Groupe de travail d'analyse ultramétrique

Yvette Amice

Fonction Γ p-adique associée à un caractère de Dirichlet

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 7-8 (1979-1981), exp. nº 17, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1979-1981__7-8__A9_0>

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1979-1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, G. CHRISTOL, P. ROBBA)
7e année, 1979/80, n° 17, 11 p.

9 juin 1980

FONCTION Γ p-ADIQUE ASSOCIÉE À UN CARACTÈRE DE DIRICHLET

par Yvette AMICE (*)
[Université Paris-7]

Introduction.

En 1975, Y. MORITA [10] construit une "fonction Γ p-adique" de la façon suivante. Soit p un nombre premier impair, $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques et Γ_p la fonction définie sur les entiers positifs par

$$\Gamma_p(1+n) = (-1)^{n+1} \prod_{1\leq j\leq n,\,(j,p)=1} j \,. \tag{1}$$

Cette fonction admet un (unique) prolongement continu à $\mathbb{Z}_p$, encore noté Γ_p, satisfaisant

$$\Gamma_p(1+x) = \begin{cases} -x\,\Gamma_p(x) & \text{si } x \notin p\,\mathbb{Z}_p \\ -\Gamma_p(x) & \text{si } x \in p\,\mathbb{Z}_p \,, \end{cases} \tag{2}$$

et

$$\Gamma_p(x)\,\Gamma_p(1-x) = (-1)^{a(x)} \,, \text{ pour } x \in \mathbb{Z}_p \,,$$

où $a(x)$ est l'unique entier tel que $x \equiv a(x) \mod p$ et $1 \leq a(x) \leq p$.

En 1977, J. DIAMOND [5] donne une définition différente d'une fonction "$\log \Gamma_p$". Plus précisément il montre que, pour $x \in \mathbb{C}_p$ (voir notations ci-dessous) et $|x| < 1$, la limite

$$G^*(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{p^k} \sum_{n=0}^{p^k-1} f(x+n)\right) ,$$

où $f(x) = x \log x - x$, existe et définit une fonction analytique pour $|x| < 1$, coïncidant avec $\log \Gamma_p(x)$ sur $p\,\mathbb{Z}_p$.

En 1979, B. H. GROSS et N. KOBLITZ [7] montrent que certaines sommes de Gauss s'expriment comme produit de valeurs de Γ_p en des points rationnels et en déduisent que $\Gamma_p(\frac{r}{N})$ est algébrique pour $r \in \mathbb{Z}$ et $N \mid p-1$. Ils obtiennent aussi une formule de multiplication pour des valeurs en certains rationnels.

(*) Texte reçu le 15 juillet 1981.

Mme Yvette AMICE, UER Mathématiques, Université Paris-7, 2 place Jussieu, 75251 PARIS CEDEX 05.

En 1980, M. BOYARSKI [4] obtient une formule d'interpolation pour $\Gamma_p(px)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, dans laquelle les coefficients de la série d'interpolation sur les entiers proviennent de ceux de la série de Taylor à l'origine de $E(x) = \exp(x + \frac{x^p}{p})$, puis D. BARSKY [3] prouve une formule globale (sur $\mathbb{Z}_p$) d'interpolation de Γ_p sur les entiers, où les coefficients sont ceux de $E(x)$. L'un et l'autre démontrent une "formule de multiplication" pour Γ_p, prouvent que Γ_p est localement analytique, et déterminent son rayon d'analyticité.

D'autre part, J. DIAMOND [6] et N. KOBLITZ ([8] et [9]) déterminent la série de Taylor à l'origine de

$$\log \Gamma_p(t) = \sum_{s \geq 1} a_s \, t^s$$

où $a_s = \frac{(-1)^s}{s} L_p(s, \omega^{1-s})$ pour $s \geq 2$ et a_1 est une constante d'Euler p-adique (cf. § 2).

Nous construisons ici une fonction Γ_χ p-adique "tordue" par un caractère de Dirichlet χ : lorsque $\chi = 1_p$ est le caractère unité modulo p, on retrouve, à un facteur localement constant près, la fonction Γ_p de Morita. On montre, au § 2 que la série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$ a des coefficients $\frac{(-1)^s}{s} L_p(s, \chi\omega^{1-s})$, ce qui généralise les résultats de [6], [8] et [9]. On démontre, au § 3, une formule de multiplication généralisant celles de [7], [4] et [3], sans toutefois en déduire de résultats d'algébricité de valeurs $\Gamma_\chi(\frac{r}{N})$. Enfin, au § 4, on étudie les propriétés d'analyticité de $\Gamma_\chi(x)$ par rapport à x mais aussi par rapport à χ, après une extension convenable de la définition de Γ_χ lorsque χ est un caractère continu du groupe multiplicatif d'un anneau $\mathbb{Z}(m) = \varprojlim_h (\mathbb{Z}/mp^h\mathbb{Z})$.

Notations.

- p est un nombre premier impair

- $\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Q}_p$) l'anneau des entiers (le corps des nombres) p-adiques, munis de la valuation p-adique v_p et de la valeur absolue normalisées par $v_p(p) = 1$ et $|p| = \frac{1}{p}$.

- $\mathbb{C}_p$ est le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$, muni des valuation et valeur absolue prolongeant celles de $\mathbb{Q}_p$; $\mathcal{O}_p$ est son anneau de valuation.

- si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur $f(\chi) = f = m\,p^e$, $(m, p) = 1$, $K_\chi = K = \mathbb{Q}_p(\chi)$, et $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers de K.

- ω est le caractère de Teichmuller sur $\mathbb{Z}_p$: $\omega(n) = \lim_{h\to\infty} n^{p^h}$, et pour $n \in \mathbb{Z}_p$, $\langle n \rangle = n\,\omega^{-1}(n)$.

- pour $a \in \mathbb{C}_p$, $r > 0$,

$$B(a\ ,\ r) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |x - a| < r\} \quad \text{et} \quad B(a\ ,\ r^+) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p\ ;\ \ |x - a| \leqslant r\}\ .$$

- à un caractère de Dirichlet χ de conducteur f, on associe les polynômes de Bernoulli $B_{n,\chi}(x)$ et les nombres de Bernoulli $B_{n,\chi}$ satisfaisant

$$\sum_{a=1}^{f} \frac{\chi(a)\ t\ e^{(a+x)t}}{e^{ft} - 1} = \sum_{n\geqslant 0} B_{n,\chi}(x)\ \frac{t^n}{n!} \quad \text{et} \quad B_{n,\chi}(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\ B_{i,\chi}\ x^i\ .$$

- si m est un entier, $m \geqslant 1$, $(m\ ,\ p) = 1$, on note $Z(m) = \lim_{\leftarrow h} \left(\frac{\underset{\sim}{Z}}{mp^h\ \underset{\sim}{Z}}\right)$, alors $\underset{\sim}{Z}(m) = (\underset{\sim}{Z}/m\ \underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$. On note $X(m)$ le groupe des unités de l'anneau $\underset{\sim}{Z}(m)$ $\underset{\sim}{Z}(m)$: $X(m) = (\underset{\sim}{Z}/m\ \underset{\sim}{Z})^* \times \underset{\sim}{Z}_p^*$

1. Construction de Γ_χ.

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $f = m\ p^e$, $(m\ ,\ p) = 1$. On supposera $e \geqslant 1$, i. e. $p|f$. L'anneau $\underset{\sim}{Z}$ s'injecte de façon naturelle (dense) dans $\underset{\sim}{Z}(m) = \lim_{\leftarrow h} (\underset{\sim}{Z}/m\ p^h\ \underset{\sim}{Z}) = (\underset{\sim}{Z}/m\ \underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$, et on notera $n \longrightarrow (\alpha_m(n)\ ,\ n)$ cette injection, où $\alpha_m(n) \in \underset{\sim}{Z}/m\ \underset{\sim}{Z}$, et $n \in \underset{\sim}{Z}_p$ est identifié à n quand cela ne crée pas de confusion. On confond χ et son prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}(m)$, qui est localement constant, nul sur $\underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$, et dont la restriction à $X(m)$ est un caractère continu de $X(m)$ dans $K = \underset{\sim}{Q}_p(\chi)$.

Soit ω le caractère de Teichmuller de $\underset{\sim}{Z}_p$: il se prolonge continûment en $\omega(z) = \omega(x)$ si $z = (\alpha\ ,\ x) \in (\underset{\sim}{Z}/m\ \underset{\sim}{Z}) \times \underset{\sim}{Z}_p$. <u>On convient que</u> le caractère continu $\langle\ \rangle$ défini sur $\underset{\sim}{Z}_p^*$ par $\langle x\rangle = x.\omega^{-1}(x)$ est prolongé à $\underset{\sim}{Z}(m)$ par $\langle z\rangle = \langle x\rangle$ si $z = (\alpha\ ,\ x) \in X(m)$ et $\langle z\rangle = 1$ si $z \in \underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$.

THÉORÈME 1. DÉFINITION. - <u>Soit</u> χ <u>un caractère de Dirichlet</u> modulo $f = m\ p^e$, $(m\ ,\ p) = 1$ <u>et</u> $e \geqslant 1$, <u>il existe une unique fonction continue</u> Γ_χ <u>sur</u> $\underset{\sim}{Z}(m) = \lim_{\leftarrow h} (\underset{\sim}{Z}/m\ p^h\ \underset{\sim}{Z})$ <u>telle que</u> $\Gamma_\chi(1) = 1$ <u>et, pour</u> n <u>entier</u>, $n \geqslant 1$;

$$\Gamma_\chi(1 + n) = \langle n\rangle^{\chi(n)}\ \Gamma_\chi(n)\ . \tag{3}$$

<u>Remarque</u> 1 : Soit $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$, alors $\langle z\rangle \equiv 1 \mod p$ et $\log_p\langle z\rangle \in p\ \underset{\sim}{Z}_p$; donc $\exp(\alpha\ \log_p\langle z\rangle) = \langle z\rangle^\alpha$ est analytique pour $\alpha \in \underset{\sim}{C}_p$ et $v_p(\alpha) > \frac{1}{p-1} - 1$. En particulier, comme $v_p(\chi(z)) \geqslant 0$, $\langle z\rangle^{\chi(z)}$ est bien définie pour $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$ et $\langle z\rangle^{\chi(z)} \in 1 + p\ \mathcal{O}_K$.

<u>Remarque</u> 2 : Supposons le théorème démontré, on aura alors par continuité, pour $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

$$\Gamma_\chi(1 + z) = \langle z\rangle^{\chi(z)}\ \Gamma_\chi(z)\ . \tag{4}$$

<u>Remarque</u> 3 : Si $\chi = 1_p$ est le caractère unité modulo p, $f = p$ et $m = 1$,

$\underset{\sim}{Z}(m) = \underset{\sim}{Z}_p$, on a, pour n entier positif,

$$\Gamma_\chi(1 + n) = (-1)^n \Gamma_p(1 + n) \prod_{j=1 (j,p)=1}^{n} \omega(j)^{-1} .$$

Donc si $n \equiv a \mod p$, $0 \leq a < p$, on a

$$\Gamma_\chi(1 + n) = (-1)^n \Gamma_p(1 + n).(-1)^{[\frac{n}{p}]} \prod_{j=1}^{a} \omega(j)^{-1}$$

soit

(5) $$\Gamma_\chi(1 + n) = \Gamma_p(1 + n)[\omega(-1) \dots \omega(-a)]^{-1} \quad \text{pour} \quad n \equiv a \mod p .$$

On retrouve ainsi, pour $\chi = 1_p$, la fonction Γ_p de Morita avec en particulier pour $x \in p\,\underset{\sim}{Z}_p$, $\Gamma_\chi(1 + x) = \Gamma_p(1 + n)$.

Démonstration du théorème 1. - On sait, ([1] ou [2]), qu'étant donnée une fonction g bornée sur $\underset{\sim}{N}$ et à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, g admet un prolongement continu à $\underset{\sim}{Z}(m)$ si, et seulement si, sa fonction génératrice

$$G(X) = \sum_{n \geq 0} g(n) X^n$$

se prolonge en un élément analytique nul à l'infini sur le domaine

$$\Delta_m = \underset{\sim}{C}_p - (\bigcup_{\zeta^m=1} B(\zeta , 1^-)) = \{x \in \underset{\sim}{C}_p ; \ |x^m - 1| \geq 1\} .$$

Une conséquence de cette propriété est le lemme suivant.

LEMME 1.1. - Soient f et g deux fonctions continues sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ à valeurs dans $\underset{\sim}{C}_p$, la fonction $h : \underset{\sim}{N} \to \underset{\sim}{C}_p$ définie, pour $n \in \underset{\sim}{N}$, par

$$h(n) = \sum_{i=0}^{n} g(i) f(n - i)$$

est prolongeable en une fonction continue sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ notée $h = f * g$.

En effet la fonction génératrice $H(X) = \sum_{n \geq 0} h(n) X^n$ est le produit de $F(X) = \sum_{n \geq 0} f(n) X^n$ et $G(X) = \sum_{n \geq 0} g(n) X^n$. Donc H est prolongeable en un élément analytique nul à l'infini sur Δ_m . Le produit de convolution ainsi défini sur $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m) , \underset{\sim}{C}_p)$ en fait une algèbre de Banach (pour la norme $\|f\|_\infty \sup_{t \in \underset{\sim}{Z}(m)} |f(t)|$).

Application. - En choisissant $f_\chi(x) = \chi(x) \log \langle x \rangle$ et $g(x) = 1$, alors $h_\chi = f_\chi * 1$ est continue sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ et satisfait

(i) $h_\chi(0) = 0$,

(ii) $h_\chi(1 + x) = \chi(x) \log \langle x \rangle + h_\chi(x)$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

(iii) $\|h_\chi\| \leq |p|$.

En posant $\Gamma_\chi(x) = \exp(h_\chi(x))$, ce qui est possible d'après (iii), on obtient le théorème.

COROLLAIRE 1.2. - <u>La fonction</u> Γ_χ <u>satisfait, pour</u> $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$;

$$\Gamma_\chi(x)\ \Gamma_\chi(1-x)^{\chi(-1)} = 1 . \tag{6}$$

Soit en effet $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$, alors

$$u_\chi(-x) = \langle -x\rangle^{\chi(-x)} = \langle x\rangle^{\chi(x)\chi(-1)} = u_\chi(x)^{\chi(-1)} .$$

Donc, pour n entier positif, on a

$$\Gamma_\chi(0) = (\prod_{j=1}^{n} u_\chi(-n))\ \Gamma_\chi(-n) = \Gamma_\chi(1+n)^{\chi(-1)}\ \Gamma_\chi(-n) = 1 ,$$

d'où le corollaire, par continuité.

Ainsi, si χ est pair, $\Gamma_\chi(x)\ \Gamma_\chi(1-x) = 1$ et si χ est impair $\Gamma_\chi(x) = \Gamma_\chi(1-x)$. Dans le cas particulier où $\chi = 1_p$, et compte tenu du facteur de proportionnalité (5), on retrouve les relations (2) pour la fonction Γ_p de Morita. Par exemple, si χ est pair on a $\Gamma_\chi(\frac{1}{2})^2 = 1$, et comme $|\Gamma_\chi(x) - 1| < 1$ on en déduit $\Gamma_\chi(\frac{1}{2}) = 1$.

2. Série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$.

On connait des relations entre les propriétés d'analyticité locale d'une fonction g sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ et des propriétés de prolongeabilité hors de Δ_m pour la fonction génératrice $G(X)$ ([1] ou [2]) : ceci permet de montrer par exemple, que si f et g sont localement analytiques sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ avec un rayon d'analyticité au moins ρ , il en est de même pour $f * g$. Ceci permettrait de montrer que $\log \Gamma_\chi$ est localement analytique et d'évaluer son rayon d'analyticité. Cependant un calcul direct permet de déterminer explicitement la série de Taylor à l'origine de $\log \Gamma_\chi$: en utilisant la relation fonctionnelle (4) on peut en déduire la série de Taylor en tout point de $\underset{\sim}{Z}(m)$.

THEOREME 2. - <u>Pour</u> $z = (0 , x) \in \{0\} \times \{p^e \underset{\sim}{Z}_p\} = f\ \underset{\sim}{Z}(m)$, <u>on a</u>

$$\log \Gamma_\chi(1+z) = -\gamma_p(\chi)\ x + \sum_{j\geq 2} \frac{(-1)^j}{j} L_p(j , \chi_{j-1})\ x^j \tag{7}$$

<u>où</u> $\chi_j = \chi\,\omega^{-j}$ <u>et</u> $\gamma_p(\chi) = L_p(1 , \chi)$ <u>si</u> χ <u>est non trivial et</u>

$$\gamma_p(\chi) = \lim_{s\to 0} (L_p(1+s , \chi) - \frac{\varphi(f)}{f}\frac{1}{s}$$

<u>si</u> χ <u>est trivial.</u>

Remarque 1. - On retrouve exactement la formule de KOBLITZ [8] et DIAMOND [5] lorsque f est une puissance de p.

Remarque 2. - On déterminera, au § 3, le domaine de convergence de la série (7) ; il peut être plus grand que le domaine de validité de la relation (7).

Démonstration. - On sait que, uniformément pour $n \in \underset{\sim}{N}$,

$$\chi(n) \log \langle x \rangle = \lim_{h\to\infty} \left(\frac{1}{p^h} (\langle x \rangle^{p^h} - 1)\right) .$$

Posons

$$L_h(n) = \sum_{j=0}^{n} \chi(j) \frac{\langle j \rangle^{p^h} - 1}{p^h} ,$$

alors $\log \Gamma_\chi(1 + n) = \lim_{h\to\infty} L_h(n)$.

Si n est multiple de f, on peut encore écrire

$$L_h(n) = \frac{1}{p^h} \left(\left(\sum_{j=0}^{n} \chi(j) \omega(j)^{-p^h} j^{p^h}\right) - \sum_{j=0}^{n} \chi(j) \right)$$

$$= \frac{1}{p^h}\left[\frac{1}{1 + p^h} \left(B_{1+p^h, \chi_{p^h}}(n) - B_{1+p^h, \chi_{p^h}}(0)\right) - \varepsilon(\chi) \frac{\varphi(f)}{f} n\right]$$

où $\varepsilon(\chi)$ vaut 1 si χ est trivial, et 0 si non.

On a donc

$$L_h(n) = \sum_{j=0}^{1+p^h} c_{j,h} n^j$$

avec

$$c_{j,h} = \frac{1}{p^h(1 + p^h)} \binom{1 + p^h}{j} B_{1+p^h-j, \chi_{p^h}} - \frac{\varepsilon(\chi)}{p^h} \frac{\varphi(f)}{f} \delta_{j,1} .$$

Pour j fixé, $j > 1$, posons $\psi = \chi \omega^{1-j} = \chi_{j-1}$, alors

$$\chi_{p^h} = \chi \omega^{-p^h} = \chi_{j-1} \omega^{j-p^h-1} = \psi_{1+p^h-j} ;$$

ainsi, pour $j \geq 2$,

$$B_{1+p^h-j, \chi_{p^h}} = B_{1+p^h-j, \psi_{1+p^h-j}} .$$

Or on sait que, pour $n \geq 1$,

$$B_{n, \chi \omega^{-n}} = - n \frac{L_p(1 - n, \chi)}{1 - \chi \omega^{-n}(p) . p^{n-1}} ,$$

on a donc

$$c_{j,h} = \frac{1}{j(j-1)} \binom{p^h - 1}{j-2} B_{1+p^h-j,\psi_{1+p^h-j}} - \frac{\varepsilon(\chi)}{p^h} \delta_{j,1} \frac{\varphi(f)}{f}$$

$$= - \frac{1}{j(j-1)} (1 + p^h - h) \binom{p^h - 1}{j-2} \frac{L_p(j - p^h , \chi_{j-1})}{1 - \chi\, \omega^{j-1-p^h}(p).p^{p^h-j}} - \frac{\varepsilon(\chi)}{p^h} \frac{\varphi(f)}{f} \delta_{j,1}$$

quand $h \to +\infty$, on obtient, pour $j \geqslant 2$, ou pour $j \geqslant 1$ si χ est non trivial,

$$c_j = \lim_{h\to\infty} c_{j,h} = \frac{1}{j} (-1)^{j-2} L_p(j , \chi_{j-1})$$

Pour $j = 1$ et χ trivial, on sait qu'au voisinage de $s = 0$ on a

$$L_p(1 + s , \chi) = \frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{s} + \gamma_p(\chi) + \mathcal{O}(s) ,$$

ce qui donne, lorsque $h \to \infty$,

$$c_{1,h} = \frac{1}{1 - \chi\, \omega^{-1}(p).p^{p^h-1}} \left(\frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{p^h} - \gamma_p(\chi) + \mathcal{O}(p^h)\right) - \frac{\varphi(f)}{f} \frac{1}{p^h}$$

d'où

$$\lim_{h\to\infty} c_{1,h} = - \gamma_p(\chi) .$$

Ceci démontre la validité de (7) pour $x = kf$, $k \in \underset{\sim}{N}$, et donc, par densité, pour $z \in f\, \underset{\sim}{Z}(m)$.

COROLLAIRE 2.1. - <u>Soit</u> $c \in \underset{\sim}{Z}$, $(c , f) = 1$ <u>et</u> $E_{1,c}$ <u>la mesure de Bernoulli associée sur</u> $\underset{\sim}{Z}(m)$, <u>alors pour</u> $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$, $z = (0 , x)$, $|x|_p < p\, |f|_p$, <u>on a</u>

$$\log \Gamma_\chi(z) - c\, \chi(c) \log \Gamma_\chi\left(\frac{z}{c}\right)$$

$$= \int_{\chi(m)} \chi(t) \left(\log\left(\left\langle 1 + \frac{x}{t}\right\rangle - \frac{x}{t}\right) E_{1,c}(t) - (1 - \chi(c))\, \gamma_p(\chi)\, x \right.$$

On sait en effet [8] que $(1 - c^{1-j}\, \chi(c)\, L_p(j , \chi_{j-1}) = - \int_{\chi(m)} \chi(j)\, t^{-j}\, E_{1,c}(t)$, et le corollaire se déduit de (7) en y reportant l'expression ci-dessus.

3. Formule de multiplication de Gauss.

M. BOYARSKY [4] démontre que, pour $(N , p) = 1$ et $x \in \underset{\sim}{Z}_p$, on a

$$(8) \qquad \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_p\left(\frac{x + i}{N}\right) = \Gamma_p(x).N^{-(x-1-[(x-1)/p]} (-1)^A\, \Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^B ,$$

où A et B sont des constantes dépendant de N . En appliquant la même démarche on obtient ici une formule analogue.

Soit p_χ la fonction définie sur les entiers positifs par

$$p_\chi(1+n) = \sum_{j=0}^{n} \chi(j) = (\chi * 1)(n)$$

elle est continue sur $\underset{\sim}{Z}(m)$.

Pour $\chi = 1_p$ et $m = 1$, on trouve $p_\chi(1+n) = n - [\frac{n}{p}]$.

Soit $N > 1$, $(N , f) = 1$, pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$ posons

$$\Phi_{\chi,N}(x) = \Gamma_\chi(\tfrac{x}{N})\ \Gamma_\chi(\tfrac{1+x}{N}) \ldots \Gamma_\chi(\tfrac{N-1+x}{N}) \ . \tag{9}$$

En notant $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$, on a

$$\Phi_{\chi,N}(1+x)/\Phi_{\chi,N}(x) = u_\chi(\tfrac{x}{N}) = \langle x\rangle^{\chi(x)\bar{\chi}(N)}\ \langle N\rangle^{-\chi(x)\bar{\chi}(N)} \ .$$

Pour $n \in \underset{\sim}{N}$, on en déduit

$$\Phi_{\chi,N}(n) = (\textstyle\prod_{y=0}^{n-1} u_\chi(\frac{y}{N}))\ \Phi_{\chi,N}(0) = \Gamma_\chi(n)^{\bar{\chi}(N)}\ \langle N\rangle^{-p_\chi(n)\bar{\chi}(N)}\ \Phi_{\chi,N}(0) \ .$$

Par continuité des deux membres on obtient le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - <u>Soit</u> $N > 1$, $(N , f) = 1$, <u>et</u> $\Phi_{\chi,N}(x) = \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_\chi(\frac{x+i}{N})$, <u>alors</u>

$$\Phi_{\chi,N}(x) = \Gamma_\chi(x)^{\bar{\chi}(N)}\ \langle N\rangle^{-p_\chi(x)\bar{\chi}(N)}\ \Phi_{\chi,N}(0) \ . \tag{10}$$

<u>Remarque</u> 1. - Si χ est pair, $\Phi_{\chi,N}(0) = \prod_{i=0}^{N-1} \Gamma_\chi(\frac{i}{N}) = 1$, grâce à la relation (6) .

<u>Remarque</u> 2. - Si $\chi^2 = 1$, $p_\chi(x) \in \underset{\sim}{Z}$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}$, et $\Gamma_\chi(n)$ est algébrique (dans $\underset{\sim}{Q}(\omega)$) pour $n \in \underset{\sim}{Z}$. Dans ce cas,

$$\Phi_{\chi,N}(x) \in \Phi_{\chi,N}(0).\underset{\sim}{Q}(\omega) \quad \text{pour} \quad x \in \underset{\sim}{Z} \ .$$

<u>Remarque</u> 3. - Si à la fois χ est pair et $\chi^2 = 1$, $\Phi_{\chi,N}(x) \in \underset{\sim}{Q}(\omega)$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}$. Cependant aucun de ces résultats ne permet de préciser la nature des valeurs $\Gamma_\chi(\frac{i}{N})$ prises individuellement.

4. Analyticité.

4.1. Dépendance en x .

Pour χ fixé, on remarque que $u_\chi(x) = \langle x\rangle^{\chi(x)}$ est localement analytique sur $\underset{\sim}{Z}(m)$ avec un rayon d'analyticité $|p|^{-1/(p-1)}$: en effet, $\exp(\chi(x) \log \langle x\rangle)$ a un

rayon d'analyticité locale donné par $v(\log \langle x\rangle - 1) > 1/(p-1)$ soit $v(\langle x\rangle - 1) > 1/(p-1)$. Pour connaître le rayon d'analyticité locale de $\Gamma_\chi(x)$ il suffit donc de le déterminer en $x = 0$ (ou $x = 1$, puisque, pour $x \in f\,\underset{\sim}{Z}(m)$, $\Gamma_\chi(x) = \Gamma_\chi(1 + x)$).

THÉORÈME 4.1. - <u>La série de Taylor de</u> $\Gamma_\chi(1 + z)$ en $z = 0$ <u>définit une fonction analytique bornée sur</u> $\{z = (0 , x) ; v_p(x) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}\}$ <u>et sa somme coïncide avec</u> $\Gamma_\chi(1 + z)$ <u>pour</u> $v_p(x) \geq v_p(f)$.

Considérons d'abord la série de Taylor

$$\log \Gamma_\chi(1 + z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j\, x^j \text{ , où } c_1 = -\gamma_p(\chi) \tag{7}$$

et

$$c_j = \frac{(-1)^j}{j} L_p(j , \chi_{j-1}) \quad \text{pour } j \geq 2 .$$

On sait que $c_1 \in \mathcal{O}_K$ et $p\, j(j-1)\, c_j \in \mathcal{O}_K$ pour $j \geq 2$. Ainsi la série

$$\ell(t) = t + \sum_{j\geq 2} \frac{1}{p\, j(j-1)}\, t^j$$

domine la série (7). En étudiant le polygone de Newton de ℓ , on vérifie que

$$v_p(\ell(t)) > \frac{1}{p-1} \quad \text{pour} \quad v_p(t) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} .$$

Pour ces valeurs de t ,

$$v_p(\sum_{j\geq 1} c_j\, t^j) > \frac{1}{p-1}$$

et, en passant à l'exponentielle, on obtient la série de Taylor de Γ_χ : $\exp(\sum_{j\geq 1} c_j\, x^j)$ qui, pour $v_p(x) > \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1}$, converge vers un nombre y de $\mathcal{O}_K$, tel que $v_p(y - 1) > \frac{1}{p-1}$. La seconde assertion résulte immédiatement du théorème 2.

Remarquons que lorsque $v_p(f) > 1$ (i. e. $f = m\,p^e$, $e > 1$) l'intersection du disque de convergence de la série de Taylor de Γ_χ en un point $z \in \underset{\sim}{Z}(m)$ avec $\underset{\sim}{Z}(m)$ contient plusieurs classes modulo $f.\underset{\sim}{Z}(m)$, alors que la coïncidence de la somme de cette série de Taylor avec Γ_χ n'est assurée que sur $z + f\,\underset{\sim}{Z}(m)$.

4.2. Dépendance en χ .

Supposons maontenant que m est fixé et que χ parcourt l'ensemble des caractères de Dirichlet de conducteurs $f(\chi) = m\,p^e$, $e \geq 1$. Alors χ parcourt le sous-groupe de torsion $\widehat{X(m)}_{tors}$ du groupe $\widehat{X(m)}$ des caractères continus de $X(m)$ dans C_p^* (où $X(m) = \underset{\sim}{Z}(m)^*$ et $\hat{G} = \mathrm{Hom\ cont}\,(G , C_p^*)$) . On sait (cf. par

exemple [2]) que $\widehat{X(m)}$ a une structure naturelle de variété analytique

$$\widehat{X(m)} \simeq (\underset{\sim}{Z}/m\,\underset{\sim}{Z})^* \times (\underset{\sim}{Z}/(p-1)\,\underset{\sim}{Z}) \times \mathcal{U}_p$$

où $\mathcal{U}_p = \{x \in \underset{\sim}{C}_p \; ; \; |x - 1| < 1\}$.

Soit $E = \mathcal{C}(X(m)\,,\,\underset{\sim}{C}_p)$ (resp. $F = \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m)\,,\,\underset{\sim}{C}_p)$) muni de la norme de la convergence uniforme. On peut considérer E comme un facteur direct de F : toute $g \in E$ est prolongée à $\underset{\sim}{Z}(m)$ en prenant $g = 0$ sur $\underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$.

Notons log la fonction de E (resp. F) définie par $x \longrightarrow \log \langle x \rangle$. Pour $g \in F$, posons $L(g) = (g.\log) * 1$, alors $L(g) \in F$, et L est une application linéaire continue de E dans F , $\|L\| = |p|$. Si $g = \chi$ est un caractère de Dirichlet, $L(\chi)(x) = \log \Gamma_\chi(1 + x)$. On voit ainsi que $\chi \longrightarrow \log \Gamma_\chi$ est la restriction à $\widehat{X(m)}$ d'une application linéaire continue de F dans lui-même (ou de E dans F). Or on sait que la restriction à $X(m)$ (resp. $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$) des applications linéaires continues de E (resp. F) dans F , c'est-à-dire des <u>mesures</u> sur $X(m)$ (resp. $\underset{\sim}{Z}(m)$) à valeurs dans F est l'espace <u>des fonctions analytiques bornées</u> sur $\widehat{X(m)}$ (resp. $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$) , à valeurs dans F .

THÉORÈME 4.2. - <u>Il existe une unique fonction analytique bornée sur</u> $\widehat{X(m)} = \mathrm{Hom\ cont}\,(X(m)\,,\,\underset{\sim}{C}_p^*)$ <u>et à valeurs dans</u> $F = \mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}(m)\,,\,\underset{\sim}{C}_p)$, <u>notée</u> L , <u>et telle que, lorsque</u> χ <u>est un caractère de Dirichlet de conducteur</u> $f = m\,p^e$, $e \geq 1$, <u>on ait, pour</u> $x \in \underset{\sim}{Z}(m)$,

$$L(\chi)(x) = \log \Gamma_\chi(1 + x) \; .$$

<u>Les images</u> $L(\varphi)$ <u>des</u> $\varphi \in \widehat{X(m)}$ <u>satisfont les relations fonctionnelles</u>

$$L(\varphi)(1 + x) = \varphi(x) \log \langle x \rangle + L(\varphi)(x)$$

(11)

$$L(\varphi)(1 - x) + \varphi(-1)\, L(\varphi)(x) = 0 \; .$$

<u>Remarque</u> 1. - Comme $\log \langle x \rangle = 0$ pour $x \in \underset{\sim}{Z}(m)\backslash X(m)$, l'application L de F dans lui-même définie ci-dessus s'annule sur le sous-espace F_0 des fonctions nulles sur $X(m)$, supplémentaire naturel de E dans F .

<u>Remarque</u> 2. - Soit $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ le groupe des caractères additifs de $\underset{\sim}{Z}(m)$: L définit encore par restriction à $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ une fonction analytique bornée sur cette variété. Si $\theta \in \widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ et $\varphi \in \widehat{X(m)}$ sont deux éléments de torsion d'ordres respectifs $m.p^h$ et $\varphi(m)(p-1)\,p^{h-1}$, la relation linéaire entre φ et les θ^j , $j = 0\,,\,\ldots\,,\,m\,p^h - 1$, lorsqu'on leur applique L , fait apparaître la somme de Gauss $G(\theta\,,\,\varphi)$ comme quotient de deux fonctions analytiques bornées sur $\widehat{\underset{\sim}{Z}(m)}$ et $\widehat{X(m)}$ à valeurs dans F , ou à valeurs scalaires si on fixe un point de $\underset{\sim}{Z}(m)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AMICE (Yvette) et FRESNEL (J.). - Fonctions zeta p-adiques des corps totalement réels, Acta Arithm., t. 20, 1972, p. 353-384.

[2] AMICE (Y.) et VÉLU(J.). - Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke, "Journées arithmétiques" [1974 - Bordeaux], Astérisque n° 24-25, 1975, p. 119-131.

[3] BARSKY (D.). - On Morita's p-adic gamma functions, Math. Proc. Cambridge phil. Soc., t. 89, 1981, p. 23-27.

[4] BOYARSKY (M.). - p-adic gamma functions and Dwork cohomology, Trans. Amer. math. Soc., t. 257, 1980, p. 359-369.

[5] DIAMOND (J.). - The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants, Trans. Amer. math. Soc., t. 233, 1977, p. 321-337.

[6] DIAMOND (J.). - On the values of p-adic L-functions at positive integers, Acta Arithm., t. 35, 1979, p. 223-237.

[7] GROSS (B. H.) and KOBLITZ (N.). - Gauss sums and the p-adic gamma-function, Annals of Math., série 2, t. 109, 1979, p. 569-581.

[8] KOBLITZ (Neal). - Interpretation of the p-adic log gamma function and Euler constants using the Bernoulli measure, Trans. Amer. math. Soc., t. 242, 1978, p. 261-269.

[9] KOBLITZ (N.). - A new proof of certain formulas for p-adic L-functions, Duke math. J., t. 46, 1979, p. 455-468.

[10] MORITA (Yasuo). - A p-adic analogue of the Γ-function, J. of Fac. of Sc., Univ. of Tokyo, t. 22, 1975, p. 255-266.