

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BERTRAND

Sous-groupes à plusieurs paramètres p -adiques de variétés abéliennes

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 6 (1978-1979), exp. n° 9, p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A5_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-GROUPES A PLUSIEURS PARAMETRES p -ADIQUES
DE VARIÉTÉS ABÉLIENNES

par Daniel BERTRAND (*)

[Ecole Polytechnique, Palaiseau]

Résumé. - On démontre la transcendance de chacune des coordonnées d'un point algébrique non nul de l'exponentielle p -adique fortement normalisée sur une variété abélienne simple à multiplications réelles, définie sur un corps de nombres. On établit à ce propos un critère de transcendance pour des fonctions analytiques de plusieurs variables p -adiques.

1. Un critère de transcendance pluridimensionnel.

Soient p un nombre premier, et \mathbb{C}_p le complété de la clôture algébrique du corps des nombres p -adiques. On note \mathcal{O} son anneau d'entiers, et $|\cdot|$ sa valeur absolue, normalisée par $|p| = p^{-1}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ l'anneau des fonctions strictement analytiques sur la boule unité \mathcal{O}^n de \mathbb{C}_p^n .

On suppose donnés, dans tout ce paragraphe, n endomorphismes π_1, \dots, π_n du \mathcal{O} -module \mathcal{O}^n tels que, pour tout n -uplet $v = (v_1, \dots, v_n)$ d'entiers rationnels > 0 , l'endomorphisme

$$\tau_v = v_1 \pi_1 + \dots + v_n \pi_n$$

soit un plongement.

A tout élément v de \mathbb{N}^n , et tout élément f de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$, on associe l'élément

$$T_v f = f \circ \tau_v$$

de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ et le n -uplet

$$\tilde{f} = (f \circ \pi_1, \dots, f \circ \pi_n)$$

d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$. On note enfin $\|v\| = v_1 + \dots + v_n$ la longueur de v .

Définition 1. - On dira qu'une famille $\{f_1, \dots, f_\ell\}$ d'éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini (relativement à π_1, \dots, π_n) s'il existe un corps de nombres K , d'anneau d'entiers I , et des nombres réels ρ et c tels que, pour tout élément v de \mathbb{N}^n , il existe 2ℓ éléments

$\{P_{i,v}, Q_{i,v}; i = 1, \dots, \ell\}$ de $I[X_{s,j}; s = 1, \dots, \ell; j = 1, \dots, n]$ de degrés totaux $\leq c\|v\|^\rho$, de hauteurs $\leq \exp(c(1 + \|v\|^\rho))$ tels que, pour

(*) Texte reçu le 28 septembre 1979.

Daniel BERTRAND, Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 PALAISEAU CEDEX.

$i = 1, \dots, \ell :$

$$T_{\nu} f_i = P_{i,\nu}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}) / Q_{i,\nu}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}) .$$

Un élément ζ de \mathcal{O}^n sera dit régulier pour $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$ si, pour tout n-uple ν et tout indice i , il existe une telle représentation de $T_{\nu} f_i$ vérifiant en outre

$$Q_{i,\nu}(\tilde{f}_1(\zeta), \dots, \tilde{f}_{\ell}(\zeta)) \neq 0 .$$

Le critère de transcendance que nous avons en vue généralise à plusieurs variables le théorème 1 de [1].

THÉORÈME 1. - Soit $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On suppose que le corps $\overline{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_{\ell})$ a un degré de transcendance $\geq n + 1$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$, et qu'il existe n dérivations \mathbb{C}_p -linéairement indépendantes de $\text{Lie}(\mathbb{C}_p^n)$ opérant sur l'algèbre

$$\overline{\mathbb{Q}}[f_i \circ \pi_j ; i = 1, \dots, \ell ; j = 1, \dots, n] .$$

Soit ζ un élément de \mathcal{O}^n , régulier pour $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$ et tel que $\pi_1(\zeta), \dots, \pi_n(\zeta)$ soient linéairement indépendants sur \mathbb{C}_p . Alors, l'un au moins des nombres $f_i \circ \pi_j(\zeta)$ ($i = 1, \dots, \ell ; j = 1, \dots, n$) est transcendant.

La démonstration du théorème 1 est donnée au § 2. Elle repose d'une part sur un lemme de Schwarz sur les produits, dû à ROBBA [6], d'autre part sur l'énoncé suivant, qui généralise une idée de BAKER et COATES (voir [4], lemme 8.1, et [1], lemme 2), et améliore, en un point régulier pour $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$, les estimations de hauteur fournies par le lemme 5.1 de [4].

LEMME. - Soient $\{f_1, \dots, f_{\ell}\}$ une famille d'éléments de $\mathcal{H}(\mathcal{O}^n)$ d'ordre arithmétique fonctionnel fini. On reprend les notations qui lui sont associées par la définition 1. On suppose qu'il existe n éléments D_1, \dots, D_n de $\text{Lie}(\mathbb{C}_p^n)$ opérant sur l'algèbre $I[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n]$. Pour tout n-uple σ de \mathbb{N}^n , on note D^{σ} l'opérateur $D_1^{\sigma_1}, \dots, D_n^{\sigma_n}$. Alors, il existe un nombre réel $\gamma = \gamma(f_1, \dots, f_{\ell})$ vérifiant la propriété suivante. Soient L_1, \dots, L_{ℓ} des entiers ≥ 0 , de somme L , H un entier > 0 , et P un élément de $I[X_1, \dots, X_{\ell}]$ de degré $\leq L_i$ en X_i , de hauteur $\leq H$. Pour tout couple (σ, ν) d'éléments de \mathbb{N}^n , la fonction $F = P(f_1, \dots, f_{\ell})$ vérifie

$$\left(\prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i}(f_1, \dots, f_{\ell}) \right) D^{\sigma} T_{\nu} F = R_{\sigma,\nu,P}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{\ell}) + \sum_{\substack{\|x\| < \|\sigma\| \\ \nu_j \leq \sigma_j}} r_{\nu,\nu,P} D^{\nu} T_{\nu} F ,$$

où les fonctions $r_{\nu,\nu,P}$ sont analytiques sur \mathcal{O}^n , et $R_{\sigma,\nu,P}$ désigne un élément de $I[X_{ij} ; i = 1, \dots, \ell ; j = 1, \dots, n]$ de degrés partiels $\leq \gamma(\|\sigma\| + L_i \|\nu\|^{\rho})$

en X_{i1}, \dots, X_{in} , de hauteur majorée par

$$H(1 + \gamma(\|\sigma\| + L\|\nu\|^p))^{\gamma\|\sigma\|} \exp(\gamma(\|\sigma\| + L(1 + \|\nu\|^p))) .$$

Démonstration. - La définition 1 permet de construire un élément $R_{0,\nu,P}$ de $I[X_{ij}]$ vérifiant, pour $i = 1, \dots, \ell$ et $j = 1, \dots, n$:

$$\deg_{X_{ij}} R_{0,\nu,P} \leq cL_i \|\nu\|^p ,$$

de hauteur majorée par $H \exp(3cL(1 + \|\nu\|^p))$, et tel que

$$\left(\prod_{i=1}^{\ell} Q_{i,\nu}^{L_i}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell)\right) T_\nu F = R_{0,\nu,P}(\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell) .$$

Or l'algèbre $I[f_i \circ \pi_j ; i = 1, \dots, \ell ; j = 1, \dots, n]$ est stable sous l'action des opérateurs D_1, \dots, D_n . On conclut au moyen du lemme 5.1 de [4], joint à la formule de Leibniz.

2. Démonstration du critère.

On reprend les notations de l'énoncé du théorème 1, et on suppose que, contrairement à sa conclusion, les $n\ell$ fonctions $f_i \circ \pi_j$ prennent simultanément des valeurs algébriques au point ζ . On peut, sans perte de généralité, se ramener aux hypothèses suivantes : Les fonctions f_1, \dots, f_{n+1} sont algébriquement indépendantes ; les nombres algébriques $f_i \circ \pi_j(\zeta)$ sont des éléments de l'anneau I des entiers du corps K associé, par la définition 1, à la famille $\{f_1, \dots, f_\ell\}$; enfin, il existe n dérivations D_1, \dots, D_n , linéairement indépendantes sur \mathbb{C}_p , opérant sur l'algèbre $I[\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_\ell]$.

On désigne par N un entier arbitrairement grand, et par c_1, \dots, c_8 des nombres réels > 0 ne dépendant que de $f_1, \dots, f_\ell, \pi_1, \dots, \pi_n, D_1, \dots, D_n, K$ et ζ . Pour tout entier $M > 0$, on note \mathcal{N}_M le sous-ensemble de \mathbb{N}^n formé des n -uples d'entiers > 0 , divisibles par p , et $\leq p^M$. On pose enfin :

$$\alpha = (\rho + 1)(n + 1) - (3/2) ; \quad \beta = (\rho + 1)n ; \quad \eta = (\rho + 1)n + \rho - (n/2) .$$

Premier pas (Construction d'un nombre algébrique ξ non nul). - Il existe un élément non nul

$$P = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} \leq L} P^{\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}} X_1^{\lambda_1} \dots X_{n+1}^{\lambda_{n+1}}$$

de $I[X_1, \dots, X_{n+1}]$ de degré total $\leq L = [N^\beta]$, de hauteur $\leq \exp(c_1 N^\eta)$, tel que la fonction $F = P(f_1, \dots, f_{n+1})$ admette les points de l'ensemble $\{\tau_\nu(\zeta) ; \nu \in \mathcal{N}_N\}$ pour zéros d'ordre $\geq S = [N^\alpha]$.

Démonstration. - Les applications τ_ν ($\nu \in \mathcal{N}_N$) étant des plongements, la condition imposée à F revient à exiger que, pour tout élément ν de \mathcal{N}_N , la fonction $T_\nu F$ admet le point ζ pour zéro d'ordre $\geq S$, ou encore, d'après le lemme du § 1 et le fait que ζ soit régulier pour $\{f_1, \dots, f_\ell\}$, que le polynôme P

vérifie, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_N$ et tout $\sigma \in \mathbb{N}^n$ de longueur $\leq S$,

$$R_{\sigma, \nu, P}(\tilde{f}_1(\zeta), \dots, \tilde{f}_\ell(\zeta)) = 0,$$

où

$$R_{\sigma, \nu, P} = \sum_{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n+1} \leq L} p^{\lambda_1 \dots \lambda_{n+1}} R_{\sigma, \nu, X_1^{\lambda_1} \dots X_{n+1}^{\lambda_{n+1}}}.$$

Il s'agit donc de résoudre un système de $\binom{S+n}{n} N^n$ équations à $\binom{L+n+1}{n+1}$ inconnues, dont les coefficients sont des éléments de I de hauteur $\leq \exp(c_2(S \log S + L(pN)^\rho))$, en vertu des estimations du lemme du § 1. Le lemme de Siegel permet de conclure.

Les fonctions f_1, \dots, f_{n+1} étant algébriquement indépendantes, la fonction F n'est pas identiquement nulle. Soit M le plus grand entier tel que tous les points $\tau_\nu(\zeta)$, où ν parcourt l'ensemble \mathcal{N}_M , soient zéros d'ordre $\geq [M^\alpha]$ de F . Alors, $M \geq N$, et il existe un élément μ de \mathcal{N}_{M+1} tel que $\tau_\mu(\zeta)$ soit zéro d'ordre $U < (M+1)^\alpha$ de F . Comme τ_μ est un plongement, il existe un n -uple σ de longueur U tel que le nombre

$$\xi = D^\sigma T_\mu F(\zeta),$$

qui appartient à K , soit non nul.

Deuxième pas (Estimation de $|\xi|$). - Puisque ζ est un point régulier pour $\{f_1, \dots, f_\ell\}$, le lemme du § 1 entraîne :

$$H(\xi) \leq \exp(c_3(N^n + LM^\rho + U \log(1 + U))).$$

On déduit alors de la formule du produit sur K^x la minoration

$$|\xi| \geq \exp(-c_4 M^{\beta+\rho}).$$

Des considérations analytiques permettent par ailleurs de majorer $|\xi|$. Notons c_5 le maximum des nombres $|d\tau_\mu(D_i)|$ ($i = 1, \dots, n$). Alors, il existe des éléments $a_{\mu, \sigma, \kappa}$ de \mathbb{C}_p , de valeurs absolues $\leq c_5^U$, tel que

$$\xi = D^\sigma T_\mu F(\zeta) = \sum_{\kappa \in \mathbb{N}^n, \|\kappa\|=U} a_{\mu, \sigma, \kappa} T_\mu D^\kappa F(\zeta).$$

La formule de Cauchy entraîne, en désignant par $|F|_\mathcal{O}$ le maximum de la fonction $|F(z)|$ sur l'ensemble \mathcal{O} :

$$|D^\kappa F(\tau_\mu(\zeta))| \leq c_6^U |F|_{(\mathfrak{p}\mathcal{O})^n}.$$

Or la fonction F admet les points de l'ensemble produit $\{\tau_\nu(\zeta); \nu \in \mathcal{N}_M\}$ pour zéros d'ordre $\geq [M^\alpha]$. Du théorème 2.3.1 de [6] (lemme de Schwarz sur les produits), on déduit donc

$$|F|_{(\mathfrak{p}\mathcal{O})^n} \leq p^{-[M^\alpha]M} |F|_{\mathcal{O}^n} \leq p^{-[M^\alpha]M} c_7^L.$$

En regroupant ces différentes inégalités, on obtient la majoration

$$|\xi| \leq \exp(-c_8 M^{\alpha+1}),$$

qui contredit la minoration de $|\xi|$ obtenue plus haut. Le théorème 1 est donc démontré.

3. Application aux variétés abéliennes.

Soient K un corps de nombres, p une place finie de K , et K_p le complété de K en p , que l'on suppose plongé dans \mathbb{C}_p . Soit, d'autre part, A une variété abélienne définie sur K , de dimension n . L'ensemble $A(K_p)$ des points K_p -rationnels de A est un groupe de Lie p -adique, et les applications exponentielles p -adiques sur $A(K_p)$ définissent, sur un sous-groupe ouvert \mathcal{O}_p suffisamment petit de $\text{Lie } A(K_p)$ un même difféomorphisme strictement analytique :

$$\text{Exp} : \mathcal{O}_p \rightarrow A(K_p)$$

de \mathcal{O}_p sur un sous-groupe propre d'indice fini \mathcal{A}_p de $A(K_p)$. Soient alors h un isomorphisme de K_p^n sur $\text{Lie } A(K_p)$ appliquant l'anneau des entiers de K_p dans D_p et $\{X_0, \dots, X_N\}$ un plongement de A dans l'espace projectif \mathbb{P}_N , défini sur K et tel que \mathcal{A}_p ne rencontre pas le diviseur d'équation $X_0 = 0$. On appelle représentation de Exp le système $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ de N fonctions strictement analytiques sur \mathcal{O}^n définies (pour $i = 1, \dots, N$) par

$$\varphi_i = (X_i/X_0) \circ (\text{Exp} \circ h).$$

(Pour plus de détails sur ces fonctions, voir [3].)

Nous nous proposons d'étudier les points algébriques de l'application φ , c'est-à-dire les points de \mathcal{O}^n où les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ prennent simultanément des valeurs algébriques. On suppose désormais que h est définie sur K . D'après le théorème 2 de [1], l'une au moins des coordonnées d'un point algébrique non nul de φ est transcendante. Le théorème 2 énoncé ci-dessous permet de préciser ce résultat sous certaines hypothèses sur l'algèbre d'endomorphismes

$$\text{End}_{\mathcal{O}} A = \mathcal{Q} \otimes \text{End } A \text{ de } A,$$

et sur l'isomorphisme h .

Définition 2. - On dit que A est une variété abélienne à multiplications réelles s'il existe un corps de nombres F , de degré égal à n , et un plongement ι de F dans $\text{End}_{\mathcal{O}} A$. Quitte à effectuer une extension finie de K , on peut alors construire une base de $\text{Lie } A(K)$ formée de vecteurs propres pour l'action naturelle de $\iota(F)$ sur $\text{Lie } A(K)$. On dira qu'une représentation φ de l'application Exp est fortement normalisée si l'isomorphisme h qui lui est associée applique la base canonique de K_p^n sur une telle base.

THÉOREME 2. - Soient A une variété abélienne simple à multiplications réelles,
définie sur un corps de nombres, et u un point algébrique non nul d'une repré-
sentation fortement normalisée de l'application Exp . Alors, chacune des coordon-
nées de u est transcendante.

Démonstration. - Nous récapitulons tout d'abord les propriétés de l'application Exp qui seront utilisées plus bas. On reprend les notations de la définition 2, et on désigne par $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ les différents plongements de F dans \mathbb{C}_p . On peut supposer, sans restreindre la généralité, que le corps K contient tous les conjugués de F , ainsi que les nombres $\varphi_i(u)$ ($i = 1, \dots, N$).

(i) Tout élément de $\text{Lie } A(\mathbb{C}_p)$, défini sur K , opère sur l'algèbre $K[\varphi_1, \dots, \varphi_N]$ (voir [3], Propriété 2).

(ii) La famille $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini relativement à la donnée de tout n -uplet $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$ d'endomorphisme de \mathcal{O}^n . Ceci résulte de la non-nullité de X_0 sur \mathcal{O}_p et des formules d'addition et de multiplication régulières établies, par exemple, dans [5], § 3.

(iii) Soit R l'ensemble $\mathcal{L}^{-1}(\text{End } A \cap \mathcal{L}(F))$. Pour tout élément β de R , on a, d'après le choix de h (et après permutation éventuelle des composantes de \mathcal{O}^n) :

$$\text{Exp} \circ h(\beta^{\sigma_1} z_1, \dots, \beta^{\sigma_n} z_n) = \mathcal{L}(\beta)(\text{Exp} \circ h(z_1, \dots, z_n))$$

(voir également [3], Propriété 4).

L'ensemble R est un ordre de F . Soit $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ une base de R sur \mathbb{Z} et, pour $j = 1, \dots, n$, notons π_j l'automorphisme de \mathcal{O}^n représenté par la matrice diagonale : $\text{diag}(\beta_j^{\sigma_1}, \dots, \beta_j^{\sigma_n})$. Alors, pour tout n -uplet (v_1, \dots, v_n) d'entiers rationnels non tous nuls, l'application $v_1 \pi_1 + \dots + v_n \pi_n$ est un plongement.

Supposons que, contrairement à la conclusion du théorème 2, l'une des composantes u_1, \dots, u_n de u , soit u_m , soit algébrique. Posons, pour $j = 1, \dots, n$ (voir [7], Chapitre 6),

$$\begin{aligned} \varepsilon_j &= 1 \quad \text{si } u_j \neq 0 \quad (\text{resp. } \varepsilon_j = 0 \quad \text{si } u_j = 0), \\ v_j &= u_j \quad \text{si } u_j \neq 0 \quad (\text{resp. } v_j = 1 \quad \text{si } u_j = 0), \end{aligned}$$

et considérons les $N + 1$ éléments de $\mathcal{K}(\mathcal{O}^n)$:

$$f_0(z) = z_m; \quad f_i(z) = \varphi_i(\varepsilon_1 z_1, \dots, \varepsilon_n z_n) \quad (1 \leq i \leq N).$$

D'après (ii) et la définition des endomorphismes π_j , la famille $\{f_0, f_1, \dots, f_N\}$ est d'ordre arithmétique fonctionnel fini relativement à $\{\pi_1, \dots, \pi_n\}$, et le point $v = (v_1, \dots, v_n)$ est régulier pour cette famille. D'après (i), l'algèbre $\overline{\mathbb{Q}}[f_0, \dots, f_N]$ est invariante sous l'action des opérateurs de dérivation $\partial/\partial z_1, \dots, \partial/\partial z_n$. Il résulte de (iii), et de l'hypothèse faite sur u_m , que

les fonctions $f_i \circ \pi_j$ ($0 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq n$) prennent simultanément des valeurs algébriques au point v . Or les points $\pi_1(v)$, ..., $\pi_n(v)$ sont linéairement indépendants sur \mathbb{C}_p , puisque le carré du déterminant de la matrice $(\beta_j^{\sigma_i} v_i ; 1 \leq i, j \leq n)$ est un multiple non nul du discriminant du corps F . Le théorème 1 entraîne donc que le degré de transcendance du corps $\overline{\mathbb{Q}}(f_0, f_1, \dots, f_N)$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ est $\leq n$. On en déduit (en considérant des fonctions abéliennes complexes associées, ou en appliquant le théorème d'Eisenstein aux séries entières exprimant z_m en fonction de $X_1/X_0, \dots, X_N/X_0$) que le degré de transcendance de $\overline{\mathbb{Q}}(f_1, \dots, f_N)$ est $< n$. Mais ceci contredit la simplicité de la variété abélienne A (voir [4], § 2), et le théorème 2 est démontré.

L'analogie complexe du théorème 2 est également satisfait. Nous renvoyons à [2] pour les corollaires qu'on en déduit sur les périodes de certaines formes modulaires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERTRAND (D.). - Sous-groupes à un paramètre p -adique de variétés de groupe, *Invent. Math.*, Berlin, t. 40, 1977, p. 171-193.
- [2] BERTRAND (D.). - Sur les périodes de formes modulaires, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 288, 1979, Série A, p. 531-534.
- [3] BERTRAND (D.). - Fonctions abéliennes p -adiques : définitions et conjectures, groupe d'étude d'Analyse Ultramétrique, 4e année, 1976/77, n° 21, 13 p.
- [4] LANG (S.). - Diophantine approximation on abelian varieties with complex multiplication, *Adv. in Math.*, t. 17, 1975, p. 281-336.
- [5] MASSER (D.). - Diophantine approximation and lattices with complex multiplication, *Invent. Math.*, Berlin, t. 45, 1978, p. 61-82.
- [6] ROBBA (P.). - Lemmes de Schwarz et lemmes d'approximations p -adiques en plusieurs variables, *Invent. Math.*, Berlin, t. 48, 1978, p. 245-277.
- [7] WALDSCHMIDT (M.). - Groupes algébriques et nombres transcendants, *Astérisque* (à paraître).