

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ELHANAN MOTZKIN

L'arbre d'un quasi connexe : un invariant conforme p -adique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, n° 1 (1981-1982), exp. n° 3, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A3_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1981-1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

L'ARBRE D'UN QUASI CONNEXE : UN INVARIANT CONFORME p -ADIQUE

par Elhanan MOTZKIN (*)

Introduction.

Dans ma thèse [3] je m'étais attaché à déterminer un invariant analytique attaché à un quasi-connexe. Ceci m'avait conduit à définir l'arbre d'un quasi connexe. Par la suite, je m'étais désintéressé de cette question car je n'avais pas réussi à déterminer si l'arbre caractérisait les quasi-connexes aux transformations bi-analytiques près (et, en fait, comme je l'expliquerai au paragraphe 4, certaines propriétés de l'arbre m'avaient échappé à l'époque).

Or récemment dans leur étude des groupes de Schottky et des groupes de Mumford [1], GERRITZEN et van der PUT ont introduit l'arbre d'un compact. Or il apparaît que l'arbre du compact X ainsi défini est une version moins élaborée de l'arbre défini par moi du complémentaire de X , lequel est un quasi-connexe.

L'arbre d'un quasi connexe tel que je l'avais défini me semble avoir les avantages suivants par rapport à l'arbre de Gerritzen - van der Put :

1° On obtient ainsi l'arbre d'un domaine fondamental d'un groupe de Schottky Γ , ce qui éclaire la relation du domaine fondamental avec l'arbre réduit de Ω/Γ , où Ω désigne l'ensemble des points réguliers.

2° On obtient un marquage des arêtes, qui est un invariant analytique, et qui garde un sens dans l'arbre réduit. (En fait le marquage des arêtes fait une apparition sous une forme déguisée dans le travail de Gerritzen - van der Put. Il correspond au nombre $|\rho|$ introduit dans le paragraphe IV.1.8 de [1].)

Comme les résultats concernant l'arbre d'un quasi-connexe n'avaient paru que dans des publications peu accessibles [3] ou sans démonstration [4], il m'a paru utile de donner ici un compte rendu complet de ces propriétés avec démonstrations. On verra que l'arbre permet non seulement de mieux visualiser la forme d'un quasi-connexe (il faut voir l'arbre comme le squelette du quasi connexe), mais aussi de démontrer des propriétés fines concernant les éléments analytiques, telles que celle-ci :

THÉOREME. - Soit A le complémentaire dans $\mathbb{P}(K)$ de la réunion d'un nombre fini de disques ouverts, et soit f un élément analytique strictement injectif sur A . Alors $f(A)$ est aussi le complémentaire d'un nombre fini de trous, et f^{-1} est

(*) Texte reçu le 28 juin 1982.

Elhanan MOTZKIN, 194 rue du Château des Rentiers, 75013 PARIS.

un élément analytique sur $f(A)$. (La partie non triviale est que f^{-1} est un élément analytique.)

Comme mentionné au début de cette introduction, il serait important de dire si, sous certaines conditions, on peut répondre affirmativement à la question suivante :

Soient A et A' deux quasi connexes ayant le même arbre. Existe-t-il une bijection bi-analytique de A sur A' ?

La réponse est non en général si A possède des trous-points isolés. La réponse est-elle oui si A n'a qu'un nombre fini de trous non réduits à des points ?

Le plan de cet exposé est le suivant :

Dans les paragraphes 1 et 2, on définit l'arbre d'un quasi connexe, on montre que c'est un invariant pour les transformations homographiques, et on fait le lien avec les résultats de Gerritzen - van der Put.

Dans le paragraphe 3, on introduit une structure supplémentaire sur l'arbre (structure des sommets), et l'on étudie l'action sur l'arbre d'un quasi connexe A d'un élément analytique injectif sur A . On en déduit des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour qu'un élément analytique injectif sur A soit bi-analytique.

Dans le paragraphe 4, on montrera enfin que sous l'effet d'une transformation bi-analytique, les sommets ne tournent pas les uns par rapport aux autres (ou si l'on veut, les transformations bi-analytiques conservent les angles). Cette propriété, que je n'avais pas remarquée autrefois, a été découverte par GERRITZEN et van der PUT.

Notations.

K désigne un corps algébriquement clos, valué, ultramétrique et complet ; $\underline{P}(K)$, son projectivisé.

Le complémentaire d'un disque est dit disque de centre ∞ .

Une couronne est le complémentaire dans $\underline{P}(K)$ de deux disques disjoints. C'est aussi l'intersection de deux disques non contenus l'un dans l'autre (donc l'un au moins est de centre ∞).

Le symbole $<$ signifie que l'on a soit $<$, soit $\leq$.

Le complémentaire dans $\underline{P}(K)$ du sous-ensemble A sera noté A^c .

1. L'invariant d'une couronne.

1.1. Définition. - On a deux cas à considérer :

(a) Si la couronne $\Delta = \{x \in \underline{P}(K) ; r < |x - a| < R\}$, l'invariant est $i(\Delta) = r/R$

(b) Si la couronne $\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; |x - a| > R_1 \text{ et } |x - b| > R_2\}$, avec $R_1, R_2 \leq |b - a|$, l'invariant est $i(\Delta) = R_1 R_2 / |b - a|^2$.

Si Δ est le complémentaire de deux points, $i(\Delta) = 00$ (double 0).

1.2. PROPOSITION. - Si la transformation homographique γ transforme Δ en Δ' , on a $i(\Delta) = i(\Delta')$.

Démonstration. - Il est clair que l'invariant n'est pas changé par translation : $\gamma(x) = x + a$, ni par homothétie $\gamma(x) = \lambda x$, $\lambda \neq 0$. Il reste à examiner le cas d'une inversion $\gamma(x) = 1/x$. On a 4 cas à examiner :

(a) 0 et ∞ sont dans deux trous distincts de Δ , soit

$$\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; r < |x| < R\}.$$

Alors $\Delta' = \{x \in \mathbb{P}(K) ; 1/R < |x| < 1/r\}$, d'où $i(\Delta') = i(\Delta)$.

(b) 0 et ∞ sont dans le même trou de Δ , soit

$$\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; r < |x - a| < R\} \text{ et } |a| > R.$$

Alors $\Delta' = \{x \in \mathbb{P}(K) ; \frac{r}{|a|^2} < |x - a| < \frac{R}{|a|^2}\}$, d'où

$$i(\Delta') = \frac{r}{|a|^2} / \frac{R}{|a|^2} = \frac{r}{R} = i(\Delta)$$

(c) $0 \in \Delta$ et $\infty \notin \Delta$, soit

$$\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; r < |x - a| < R\} \text{ et } r < |a| < R.$$

Alors $\Delta' = \{x \in \mathbb{P}(K) ; |x - \frac{1}{a}| > \frac{r}{|a|^2} \text{ et } |x| > \frac{1}{R}\}$, d'où

$$i(\Delta') = \left(\frac{r}{|a|^2} \times \frac{1}{R} \right) / \frac{1}{|a|^2} = \frac{r}{R} = i(\Delta),$$

ceci rend aussi compte du cas $\infty \in \Delta$ et $0 \notin \Delta$.

(d) 0 et ∞ appartiennent à Δ , soit

$$\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; |x - a| > R_1 \text{ et } |x - b| > R_2\} \text{ avec } 0 \in \Delta.$$

Alors $\Delta' = \{x \in \mathbb{P}(K) ; |x - \frac{1}{a}| > \frac{R_1}{|a|^2} \text{ et } |x - \frac{1}{b}| > \frac{R_2}{|b|^2}\}$ d'où

$$i(\Delta') = \left(\frac{R_1}{|a|^2} \times \frac{R_2}{|b|^2} \right) / \left| \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right|^2 = \frac{R_1 R_2}{|a - b|^2} = i(\Delta).$$

1.3. L'invariant caractérise-t-il les couronnes ? c'est-à-dire si Δ et Δ' sont deux couronnes de même nature (ouvertes, fermées, ou semi-ouvertes) et de même

invariant, existe-t-il une transformation homographique γ à coefficients dans K envoyant Δ sur Δ' ?

On peut se ramener au cas où $\Delta = \{r_1 < |x| < R_1\}$, $\Delta' = \{r_2 < |x| < R_2\}$ et alors il suffit que $r_1/r_2 \in |K^*|$. Donc, si les couronnes ont les rayons de leurs trous appartenant à $|K|$, l'invariant caractérise la couronne.

1.4. Recollement des couronnes. - Soit Δ une couronne fermée ou semi-fermée dont l'un des trous est le disque ouvert $\{x \in P(K) ; |x - a| < r\}$

(resp. $\{x \in P(K) ; |x - a| > r\}$) avec $r \in |K^*|$

On dira que le cercle $\{x \in P(K) ; |x - a| = r\}$ est un cercle frontière de Δ

PROPOSITION. - Soient deux couronnes Δ_1 et Δ_2 fermées ou semi-fermées, non contenues l'une dans l'autre et dont l'intersection est un cercle frontière commun. Alors $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ est une couronne et $i(\Delta) = i(\Delta_1) \times i(\Delta_2)$.

Démonstration. - Par une transformation homographique, on peut se ramener au cas où

$$\Delta_1 = \{x \in P(K) ; r < |x| \leq 1\} \text{ et } \Delta_2 := \{x \in P(K) ; 1 \leq |x| < R\}.$$

Alors $\Delta = \{x \in P(K) ; r < |x| < R\}$ est bien une couronne et

$$i(\Delta) = \frac{r}{R} = \frac{r}{1} \times \frac{1}{R} = i(\Delta_1) \times i(\Delta_2).$$

2. L'invariant d'un quasi connexe.

2.1. Définition. Partition de $P(K)$.

2.1.1. Partition canonique. - C'est la partition en classes résiduelles.

2.1.2. Partition associée à un disque (fermé). - Soit B^+ un disque fermé ; par une transformation homographique γ on peut amener B^+ sur $D(0, 1^+)$. L'image réciproque par γ^{-1} de la partition canonique est la partition associée à B^+ (remarque : cette partition ne dépend pas de γ).

2.1.3. Quasi connexes [2]. - Un ensemble $A \subset P(K)$ est quasi connexe si, pour chaque couple de points $x, y \in A$, l'intersection $D(x, |x - y|) \cap A^c$ se répartit sur un nombre fini de cercles $C(x, r_i)$, $0 < r_i < |x - y|$, $i = 1, \dots, n$.

2.2. Construction de l'arbre. - Soit A un quasi connexe ouvert $\subset P(K)$. Par une transformation homographique, on peut se ramener au cas où $\infty \in A$.

Soit B l'enveloppe cerclée fermée de A^c (c'est-à-dire le plus petit disque fermé contenant A^c). Il lui correspond une partition.

On associe à B la racine de l'arbre. De cette racine, on fait partir des arêtes correspondant aux classes de la partition associée à B . Si une classe est conte-

nue dans A son arête est supprimée (ou marquée $\emptyset$). Pour une classe entièrement contenue dans A^C , l'arête est marquée 1. Enfin si la classe C est telle que $C \cap A \neq \emptyset$ et $C \cap A^C \neq \emptyset$, on considère l'enveloppe cerclée fermée de $C \cap A^C$, soit B' . On a $B' \subsetneq C$, car A est quasi connexe. B' définit un nouveau sommet, l'arête BB' étant marquée par

$$\frac{\text{rayon de } B'}{\text{rayon de } B} (< 1).$$

Si le rayon de $B' \notin |K^*|$, c'est que B' est un trou de A , et on ajoute une arête marquée 1.

Si le rayon de $B' \in |K^*|$, B' définit une partition, et l'on recommence.

Observons qu'à moins qu'un sommet ne contienne qu'un unique trou ouvert de A de même rayon que lui, A^C aura des points dans au moins deux classes différentes de la classe ∞ de la partition associée à ce sommet.

2.3. Une interprétation intrinsèque de l'arbre. - Les arêtes marquées 1 correspondent à des trous de A . Les arêtes non marquées 1 joignent toujours deux sommets et correspondent à des couronnes ouvertes contenues dans A ; elles sont marquées des invariants de ces couronnes. On voit aussi qu'il s'agit des couronnes maximales contenues dans A (avec l'exception éventuelle de deux d'entre elles que nous verrons plus tard).

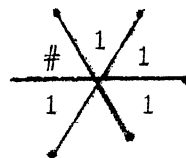
Quant aux sommets, ils se répartissent en trois classes :

1° La racine.

2° Les sommets correspondant à des trous isolés de A (c'est-à-dire qu'il existe un disque ouvert contenant strictement le trou considéré et pas d'autres trous). Les sommets sont appelés extrémités de l'arbre.



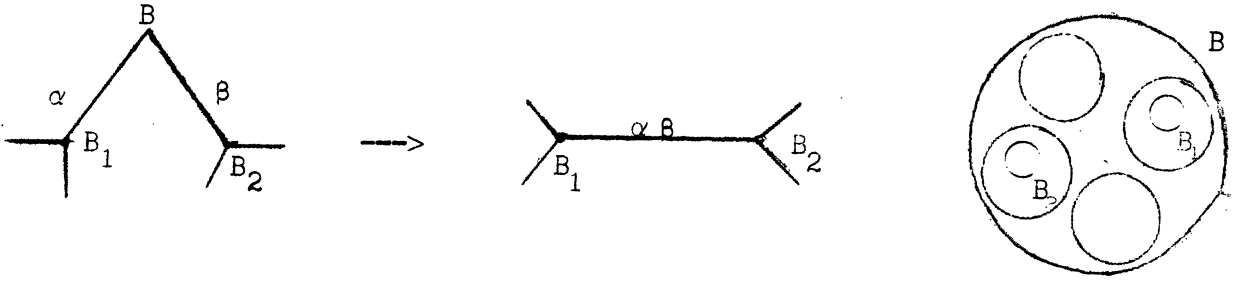
trou ouvert



trou fermé

3° Les autres sommets. Pour ceux-ci il y a des points de A dans au moins deux classes résiduelles et des points de A^C dans au moins trois classes résiduelles. Ils correspondent donc aux partitions de $\underline{P}(K)$ qui partagent A et A^C en au moins deux et trois morceaux respectivement.

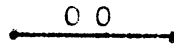
Quant à la racine, s'il n'y a que deux arêtes issues d'elle, les couronnes correspondantes ne sont pas maximales dans A , et on peut les recoller : on supprime la racine. Les deux arêtes en forment une seule marquée par le produit des marques sur les deux arêtes initiales.



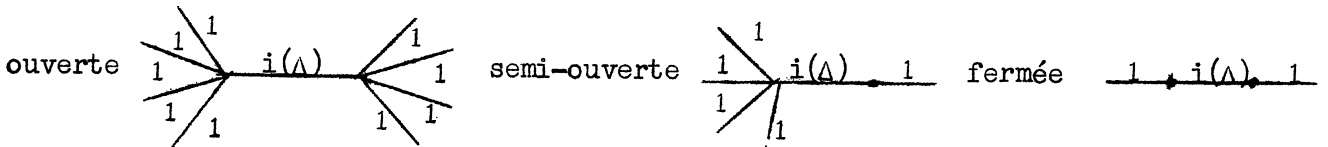
En effet, $\tilde{P}(K) - (B_1 \cup B_2)$ est une couronne maximale contenue dans A , d'invariant $\alpha \beta$.

2.4. Exemples :

2.4.1. $\tilde{P}(K) = \{0, \infty\}$

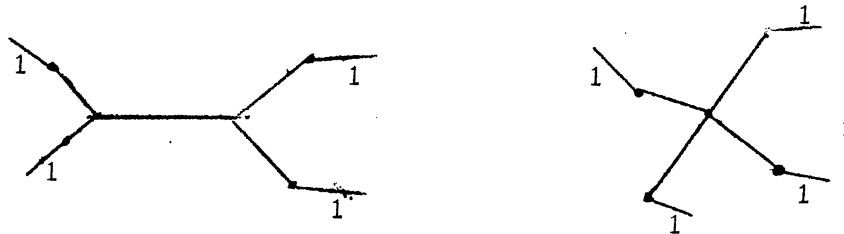


2.4.2. Couronne Δ dont les rayons des trous $\in |K^*|$



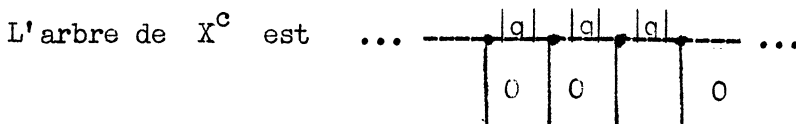
2.4.3. Quasi connexe ayant quatre trous isolés :

deux arbres possibles :



2.5. L'arbre d'un compact (d'après GERRITZEN - van der PUT). - Soit X un compact $\subset \tilde{P}(K)$. Alors $\forall \epsilon > 0$, $X_\epsilon = \bigcup_{x \in X} D(x, \epsilon^-)$ est une réunion finie de disques de rayons ϵ . $A_\epsilon = X_\epsilon^c$ est donc un quasi connexe, et $A = \bigcup_\epsilon A_\epsilon = X^c$, réunion enchaînée de quasi connexes, est un quasi connexe. Les trous de ce quasi connexe sont des trous-points. L'arbre de X (ayant plus de deux points) construit par GERRITZEN et van der PUT est l'arbre de A privé des arêtes aboutissant aux trous-points isolés et sans le marquage. Ainsi, soit $q \in K$, $0 < |q| < 1$,

$$X = \{q^n; n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0, \infty\}.$$



L'arbre de Gerritzen - van der Put est ...  ...

Remarque : l'arbre d'un compact est localement fini, c'est-à-dire que de chaque sommet ne partent qu'un nombre fini d'arêtes. En effet, pour chaque partition de $\underline{P}(K)$ le compact X est contenu dans un nombre fini de classes (principe du recouvrement fini).

2.6. THÉOREME. - Soit A un quasi connexe, soit $\gamma \in \text{PGL}(2, K)$. Soit $A' = \gamma(A)$. Alors les arbres de A et de A' peuvent être mis en correspondance.

C'est évident au vu de l'interprétation intrinsèque 2.3 et de la proposition 1.2.

2.7. Exemples. - Soit L l'ensemble des points limites d'un groupe Γ totalement discontinu. On suppose que L a au moins trois points. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, γ définit une transformation de $\underline{P}(K) - L$ sur lui-même, donc définit une transformation de l'arbre sur lui-même. Le groupe Γ agit donc sur l'arbre de $\underline{P}(K) - L$. De plus, comme $L \subset \underline{P}(k)$, les invariants associés aux arêtes $\in |k^*|$.

2.8. Recollement de quasi connexes. Greffe d'arbres. - Soient deux quasi connexes A et A' . Soit T (resp. T') un trou ouvert isolé de A (resp. A'). On suppose que T et T' sont contigus (c'est-à-dire T et T' sont deux classes distinctes d'une même partition). On dira que $C = \underline{P}(K) - (T \cup T')$ est le bord commun de T et T' . Enfin on suppose que $A \cap A' = C$.

La réunion $A \cup A'$ de deux quasi connexes enchaînés est aussi un quasi connexe.

Si les arbres de A et de A' ont plus d'un sommet, l'arbre du quasi connexe $A \cup A'$ s'obtient en recollant les arbres de A et de A' par leur sommet commun correspondant à la partition définie par T ou T' . Comme il n'y a que deux arêtes aboutissant à ce sommet, on efface le sommet, et l'arête unique obtenue est marquée par le produit des marquages des arêtes pré-existantes.

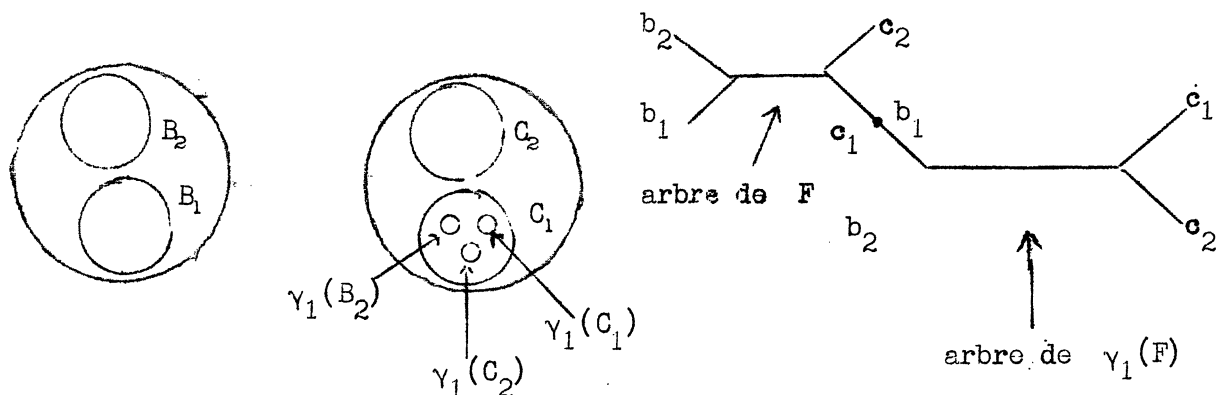
(Le cas où A' n'a qu'un sommet correspond à A' est un disque $A = T \cup C$. Alors recoller A et A' revient à supprimer le trou T de A , l'arête aboutissant à ce sommet disparaît. Il peut apparaître en chaîne des suppressions de sommets.)

2.9. Exemple associé au groupe du Schottky. - Soient B_i^+ , C_i^+ , $2g$ -disques fermés disjoints de $\underline{P}(K)$ et $\gamma_i \in \text{PGL}(2, k)$ tels que $\gamma_i(\underline{P} - B_i^+) = C_i^+$, $\gamma_i(\underline{P} - B_i) = C_i^+$

Soit $F = \underline{P}(K) - (\bigcup_i B_i, \bigcup_i C_i)$

Soit Γ le groupe engendré par $\gamma_1, \dots, \gamma_g$. Alors si L est l'ensemble des points limites de Γ , $\underline{P}(K) - L = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F$

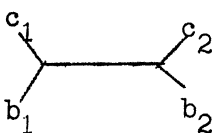
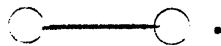
Montrons comment se construit l'arbre de $\tilde{P}(K) - L = \Omega$ à partir de celui de F . Soit par exemple $g = 2$. Prenons $F \cup \gamma_1(F)$. On est dans la situation décrite dans 2.8.



$\gamma_1(F)$ a même arbre que F , l'extrémité b_1 venant se recoller à c_1 . On supprime alors le sommet $c_1 = b_1$, l'arête unique obtenue étant marquée par le produit des invariants. On recommence ainsi à l'infini dans toutes les directions.

On considérera par la suite la variété analytique Ω/Γ , qui s'interprète aussi à partir de F en recollant le bord de B_1 avec celui de C_1 par l'identification définie par γ_1 . Parallèlement, on pourra considérer le quotienté de l'arbre de Ω par Γ , qui s'interprète aussi à partir de l'arbre de F en identifiant les sommets b_i et c_i , ce qui donne ici



Si l'on avait eu , cela aurait donné .

Enfin



donne



Bien entendu, le marquage des arêtes de l'arbre de Ω restant invariant par l'action de Γ , les arêtes du graphe quotient Ω/Γ seront également marqués.

3. Compléments sur l'arbre. Arbre et éléments analytiques.

Il était simple de démontrer que l'arbre était conservé par transformation homographique parce qu'une transformation homographique est définie partout dans $\tilde{P}(K)$, donc à la fois sur A et sur A^c . La situation est plus compliquée lorsqu'on veut montrer que l'arbre est un invariant analytique, car un élément analytique f sur A n'est pas défini sur A^c .

3.1. Élément analytique strictement injectif. - Nous dirons que l'élément analytique f défini sur l'ouvert A de $\tilde{P}(K)$ est strictement injectif sur A si, pour tout $c \in \tilde{P}(K)$, l'équation $f(x) = c$ a au plus une racine dans A , comptée avec son ordre de multiplicité; autrement dit, f est injectif (au sens ordinaire) sur A , et f' ne s'annule pas dans A .

Lorsque K est de caractéristique 0, si f est injectif sur Δ alors f est strictement injectif. Ce résultat classique en théorie complexe, se démontre de même dans le cas ultramétrique.

Par contre, en caractéristique $p \neq 0$, on peut avoir f injectif et $f' \equiv 0$, comme on le voit avec l'exemple $f(x) = x^p$.

Dans tout ce paragraphe, nous ne considérons que des éléments strictement injectifs.

3.2. LEMME. - Soit f un élément analytique strictement injectif sur une couronne Δ . Alors $f(\Delta)$ est une couronne, et $i(f(\Delta)) = i(\Delta)$.

(Il est essentiel de supposer que K est algébriquement clos).

Démonstration. - Par une transformation homographique, on peut se ramener au cas où $\Delta = \{x \in \mathbb{P}(K) ; r < |x| < R\}$. Alors f est développable en séries de Laurent dans Δ :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n.$$

On peut supposer que $a_0 = 0$.

J'affirme qu'alors on a

- soit : pour tout $t \in |K^*|$, $r < t < R$, le terme en x est strictement t -dominant (c'est-à-dire $|a_1| t > \sup_{i \neq 1} |a_i| t^i$).

- soit : pour tout $t \in |K^*|$, $r < t < R$, le terme en $1/x$ est strictement t -dominant (c'est-à-dire $|a_{-1}| t^{-1} > \sup_{i \neq -1} |a_i| t^i$).

En effet, si pour un $t \in |K^*|$ avec $\sup_i |a_i| t^i$, le terme x^m , $m \neq 1, -1$ est t -dominant (c'est-à-dire $|a_m| t^m = \sup_i |a_i| t^i$), choisissons $\alpha \in K$ tel que $|\alpha| = |a_m| t^m$, alors l'équation $f(x) - \alpha = 0$ aura, d'après le lemme de Hensel, au moins m zéros de module t , ce qui contredit l'injectivité stricte de f .

On ne peut pas avoir d'abord $1/x$ dominant, puis x dominant, car il existerait alors $t \in |K^*|$ avec $r < t < R$ tel que $|a_{-1}| t^{-1} = |a_1| t$, et alors l'équation $f(x) = 0$ aurait deux racines de module t .

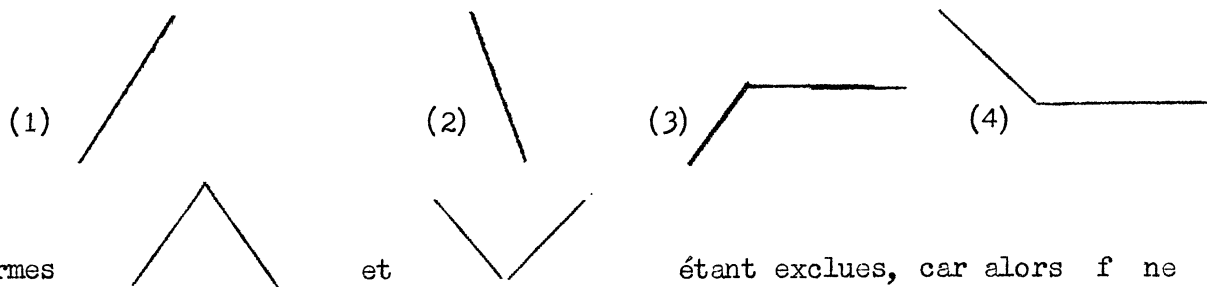
Le résultat annoncé découle alors de façon évidente de ces propriétés.

3.3. LEMME. - Soient Δ et Δ' deux couronnes contigües, et f un élément analytique strictement injectif sur $\Delta \cup \Delta'$. Alors $f(\Delta)$ et $f(\Delta')$ sont deux couronnes contigües.

Démonstration. - Par transformation homographique, on peut se ramener au cas où

$$\Delta = \{x \in K ; r < |x| < 1\} \text{ et } \Delta' = \{x \in K ; 1 < |x| < R\},$$

et on peut supposer que le développement de Laurent de f dans Δ n'a pas de terme constant. Alors, au vu de la démonstration du lemme 3.2, on vérifie que le graphe de la fonction de valuation de f (en échelle logarithmique) a nécessairement l'une des formes suivantes :



(Les formes  et  étant exclues, car alors f ne serait pas injective.)

Dans les cas (1) et (2), la propriété annoncée est évidente.

Soit alors a le terme constant du développement de Laurent de f dans Δ' . Alors le graphe de la fonction de valuation de $f - a$ sera



et la propriété annoncée est encore évidente.

3.4. Structure d'un sommet. - Soit A un quasi connexe. Un sommet de l'arbre de A correspond à une partition de $\underline{P}(K)$. Par une transformation homographique, on se ramène à la partition canonique qui est isomorphe à $\underline{P}(\bar{K})$. Donc tout sommet est isomorphe à $\underline{P}(\bar{K})$ à une transformation homographique de $\underline{P}(\bar{K})$ près. C'est ce qu'on appelle la structure du sommet.

3.5. - Soit alors f un élément analytique strictement injectif sur A .

Soit S un sommet de l'arbre de A . Par transformation homographique, on peut supposer que S est la partition canonique de $\underline{P}(K)$. Alors la norme de Gauss, $|f|_{\text{gauss}}$ de f est bien définie. D'après le lemme 3.2, une couronne Δ (ou un disque) contenue dans A de rayon extérieur 1 (c'est-à-dire associée au sommet S) sera transformée en une couronne Δ' . Soit S' la partition associée au bord de Δ' , image du bord de Δ associé à S . D'après le lemme 3.3, l'image par f de deux couronnes contigües étant deux couronnes contigües, on voit que la partition S' ne dépend pas du choix de la couronne Δ mais seulement de f . Par transformation homographique, on peut se ramener au cas où S' est la partition canonique. Alors $|f|_{\text{gauss}} = 1$, on peut donc, par passage au quotient, définir $\bar{f} \in \bar{K}(x)$. Il résulte d'autre part de la démonstration du lemme 3.2 que $\bar{f}'(\bar{a}) \neq 0$ si $\bar{a} \in \bar{A}$, et du lemme 3.3 que $\bar{f}$ est injective sur $\bar{A}$, donc $\bar{f}$ est strictement injective sur $\bar{A}$. (En particulier, $\bar{f}$ n'est pas constante.) En résumé, nous avons montré le résultat suivant :

PROPOSITION. - Soit f un élément analytique strictement injectif sur le quasi connexe Λ . Soit S un sommet de l'arbre de Λ . Alors de façon canonique f associe à S une partition S' . Si, par transformations homographiques, on se ramène au cas où S et S' sont la partition canonique, on peut définir $\bar{f}_{SS'} \in \bar{K}(x)$ qui est strictement injective sur $\bar{\Lambda}_S$.

Ceci nous amène à donner la définition suivante :

Définition. - On dira que f conserve la structure du sommet S si la fraction rationnelle $\bar{f}_{SS'}$, ainsi définie est une transformation homographique.

(Notons que $\bar{f}_{SS'}$ n'est définie qu'à des transformations homographiques près.)

3.6. PROPOSITION. - Soit Λ un quasi connexe, et soit f un élément analytique sur Λ , alors $f(\Lambda)$ est un quasi connexe.

Démonstration. - On peut supposer (modulo des transformations homographiques) que $\infty \in \Lambda$ et $f(\infty) = \infty$. Soit $a' \in \Lambda'$ et soit $a \in \Lambda$ tel que $f(a) = a'$. Par translations, on peut se ramener au cas où $a = a' = 0$. Alors il existe $t_1, \dots, t_n$ tel que $\Lambda^C = \{x \in K; \exists i \in \{0, n\} \text{ tel que } |x| = t_i\}$, et par conséquent $\Lambda'^C = \{x \in K; \exists i \in \{0, n\} \text{ tel que } |x| = |f|(t_i)\}$. Ceci étant vrai pour tout $a' \in \Lambda'$ montre que Λ' est quasi connexe.

3.7. - Soit f un élément analytique strictement injectif sur le quasi connexe Λ . Nous nous proposons de décrire l'arbre du quasi connexe $f(\Lambda)$ à l'aide de l'arbre de Λ .

A un sommet S de l'arbre de Λ , c'est-à-dire à une partition de $\underline{P}(K)$, on a vu au § 3.5 que f fait correspondre une partition $S' = f(S)$ de $\underline{P}(K)$, deux sommets distincts donnant deux partitions distinctes. On a vu également qu'on pouvait définir une fonction $\bar{f}_{SS'}$, qui à une classe de la partition S associe une classe de la partition S' , $\bar{f}_{SS'}$ étant injective sur $\bar{\Lambda}_S$, c'est-à-dire les classes de la partition S qui ont une intersection non-vide avec Λ . Les arêtes marquées 1, issues du sommet S , correspondent à $\bar{\Lambda}_S^C$, c'est-à-dire aux classes de la partition S contenues dans Λ^C . Les classes de $S' = f(S)$ qui sont entièrement contenues dans $f(\Lambda)^C$ correspondent à $\bar{f}_{SS'}(\bar{\Lambda}_S)^C$. Comme $\bar{f}_{SS'}$ est une fraction rationnelle strictement injective sur $\bar{\Lambda}_S$, on voit que le nombre d'arêtes marquées 1 issues de $S' = f(S)$ est inférieur ou égal au nombre d'arêtes marquées 1 issues de S . Si f conserve la structure de S (c'est-à-dire $\bar{f}_{SS'}$ est une transformation homographique) alors les arêtes marquées 1 issues de S et les arêtes marquées 1 issues de S' sont mises en bijection. Observons que si $\text{card}(\bar{\Lambda}_S^C) = \text{card}(\text{arêtes marquées 1 issues de } S) < \text{card } \underline{P}(\bar{K})$, comme $\bar{f}_{SS'}$ est une fraction rationnelle strictement injective sur $\bar{\Lambda}_S$, on en déduit que $\bar{f}_{SS'}$ est une transformation homographique, donc conserve la structure du sommet S . On pourra utiliser cette remarque soit s'il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes marquées

1 issues de S , soit si $\underline{P(K)}$ n'est pas dénombrable, et il y a une famille au plus dénombrable d'arêtes marquées 1 issues de S (par exemple A quasi connexe régulier).

Comme par ailleurs f transforme des couronnes en des couronnes ayant même invariant, et des couronnes (et disques) contigües en couronnes (et disques) contigües, une arête de l'arbre de A , joignant les sommets S_1 et S_2 , qui correspond à une couronne (maximale) contenue dans A sera transformée par f en une arête, de même marquage, joignant les sommets $f(S_1)$ et $f(S_2)$, cette arête correspondant à une arête (non nécessairement maximale) de $f(A)$.

En résumé, f fait correspondre à l'arbre de A un nouvel arbre, identique à l'arbre de A sauf pour certaines arêtes marquées 1 qui peuvent disparaître. Cet arbre donne une description de $f(A)$, mais ce n'est pas l'arbre de $f(A)$, ou plus exactement ce n'est pas l'arbre réduit de $f(A)$. En effet, par suite de la disparition d'arêtes marquées 1, on peut se retrouver avec un sommet d'où sont issues seulement deux arêtes non marquées 1; ces deux arêtes correspondent à deux couronnes qui ne sont pas maximales dans $f(A)$ et que l'on peut recoller. Donc pour obtenir l'arbre (réduit) de $f(A)$, il faut supprimer tous les sommets d'où ne partent que deux arêtes non marquées 1, ces deux arêtes étant réunies en une seule arête marquée du produit des invariants des deux arêtes initiales.

Résumons les résultats établis ci-dessus :

3.7. THÉOREME. - Soit f un élément analytique strictement injectif sur le quasi connexe A . Alors

(a) f définit une transformation de l'arbre de A qui conserve les sommets et les arêtes non marquées 1. Par contre, certaines arêtes marquées 1 peuvent disparaître.

(b) Si f conserve la structure d'un sommet S de l'arbre de A , toutes les arêtes marquées 1 issues de ce sommet sont conservées.

(c) Si pour un sommet S , on a $\text{card}(\text{arêtes marquées 1 issues de } S) < \text{card } \underline{P(K)}$ alors f conserve la structure du sommet S .

(d) L'arbre de $f(A)$ est l'arbre réduit obtenue à partir de l'arbre de A transformé par f .

3.8. Exemple. - Nous allons donner un exemple illustrant la disparition des arêtes marquées 1.

Soit $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x - 1}$. On vérifie facilement que, pour tout $\bar{a} \in \underline{P(K)}$, il existe au moins une solution $\bar{x}(\bar{a}) \in \underline{P(K)}$ de l'équation $\bar{f}(\bar{x}) = \bar{a}$ qui ne soit pas racine multiple (par exemple pour $\bar{a} = \infty$ il faut prendre $\bar{x} = 1$ et non $\bar{x} = \infty$).

Soit A l'union des classes résiduelles ainsi définies $A = \bigcup_{\bar{a} \in \underline{P}(\bar{K})} \bar{x}(\bar{a})$. D'après le lemme de Hensel, f est strictement injective sur chaque classe résiduelle contenue dans A , et comme, par construction, $\bar{f}$ est strictement injective sur $\bar{A}$, il en résulte que f est strictement injective sur A . Mais comme $\bar{f}(\bar{A}) = \underline{P}(\bar{K})$, on a $f(A) = \underline{P}(K)$. Donc ici toutes les arêtes marquées 1 disparaissent.

3.9. THÉORÈME. - Soient A et A' deux quasi connexes, et soit f une bijection bi-analytique de A sur A' (c'est-à-dire que f est un élément analytique sur A et f^{-1} un élément analytique sur A'). Alors f met en correspondance les arbres de A et de A' et conserve la structure des sommets.

Démonstration. - Vu le théorème 3.7, tout ce qu'on a à faire est montrer que f conserve la structure des sommets. Ramenons-nous au cas où le sommet S de A et le sommet S' de A' mis en correspondance par f sont la partition canonique. Alors on a $\bar{f}$ et $\bar{f}^{-1} \in \bar{K}(x)$ telles que $\bar{f} \circ \bar{f}^{-1}(x) = x$, donc $\bar{f}$ est une transformation homographique de $\underline{P}(\bar{K})$.

3.10. THÉORÈME. - Soit A un quasi connexe ayant un arbre fini (c'est-à-dire que l'arbre n'a qu'un nombre fini de sommets). Soit f un élément analytique strictement injectif sur A . Supposons de plus que f conserve la structure des sommets de l'arbre de A . Alors f^{-1} est un élément analytique sur $f(A)$.

Remarquons que, sous ces hypothèses, A et $f(A)$ ont le même arbre.

Démonstration.

(A) Soit S un sommet de l'arbre de A , et S' le sommet de l'arbre de $f(A)$ qui lui correspond par f . On peut se ramener au cas où S et S' sont la partition canonique et $\infty \notin A$. On peut alors définir $\bar{f}$, et dire que f conserve la structure du sommet S équivaut à dire que $\bar{f}$ est une transformation homographique de $\underline{P}(K)$. Par transformation homographique de $\underline{P}(K)$, on peut donc se ramener au cas où $\bar{f}$ est l'identité.

Pour $0 < \epsilon < 1$, on définit Δ_ϵ par les propriétés suivantes :

(i) Δ_ϵ contient toutes les classes résiduelles contenues dans A .

(ii) Pour chaque classe résiduelle qui n'est pas contenue dans A , mais a une intersection non vide avec A , on fixe un représentant de cette classe, a par exemple, alors l'intersection de Δ_ϵ avec cette classe résiduelle est la couronne $\epsilon < |x - a| < 1$.

(Cas particulier : si la classe résiduelle considérée est la classe ∞ , on considère la couronne $1 < |x| < \frac{1}{\epsilon}$.)

(iii) Si A a une intersection vide avec une classe résiduelle, il en est de même pour Δ_ϵ .

Comme l'arbre de Λ est fini, le cas (ii) ne se produit qu'un nombre fini de fois. Par conséquent quand ϵ est suffisamment proche de 1, on a $\Delta_\epsilon \subset \Lambda$.

Comme $\bar{f}(x) = x$, on a $f(x) = x + g(x)$, $g \in H(\Lambda)$ et $|g|_{\text{gauss}} < 1$. Considérons une couronne de type (ii). Posons $\|g\|_{a, \epsilon} = \sup_{\epsilon < |x-a| < 1} |g(x)|$. Comme $\lim_{\epsilon \rightarrow 1} \|g\|_{a, \epsilon} = |g|_{\text{gauss}}$, on voit que, pour ϵ suffisamment proche de 1, on aura $\|g\|_{a, \epsilon} < \epsilon$, et donc, pour $\epsilon < |a - x| < 1$, on aura $|g(x)| < |a - x|$, donc $|f(x) - a| = |a - x|$.

Par ailleurs, dans une classe résiduelle D contenue dans Λ , on a

$$\sup_{x \in D} |g(x)| = |g|_{\text{gauss}}.$$

On peut donc choisir ϵ suffisamment proche de 1 de sorte que

$$\sup_{x \in \Delta_\epsilon} |g(x)| = \|g\|_{\Delta_\epsilon} < \epsilon < 1.$$

(On voit alors que f réalise une bijection de Δ_ϵ sur lui-même).

Inverser f c'est résoudre l'équation $f(x) = y$, qui s'écrit aussi $x = y - g(x)$.

Montrons que, pour $y \in \Delta_\epsilon$, l'application $x \mapsto \varphi_y(x) = y - g(x)$ est une contraction de Δ_ϵ .

(α) φ_y envoie Δ_ϵ dans lui-même. Si $x \in \Delta_\epsilon$, on a $|g(x)| < \epsilon$, et comme $d(\Delta_\epsilon, \Delta_\epsilon^c) = \epsilon$, $y - g(x) \in \Delta_\epsilon$.

(β) φ_y est une contraction. Posons $\lambda = \frac{\|g\|_{\Delta_\epsilon}}{\epsilon} < 1$. Soient $u, v \in \Delta_\epsilon$. On a $\varphi_y(u) - \varphi_y(v) = g(v) - g(u)$.

Si $|v - u| \geq \epsilon$, on a $|g(v) - g(u)| \leq \lambda \epsilon \leq \lambda |v - u|$.

Observons que $h(v) = \frac{g(v) - g(u)}{v - u}$ est analytique dans $D(u, \epsilon^-) \cup \{\epsilon < |v - u| < 1\}$. D'après ce qu'on vient de voir $|h|_u(t) \leq \lambda$ pour $\epsilon < t < 1$, on a donc $|h|_u(\epsilon) \leq \lambda$, et par conséquent $\sup_{|v-u| < \epsilon} |h(v)| = |h|_u(\epsilon) \leq \lambda$. Ceci termine la démonstration du fait que φ_y est une contraction.

On sait alors que si l'on pose

$$x_0(y) = y \quad \text{et} \quad x_n(y) = y - g(x_{n-1}(y)) \quad \text{pour } n \geq 1,$$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(y) = f^{-1}(y)$. On sait de plus que l'on a

$$|f^{-1}(y) - x_n(y)| \leq \lambda^n |f^{-1}(y) - y|,$$

et donc

$$\sup_{y \in \Delta_\epsilon} |f^{-1}(y) - x_n(y)| \leq \lambda^n \frac{1}{\epsilon}.$$

Par conséquent $f^{-1}(y)$ est la limite uniforme sur Δ_ϵ des fonctions $x_n(y)$ qui

sont des éléments analytiques sur Δ_ϵ donc $f^{-1}(y)$ est aussi un élément analytique sur Δ_ϵ .

En résumé, pour tout sommet S de l'arbre de Λ , il existe un "voisinage" Δ_ϵ de ce sommet tel que f^{-1} soit un élément analytique sur $f(\Delta_\epsilon)$.

(B) Considérons une arête de l'arbre de Λ . Elle correspond à une couronne maximale Δ de Λ . Par transformation homographique, on peut se ramener au cas où Δ est la couronne $r < |x| < 1$ et où, dans le développement en série de Laurent de f sur Δ , le terme x soit dominant et son coefficient 1. On aura donc $f(x) = x + g(x)$ avec $|g(x)| < |x|$ pour tout $x \in \Delta$.

L'argument de (A) montre que l'on a encore $|g|(1) < 1$, et si $r \in |K^*|$ (donc correspond à un sommet), on a (toujours grâce à (A)) $|g|(r) < r$. Si $r \notin |K^*|$ on a encore l'inégalité car l'égalité ne peut se produire que pour une valeur de $|K^*|$.

Finalement on a $\sup_{r < t < 1} \frac{|g|(t)}{t} = \lambda < 1$, et donc $\sup_{x \in \Delta} \frac{|g(x)|}{|x|} = \lambda < 1$.

On montre alors, comme dans (A), que $f^{-1}(y)$ est un élément analytique sur Δ .

En effet, pour tout y , $\varphi_y(x) = y - g(x)$ envoie Δ dans lui-même, et pour tout u et v de Δ , on a, si $|u - v| = \max(|u|, |v|)$,

$$|g(u) - g(v)| \leq \max(|g(u)|, |g(v)|) \leq \lambda \max(|u|, |v|) = \lambda |u - v|.$$

Maintenant si $|u - v| < |u| = |v|$, $h(v) = \frac{g(v) - g(u)}{v - u}$ est analytique dans $D(u, |u|)$ et d'après ce qu'on vient de voir $|h|_u(|u|) = |h|(|u|) \leq \lambda$, donc $\sup_{|v-u| \leq |u|} |h(v)| \leq \lambda$, ce qui termine la démonstration du fait que φ_y est une contraction.

On termine alors la démonstration comme dans (A).

(C) On a montré que, pour chaque couronne correspondant à une arête de l'arbre de $f(\Lambda)$, f^{-1} est un élément analytique sur cette couronne. Par ailleurs, pour chaque sommet S' de l'arbre de $f(\Lambda)$, on a défini un ensemble $\Delta_{S'}$ sur lequel f^{-1} est un élément analytique. Il est clair que la réunion des $\Delta_{S'}$ et des couronnes maximales de $f(\Lambda)$ est un recouvrement enchaîné fini de $f(\Lambda)$. On en déduit alors ([5], théorème 8.3) que f^{-1} est un élément analytique sur $f(\Lambda)$.

3.11. COROLLAIRE. - Si Λ est un quasi connexe n'ayant qu'un nombre fini de trous ouverts (c'est-à-dire Λ est le complémentaire dans $P(K)$ d'une union finie de disques ouverts), et si f est un élément analytique strictement injectif sur Λ , alors f^{-1} est un élément analytique sur $f(\Lambda)$.

En effet, d'après le théorème 3.7 (c), f conserve la structure des sommets de l'arbre de Λ .

3.12. COROLLAIRE. - Soit f un élément analytique strictement injectif sur le quasi connexe A . Supposons que f préserve la structure des sommets de l'arbre de A . Alors f^{-1} est une fonction analytique sur $f(A)$, dont la restriction à tout quasi connexe B , d'arbre fini, contenu dans A , est un élément analytique.

4. Quasi connexes conformément équivalents.

4.1. - Soient A et A' deux quasi connexes. On cherche à quelles conditions il existe une bijection f bi-analytique de A sur A' .

D'après le § 3, il faut d'abord que A et A' aient le même arbre. Il faut de plus que, à chaque sommet de l'arbre, la position respective des arêtes issues de ce sommet soit la même pour A et A' (c'est ce qu'on a appelé conserver la structure du sommet).

On va voir qu'une propriété supplémentaire doit être vérifiée. On peut l'exprimer de façon imagée de la manière suivante : soient S_1 et S_2 deux sommets voisins de l'arbre de A (c'est-à-dire reliés par une arête), alors sous l'action de f le sommet S_2 ne tourne pas par rapport au sommet S_1 ; ou encore une bijection bi-analytique conserve les angles (c'est une transformation conforme).

Cette propriété, bien qu'elle soit une conséquence immédiate des résultats établis précédemment, m'avait échappé et a été mise en évidence par GERITZEN - van der PUT dans les paragraphes IV.1.8 et suivants de [1]. (La terminologie leur est empruntée).

Il est plus facile d'expliquer d'où vient cette propriété que de la formuler mathématiquement. Considérons la couronne correspondant à l'arête reliant S_1 et S_2 . Par transformation homographique, on peut se ramener au cas où S_1 est la partition canonique, et la couronne considérée est $\{x \in K ; 1 < |x| < r^{-1}\}$, où r est l'invariant de la couronne. On peut également, par transformation homographique, se ramener au cas où le développement en série de Laurent de f dans la couronne est $x + \sum_{n \neq 1} a_n x^n$, le terme x étant dominant dans la couronne. Alors f laisse invariants S_1 et S_2 . Précisément $\bar{f}$ est l'identité sur S_1 . Si $\rho \in K$, $|\rho| = r$, l'homothétie $H_\rho : x \rightarrow \rho x$ transforme S_2 en la partition canonique et $\bar{f} \circ H_\rho$ sera également l'application identique.

Le reste de ce paragraphe peut être considéré comme "abstract nonsense".

4.2. - Soit S une partition. S est isomorphe à $\underline{P}(\bar{K})$, à une transformation homographique de $\underline{P}(\bar{K})$ près. Pour fixer l'isomorphisme, il faut fixer la position de trois classes de la partition S , donc choisir un repère.

Soient alors deux partitions distinctes S et S' . L'une des classes de la partition S "contient" la partition S' (c'est-à-dire contient toutes les classes de S' sauf une). Soit C_1 cette classe. Choisissons deux autres classes C_2 et C_3 de S . De même soit C'_1 la classe de S' qui "contient" S , et soient C'_2 et

C'_3 deux autres classes de S' . (Dans le cas où S et S' sont deux sommets voisins de l'arbre d'un quasi connexe, $C_1 \cap C'_1$ est la couronne correspondant à l'arête joignant S et S' .) Par transformation homographique, on peut se ramener au cas où S est la partition canonique, C_2 est la classe 0 (donc $0 \in C'_1$) et $\infty \in C'_2$ (donc C_1 est la classe ∞). L'isomorphisme de S avec $\underline{P}(\bar{K})$ est alors défini à une rotation près (c'est-à-dire à une multiplication par un élément de $\bar{K}^*$ près). Considérons une homothétie $H_\rho : x \rightarrow \rho x$ qui amène S' sur S et C'_3 sur C_3 . Alors, nécessairement, $|\rho|$ est l'invariant de la couronne $C_1 \cap C'_1$, et ρ est uniquement défini à la multiplication par un élément α près, avec $|\alpha-1| < 1$. Cette classe d'équivalence sera ce qu'on appellera le rapport de similitude de S' et de S (correspondant aux repères $\{(C'_2, C'_3), (C_2, C_3)\}$ choisis). On vérifie sans peine que, pour le même choix de repères, le rapport de similitude de S' et de S est le même que celui de S et de S' . (Bien entendu $|\rho|$ ne dépend pas du choix des repères.) Avec cette définition, la propriété démontrée en 4.1 s'énonce :

PROPOSITION. - Soit f une bijection bi-analytique du quasi connexe A sur le quasi connexe A' . Soient S_1 et S_2 deux sommets voisins de l'arbre de A , et soient S'_1 et S'_2 les sommets correspondants de l'arbre de A' . Choisissons des repères sur S_1 et S_2 et prenons pour S'_1 et S'_2 les repères correspondants. Alors le rapport de similitude de S'_1 et S'_2 est égal au rapport de similitude de S_1 et S_2 .

4.3. - Dans ce dernier paragraphe, nous allons faire quelques analogies avec le cas complexe, et essayer d'introduire une notion d'angle.

Si $a \in \mathbb{C}^*$, l'application $Z \rightarrow aZ$ est une similitude. Si $a = \rho e^{i\theta}$, avec $\rho, \theta \in \mathbb{R}$, cette similitude se décompose en une homothétie $Z \rightarrow \rho Z$ et une rotation $Z \rightarrow e^{i\theta} Z$.

Dans le cas d'un corps valué ultramétrique K , pour $a \in K^*$ l'application $x \rightarrow ax$ devrait donc être appelée une similitude et non une homothétie comme c'est la tradition. Malheureusement, comme le groupe de valeurs $|K^*|$ n'est pas un sous-groupe de K^* , on n'a pas une décomposition canonique de a sous la forme $a = \rho\alpha$ avec $\rho \in |K^*|$ et $|\alpha| = 1$. On peut obtenir cette décomposition en plongeant une fois pour toutes (de façon non canonique) $|K^*|$ dans K^* . Dans le cas où $K = \mathbb{C}_p$, il y a un plongement privilégié en prenant pour image de $|K^*|$ le sous-groupe $\{p^s; s \in \mathbb{Q}\}$.

Alors le rapport de similitude de S' et S , défini au § 4.2, est caractérisé pour le couple formé de son module (qui est l'invariant de la couronne définie par S et S') et un élément de $\bar{K}^*$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GERRITZEN (L.) and van der PUT (M.). - Schottky groups and Mumford curves. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1980 (Lecture Notes in Mathematics, 817).
 - [2] KRASNER (M.). - Prolongement analytique uniforme et multiforme dans les corps valués complets, Colloques internationaux du CNRS, 143 : Les tendances géométriques en algèbre et théorie des nombres [1964, Clermond Ferrand], p. 97-141. - Paris, CNRS, 1966.
 - [3] MOTZKIN (E.). - p -adic domains of analyticity, Thèse, Univ. Calif. Los Angeles, 1968.
 - [4] MOTZKIN (E.). - Un invariant conforme p -adique, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 269, 1969, p. 507-509.
 - [5] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués ultramétriques complets, "Prolongement analytique et algèbres de Banach ultramétriques", Astérisque n° 10, 1973, p. 109-220.
-