GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

MARIE-CLAUDE SARMANT-DURIX

Rapports de produits croulants

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 9, nº 1 (1981-1982), exp. nº 2, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1981-1982__9_1_A2_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
9e année, 1981/82, n° 2, 7 p.
26 octobre 1981

RAPPORTS DE PRODUITS CROULANTS

par Marie-Claude SARMANT-DURIX (*)
[Université Pierre et Marie Curie]

Nous allons démontrer que des fonctions assez générales apparaîssent comme des rapports de produits croulants. Nous nous plaçons toujours dans un corps k ultramétriquement valué, complet, maximalement complet, et la valeur absolue p-adique associée à k est notée $|.|$. Les autres notations sont celles utilisées dans [1].

THÉORÈME. - Soit f une série de Taylor de rayon de convergence 1^- , admettant une suite infinie de zéros dans son disque de convergence $D = D(0 , 1^-)$. Alors, pour tout $\Lambda \in \mathbf{k}$, il existe un couple (Π_1 , Π_2) de produits croulants de D tels que :

$$f = \Lambda\left(\frac{\Pi_1 - 1}{\Pi_2 - 1}\right) .$$

Démonstration.

1. D'après les propriétés classiques des zéros des séries de Taylor, nous savons que la suite des valeurs absolues des zéros de f converge vers 1 . Nous pouvons donc, sans perte de généralité, indexer ces zéros en les appelant $b_{n,i}$ tels que

$$|b_{n,i}| = |b_{n,j}| < |b_{n+1,h}|$$

$(\forall\ i , j$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant u_n , \ \forall\ h = 1 \dots u_{n+1})$.

Nous aurons donc u_n zéros sur la circonférence de centre 0, de rayon $d_n = |b_{n,i}|$, i varie de 1 à u_n pour chaque n . Nous appellerons $q_{n,i}$ l'ordre du zéro $b_{n,i}$.

Pour faire apparaître f sous la forme annoncée, nous allons construire une série de Taylor g telle que dans le domaine $\Delta\rho$ obtenu en retirant à D les disques de diamètre ρ centrés en l'un quelconque des zéros de fg , la fonction g vérifie

$$\lim_{|x|\to 1, x\in\Delta\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{|x|\to 1, x\in\Delta\rho} \frac{1}{f(x)\ g(x)} = 0 .$$

(*) Texte reçu le 9 juillet 1982.
Marie-Claude SARMANT-DURIX, 16 boulevard Jourdan, 75014 PARIS.

En effet [3], ceci suffit pour établir que $1/g \in H(\Delta\rho)$ ainsi que $1/fg$, et que $\Delta\rho$ admet un T-filtre croissant, de diamètre 1, qui annule $1/g$ et $1/fg$, donc que quels que soient A et $B \in K$, il existe des produits croulants Π_1 et Π_2 tels que

$$\frac{1}{g} = A(1 - \Pi_1) \quad \text{et} \quad \frac{1}{fg} = B(1 - \Pi_2) ,$$

donc

$$f = \frac{(1/g)}{(1/fg)} = \frac{A}{B}\left(\frac{1 - \Pi_1}{1 - \Pi_2}\right)$$

ce qui est le résultat demandé.

Nous allons construire une suite $(\beta_{n,\ell})$, $1 \leqslant \ell \leqslant u_n$, $n \in \underset{\sim}{N}$, d'éléments de D telle que, en posant $|\beta_{n,v_n}| = \delta_n$:

(1) $$|b_{n,1}| < |\beta_{n,1}| < |\beta_{n,2}| < \dots < |\beta_{n,v_n}| < |b_{n+1}, 1|$$

(2) $$n \leqslant (-\log d_{n+1})\ v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1}) , \quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N}$$

(3) $$\frac{q_n + \log \varphi_n}{v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})} \leqslant \frac{1}{n} , \quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N} .$$

(On a posé $\varphi_n = \sup_{1 \leqslant i \leqslant u_n} \prod_{i \neq j, 1 \leqslant j \leqslant u_n} (d_n/|b_{n,i} - b_{n,j}|)^{q_{n,j}}$).

En effet, on vérifie aisément qu'il n'y a aucune difficulté logique à construire une telle suite ; il suffit de choisir, à chaque rang n, les entiers v_n assez grands.

Notons $P_{n,\ell}(x) = (x - \beta_{n,\ell})/\beta_{n,\ell}$, $1 \leqslant \ell \leqslant v_n$, $n \in \underset{\sim}{N}$.

Maintenant, grâce au théorème 1 de [2], il existe une série de Taylor g, convergeant dans le disque D, telle que :

$$g(\beta_{n,\ell}) = 0 , \quad \forall\ \ell = 1 , \dots , v_n , \quad \forall\ n \in \underset{\sim}{N}$$

et

(4) $$-1 \leqslant v(g , \mu) - \sum_{n \in \underset{\sim}{N}} \left(\sum_{\ell=1}^{v_n} v(P_{n,\ell} ; \mu)\right) \leqslant 0 , \quad \forall\ \mu > 0$$

Soit E l'ensemble des zéros de fg, et soit $\Delta\rho = D \setminus \bigcup_{\alpha \in E} d^{-}(\alpha , \rho)$.

2. Nous allons établir d'abord

$$\lim_{|x|\to 1, x\in\Delta\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 .$$

Prenons x tel que $|x| = r \in [d_n , d_{n+1}[$.

Considérons $|1/g(x)|$ dans une classe $\Gamma = D(\alpha , r^-)$.

(a) Si $g(x)$ n'a pas de zéro dans cette classe, alors

$$v(\frac{1}{g(x)}) = v(\frac{1}{g} , - \log r) .$$

(b) Si $g(x)$ a un zéro dans cette classe, il en a au plus un ; soit q l'ordre de ce zéro β . On peut alors poser :

$$g(x) = G(x)(1 - \frac{x}{\beta})^q .$$

Alors

$$v(\frac{1}{g(x)}) = v(G(x)) + q[v(\beta) - v(x - \beta)]$$

$$= v[\frac{1}{g(x)} , - \log r] + q[- \log r - v(x - \beta)] .$$

Comme $x \in \Gamma \cap \Delta\rho$,

$$\rho \leq |x - \beta| \leq r \text{ entraîne } - \log r \leq v(x - \beta) \leq - \log \rho .$$

D'où, dans tous les cas, que $g(x)$ ait ou non un zéro dans la classe Γ :

$$q(\log \rho - \log r) \leq v[\frac{1}{g(x)}] - v[\frac{1}{g(x)} , - \log r] \leq 0 . \tag{5}$$

D'autre part, d'après les propriétés de la fonction g , cette fonction ayant dans Γ un zéro d'ordre q au plus, nous pouvons écrire, $\forall \mu < - \log r$:

$$- 1 \leq v(g , \mu) - \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^{v_n} v(P_{n,\ell} , \mu) \leq v(\frac{x - \beta}{\beta})^{q-1} .$$

D'où, comme $v(x - \beta) = v(x) = \mu$ et $v(\beta) = - \log r$:

$$- 1 \leq (q - 1)(\log r + \mu) .$$

En faisant tendre μ vers 0 , on en déduit $- 1 \leq (q - 1) \log r$, et finalement

$$(q - 1)(- \log d_{n+1}) \leq 1 . \tag{6}$$

Alors les relations (5) et (6) nous donnent

$$0 \leqslant v[\frac{1}{g}, -\log r] - v[\frac{1}{g}] \leqslant (\log r - \log \rho)(1 + \frac{1}{-\log d_{n+1}})$$

D'où la relation :

(7) $$0 \leqslant v[\frac{1}{g}, -\log r] - v[\frac{1}{g}] \leqslant -\log \rho(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}) .$$

Essayons maintenant de borner inférieurement $v(1/g)$, pour $d_n \leqslant |x| < d_{n+1}$,

$$v(\frac{1}{g(x)}) = v(\frac{1}{g(x)}) - v[\frac{1}{g(x)}, -\log r] + v[\frac{1}{g(x)}, -\log r]$$

(8) $$v(\frac{1}{g(x)}) \geqslant v[\frac{1}{g(x)}, v(x)] + \log \rho(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}) .$$

D'après (4), nous pouvons borner inférieurement $v[(1/g(x)), v(x)]$ en utilisant les $v(P_{n,\ell}, v(x))$, c'est-à-dire $v(x)$ et $|\beta_{m,\ell}|$, d'où

(9) $$v[\frac{1}{g(x)}, v(x)] \geqslant \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{\ell=1}^{v_j} \log d_n - \log|\beta_{j,\ell}| \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})$$

ou encore

(10) $$v[\frac{1}{g(x)}] \geqslant \log \rho(1 - \frac{1}{\log d_{n+1}}) + v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})$$

$$v[\frac{1}{g(x)}] \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})(1 + \frac{\log \rho(1 - (1/\log d_{n+1}))}{v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})})$$

ce qui permet, en utilisant la relation (2), d'en déduire que

$$\lim_{|x|\to 1, x \in \Delta\rho} \frac{1}{g(x)} = 0 .$$

3. Nous allons maintenant montrer, de façon tout à fait analogue, que

$$\lim_{|x|\to 1, x \in \Delta\rho} \frac{1}{f(x)\, g(x)} = 0 .$$

Supposons encore que $d_n \leqslant |x| < d_{n+1}$. Considérons

$$v[\frac{1}{f(x)\, g(x)}] - v[\frac{1}{fg}, v(x)] = v(\frac{1}{f(x)}) - v(\frac{1}{f}, v(x)) + v(\frac{1}{g(x)}) - v(\frac{1}{g}, v(x)) .$$

Or

$$v(\frac{1}{f(x)}) - v(\frac{1}{f}, v(x)) \geqslant -\log \varphi_n - q_n(\log d_n - \log \rho) \geqslant -\log \varphi_n + q_n \log \rho$$

lorsque $d_n \leqslant |x| < d_{n+1}$ et donc, grâce à (7), on a

(11) $v(\frac{1}{f(x)\ g(x)}) - v(\frac{1}{fg}\ ,\ v(x)) \geqslant -\frac{\log \varphi}{\log d_{n+1}}(\log d_{n+1} - 1) - \log \varphi_n + q_n \log \rho$.

Considérons $v((1/fg)\ ,\ v(x))$. On a évidemment $v((1/f)\ ,\ v(x)) \geqslant c$ (c constante réelle).

(12) $$v(\frac{1}{g}\ ,\ v(x)) \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1}) .$$

D'où finalement,

(13) $$v(\frac{1}{fg}\ ,\ v(x)) \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1}) + c .$$

Et, grâce à (11) et (13),

$$v(\frac{1}{f(x)\ g(x)}) \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1}) - \frac{\log \varphi}{\log d_{n+1}}(\log d_{n+1} - 1) - \log \varphi_n + q_n \log \rho + c$$

ou encore

$$v(\frac{1}{f(x)\ g(x)}) \geqslant v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})(1 - \sigma_n) + c ,$$

où

$$\sigma_n = \frac{(\log \rho/\log d_{n+1})(\log d_{n+1} - 1) + \log \varphi_n - q_n \log \rho}{v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})}$$

D'après (2),

$$\frac{\log \rho\ (1 - \log d_{n+1})}{(-\log d_{n+1})\ v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})}$$ tend vers 0 si n devient infini.

D'après (3),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q_n + \log \varphi_n}{v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})} = 0 .$$

On a donc aussi, $\forall\ \rho \in]0\ ,\ 1[$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log \varphi_n + q_n \log(1/\rho)}{v_{n-1}(\log d_n - \log \delta_{n-1})} = 0 .$$

D'où $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, ce qui achève de montrer que

$$\lim_{|x| \to 1, x \in \Delta\rho} \frac{1}{f(x)\ g(x)} = 0 .$$

4. Nous allons maintenant pouvoir conclure. Soit $\Lambda \in k$; montrons que $f = fg/g$ peut se mettre sous la fomre $\Lambda((\Pi_1 - 1)/(\Pi_2 - 1))$.

Considérons la suite $(\gamma_{m,j})$, $1 \leqslant j \leqslant t_m$, $m \in \underset{\sim}{N}$, des zéros de g , coordonnés de façon telle que

$$|\gamma_{m,i}| = |\gamma_{m,j}| < |\gamma_{m+1,h}| ,$$

d'ordre respectif $\tau_{m,j}$, et notons de même $(\theta_{m,j})$, $1 \leqslant j \leqslant W_m$, $m \in \underset{\sim}{N}$, les zéros de fg , d'ordre respectif $\gamma_{m,j}$.

Maintenant, soient A et $B \in k$; d'après [3] , nous savons qu'il existe une famille $(a_{m,j,h}(A))$ avec $1 \leqslant h \leqslant \tau_{m,j}$, $1 \leqslant j \leqslant t_m$, $m \in \underset{\sim}{N}$, telle que :

$$1 - \frac{A}{g(x)} = \prod_{m \in \underset{\sim}{N}} (\prod_{j=1}^{t_m} (\prod_{h=1}^{\tau_{m,j}} \frac{x - a_{m,j,h}}{x - \gamma_{m,j}})) ,$$

d'où

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{A}(1 - \Pi_1(x)) .$$

De même, on peut mettre $1/fg$ sous la forme :

$$\frac{1}{f(x)\ g(x)} = \frac{1}{B}(1 - \Pi_2(x)) .$$

D'où finalement

$$f(x) = \frac{B}{A}(\frac{1 - \Pi_1(x)}{1 - \Pi_2(x)}) ,$$

où Π_1 et Π_2 sont les produits croulants annoncés.

Remarque. - Nous n'avons pas utilisé ici la condition restrictive

$$\inf|b_{n,i} - b_{n,j}| \geqslant 0 .$$

En effet, il apparaît que les théorèmes s'appliquent aussi au cas où chaque disque $D(b_{n,i} ; \rho)$ contient un nombre fini de pôles $b_{n,i}$, ce qui est le cas ici (on peut se ramener au cas des pôles multiples).

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (A.). - T-filtres, ensembles analytiques et transformations de Fourier p-adiques, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 25, fasc. 2, 1975, p. 45-80.

[2] FRESNEL (J.) et de MATHAN (B.). - L'image de la transformation de Fourier p-adique, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 278, série A, 1974, p. 653-656.

[3] SARMANT-DURIX (M.-C.). - Existence de fonctions croulantes, groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 5e année, 1977/78, n° 17, 10 P.
