .

Donc la fonction  $\mu(x) = -\log r(x)$  est bornée dans  $D$  (puisque  $r$  est bornée par hypothèse).

Pour appliquer la proposition 2, il suffit maintenant de montrer que les relations (15) et (16) suivantes sont satisfaites pour tout  $x \in D$ .

$$(15) \quad v(\xi_i(x)) + i_\mu(x) \geq n_\mu(x) \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

$$(16) \quad v(\xi_s(x)) + s_\mu(x) \geq \lambda + n_\mu(x) \quad \text{pour tout } s > n.$$

En fait (15) est équivalente à (13), et il reste donc à trouver  $\lambda > 0$  tel que (16) soit satisfaite.

Par hypothèse on a

$$\limsup_{s \rightarrow \infty} \|\xi_s^{n-\ell} \xi_\ell^{s-n}\|_D < 1 \quad (0 \leq \ell \leq n-1),$$

et il existe donc  $\gamma > 0$ , et  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $s \geq N$ , et pour tout  $\ell = 0, \dots, n-1$ , on ait

$$(17) \quad v(\xi_s^{n-1}(x) \xi_\ell^{s-n}(x)) \geq \gamma \quad \text{quel que soit } x \in D.$$

Fixons  $x \in D$  et soit  $h < n$  tel que  $r(x)^{n-\ell} = |\xi_h(x)|$ . Alors, pour tout  $\ell \leq n-1$ , on a  $r(x)^{n-\ell} \geq |\xi_\ell(x)|$ .

Soit  $s > n$ , on sait que  $|\xi_s(x)| r(x)^s < r(x)^n$  et par suite

$$r(x) \geq |\xi_\ell(x)|^{1/(n-\ell)},$$

d'où

$$\xi_s(x) (\xi_\ell(x))^{(s-n)/(n-\ell)} < 1$$

c'est-à-dire

$$(18) \quad v((\xi_s(x))^{n-\ell} (\xi_\ell(x))^{s-n}) > 0 \quad (\ell = 0, \dots, n-1, s > n).$$

Ceci est vrai en particulier pour  $s = n+1, \dots, N$ .

Maintenant, puisque  $D$  est fortement infraconnexe, on peut appliquer la proposition 1, et on en déduit que

$$\inf_{x \in D} v(\xi_s(x)^{n-\ell} \xi_\ell(x)^{s-n}) > 0 \quad (\text{pour tout } s > n, \ell < n).$$

En effet, supposons

$$\inf_{x \in D} v(\xi_s(x)^{n-\ell} \xi_\ell(x)^{s-n}) = 0$$

pour tout couple d'entier  $(s, \ell)$   $s > n$ ,  $\ell < n$ . Alors

$$\|\xi_n^{n-\ell} \xi_\ell^{s-n}\|_D = 1$$

et la proposition 1 montre qu'il existe  $\alpha \in D$  tel que

$$|\xi_s(\alpha)^{n-\ell} \xi_\ell(\alpha)^{s-n}| = 1,$$

ce qui contredit (18).

Posons  $\gamma_{\ell, s} = -\log \|\xi_s^{n-\ell} \xi_\ell^{s-n}\|_D$  pour  $n+1 \leq s \leq N$ ,  $\ell \leq n$  et  $\lambda = 1/n \min(\gamma, \min_{0 \leq \ell \leq n-1} (\gamma_{\ell, s}))$ . Alors on a la relation

$$(19) \quad -\log \|\xi_s^{n-\ell} \xi_\ell^{s-n}\|_D \geq n\lambda$$

quel que soit  $s > n$ , et  $\ell \leq n-1$ . On peut facilement en déduire (16). Fixons  $x \in D$  et soit  $h \in \mathbb{N}$  tel que  $h < n$  et  $r(x) = |\xi_h(x)|^{1/(n-h)}$ . Alors pour tout  $s > n$ , on a

$$v(\xi_s(x)) + s\mu(x) - n\mu(x) = v(\xi_s(x)) + \frac{s-n}{n-h} v(\xi_h(x))$$

donc d'après (19),  $v(\xi_s(x)) + (s-n)\mu(x) \geq \lambda$  et c'est bien la relation (16). Le théorème est donc établi quand  $M = \emptyset$ .

Il reste donc à établir le théorème quand  $M \neq \emptyset$ . Remarquons d'abord que  $\mu$  est fini puisque les éléments de  $H(D)$  sont quasi inversibles. Soit  $M = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\}$  et pour chaque  $\rho > 0$ , soit

$$D_\rho = D \setminus \bigcup_{i=1}^q d^-(\alpha_i, \rho).$$

Alors puisque  $D \cap M = \emptyset$ , on peut appliquer le théorème, déjà établi quand  $M = \emptyset$ , à  $F$  dans  $H(D_\rho)[[Y]]$ . Alors  $P \in H(D_\rho)[Y]$  quel que soit  $\rho > 0$ .

Soit  $P(Y) = \sum_{i=0}^n a_i(x) Y^i$ , ( $a_n = 1$ ). On voit donc que  $a_i \in H(D_\rho)$ ,  $\forall \rho > 0$ . Mais puisque la fonction  $r$  est bornée dans  $D \setminus M$ , on voit que les  $a_i$  sont aussi bornés, puisque  $P$  est unitaire, et par suite,  $M$  étant fini, on peut prolonger chaque  $a_i$  en un élément de  $H(D)$  grâce au théorème de Riemann ultramétrique, ce qui achève la démonstration.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Yvette). - Les nombres p-adiques. - Paris, Presses universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [2] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., Série A, t. 77, 1974, p. 339-351.
- [3] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres percés sur un ensemble infraconnexe, Annali di Mat. pura ed appl., Série 4, t. 110, 1976, p. 335-352.
- [4] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, n° 2, p. 45-80.
- [5] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque, n° 10, 1973, p. 1-107.
- [6] ESCASSUT (Alain). - Éléments spectralement injectifs et générateurs universels dans une algèbre de Tate, Collect. Mat., Barcelona, t. 23, 1977, p. 131-148.
- [7] DWORK (Bernard). - On the zeta function of a hypersurface. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des hautes Etudes scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 5-68).

