

# GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

ALAIN ESCASSUT

## Valeurs absolues des algèbres de Krasner

*Groupe de travail d'analyse ultramétrique*, tome 6 (1978-1979), exp. n° 20, p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=GAU\\_1978-1979\\_\\_6\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1978-1979__6__A14_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

VALEURS ABSOLUES DES ALGÈBRES DE KRASNER

par Alain ESCASSUT (\*)

[Univ. Bordeaux-I]

Rappelons que d'après un théorème de GUENNEBAUD, tout idéal maximal d'une  $K$ -algèbre de Banach ultramétrique est noyau d'une semi-norme multiplicative continue.

On peut donc se demander si, plus généralement, tout idéal premier fermé serait noyau d'une semi-norme multiplicative continue.

Par passage au quotient par cet idéal premier fermé, cela revient à se demander si toute  $K$ -algèbre de Banach intègre possède au moins une valeur absolue continue.

A titre de comparaison, rappelons que dans une  $\mathbb{C}$ -algèbre de Banach, les semi-normes multiplicatives continues sont de la forme  $|\chi|$ ,  $\chi : A \rightarrow \mathbb{C}$ , et donc elles ont pour noyau un idéal maximal de codimension 1. En particulier, elles n'ont jamais de valeur absolue continue, excepté  $\mathbb{C}$ .

Ici on se propose d'étudier les valeurs absolues continues des algèbres de Krasner  $H(D)$  sans idempotent non trivial.

Considérons donc un infraconnexe fermé borné  $D$  d'un corps ultramétrique complet algébriquement clos  $K$ . On sait que les semi-normes multiplicatives continues de  $H(D)$  sont caractérisées par les filtres circulaires de  $D$ .

Rappelons brièvement la définition d'un filtre circulaire de  $D$  ([7], [2]).

On appelle filtre circulaire de  $D$  un filtre  $\mathfrak{F}$  de  $D$  qui admet un système générateur de la forme  $\Phi \cup \hat{\Phi}$  (que l'on nomme système générateur canonique) où  $\Phi$  est une suite strictement décroissante de disques circonferenciés de  $D$ , notée  $(d_n)$  (où l'on note  $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(d_n)$ ), et où  $\hat{\Phi}$  est la famille des couronnes  $\Gamma(a, r_1, r_2, D)$  telles que  $a \in \bigcap_{d \in \mathfrak{F}} d$  et  $r_1 < r < r_2$ . Le nombre  $r$  est appelé diamètre de  $\mathfrak{F}$ ; on note  $\Delta(\mathfrak{F})$  l'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} d_n$  et les points de  $\Delta(\mathfrak{F})$  sont appelés centres de  $\mathfrak{F}$ .

THÉORÈME de GARANDEL. - Soit  $D$  un infraconnexe fermé borné de  $K$ , et soit  $\mathfrak{F}$  "un filtre" circulaire de  $D$ .

Alors, pour tout  $f \in H(D)$ ,  $|f(x)|$  admet une limite suivant  $\mathfrak{F}$ , et l'application  $\varphi_{\mathfrak{F}}$  définie dans  $H(D)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , par  $\varphi_{\mathfrak{F}}(f) = \lim_{\mathfrak{F}} |f(x)|$  est une

(\*) Texte reçu le 22 mai 1980.

Alain ESCASSUT, M-11 G' Rés. Compostelle, 33600 PESSAC.

semi-norme multiplicative continue. Enfin, l'application définie dans l'ensemble des filtres circulaires de  $D$ , à valeurs dans  $\text{Mult}(H(D), \|\cdot\|_D)$ , par  $\mathfrak{F} \rightarrow \varphi_{\mathfrak{F}}$  est une bijection.

Définition. - Soit  $D$  un infraconnexe de  $K$ .

Nous dirons qu'un filtre circulaire  $\mathfrak{F}_2$  encercle un filtre circulaire  $\mathfrak{F}_1$ , ou encore, que  $\mathfrak{F}_1$  est encerclé par  $\mathfrak{F}_2$ , si  $\mathfrak{F}_1$  est sécant à  $\Delta(\mathfrak{F}_2)$ .

Alors la relation  $<$  définie sur les filtres circulaires de  $D$  par  $\mathfrak{F}_1 < \mathfrak{F}_2$  si  $\mathfrak{F}_2$  encercle  $\mathfrak{F}_1$  est, de façon évidente, une relation d'ordre. Nous dirons que deux filtres circulaires  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  de  $D$  sont étrangers s'ils ne sont pas comparables pour la relation  $<$ .

LEMME 1. - Soit  $D$  un infraconnexe de  $K$ , et soient deux filtres circulaires  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  de  $D$ . Si  $\mathfrak{F}_2$  encercle  $\mathfrak{F}_1$  alors on a  $\text{diam}(\mathfrak{F}_1) \leq \text{diam}(\mathfrak{F}_2)$  et plus précisément si, de plus,  $\text{diam}(\mathfrak{F}_1) = \text{diam}(\mathfrak{F}_2)$ , alors on a  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$ .

Réciproquement, si  $\Delta(\mathfrak{F}_1) \cap \Delta(\mathfrak{F}_2) \neq \emptyset$ , et si  $\text{diam}(\mathfrak{F}_1) \leq \text{diam}(\mathfrak{F}_2)$ , alors  $\mathfrak{F}_2$  encercle  $\mathfrak{F}_1$ .

### 1. Filtres monotones, T-filtres et valeurs absolues.

La suite de cette étude nous oblige à rappeler la définition des filtres monotones d'un infraconnexe  $D$  de  $K$ .

Définitions. - Soit  $D$  un infraconnexe de  $K$ . On appelle filtre décroissant de  $D$  un filtre  $\mathfrak{F}$  qui admet pour base une suite de parties de  $D$  de la forme  $D_n = \Delta_n \setminus (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Delta_m)$ , où  $(\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est une suite strictement décroissante de disques de  $D$  telle que le nombre  $r = \lim_n \text{diam}(\Delta_n)$  soit non nul, et  $r$  est appelé diamètre de  $\mathfrak{F}$ . On note

$$\rho(\mathfrak{F}) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Delta_m \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(\mathfrak{F}) = D - \rho(\mathfrak{F}),$$

et on appelle centre de  $\mathfrak{F}$  tout point de  $\rho(\mathfrak{F})$ .

Le filtre circulaire de  $D$  engendré par la famille  $\Phi \cup \hat{\Phi}$  où  $\Phi = (\Delta_m)_{m \in \mathbb{N}}$  est appelé filtre circulaire associé à  $\mathfrak{F}$ , et on le note  $\bar{\mathfrak{F}}$ .

Inversement, soit  $\mathfrak{S}$  un filtre circulaire engendré par une famille  $\Phi \cup \hat{\Phi}$ , où  $\Phi$  est une suite strictement décroissante de disques de  $D$ , notée  $(\Delta_n)$ , et  $\mathfrak{S}$  le filtre décroissant admettant pour base la suite  $D_n = \Delta_n \setminus (\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Delta_m)$ ; alors  $\mathfrak{S}$  sera appelé filtre décroissant associé à  $\mathfrak{S}$ .

Remarque 1. - Un filtre décroissant est plus fin que son filtre circulaire associé.

Remarque 2. - Un filtre circulaire  $\mathfrak{F}$  de  $D$  est égal à son filtre décroissant associé si, et seulement si,  $\Delta(\mathfrak{F}) = \emptyset$ . Inversement, un filtre décroissant  $\mathfrak{F}$  de

$D$  est égal à son filtre circulaire associé si, et seulement si,  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \emptyset$ .

Définitions. - On appelle filtre croissant de  $D$  un filtre  $\mathcal{F}$  qui admet pour base une suite de couronnes de  $D$  de la forme  $D_n = \Gamma(a, r_n, r, D)$ , où  $r_n$  est une suite strictement croissante de limite  $r$ , et où  $a$  est un point de  $D$  indépendant de  $n$ . Le nombre  $r$  est appelé diamètre de  $\mathcal{F}$ , et tout point  $x$  de  $D$  tel que  $|x - a| < r$  est appelé centre de  $\mathcal{F}$ . On note  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  l'ensemble des  $x \in D$  tels que  $|x - a| \geq r$  et  $\mathcal{C}(\mathcal{F}) = D \setminus \mathcal{P}(\mathcal{F})$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un filtre croissant de  $D$  admettant pour base, une suite  $\Gamma(a, r_n, r, D)$ . On appellera filtre circulaire associé à  $\mathcal{F}$  le filtre circulaire  $\overline{\mathcal{F}}$  de  $D$  tel que  $\Delta(\overline{\mathcal{F}}) = d(a, r, D)$ .

Nous dirons que deux filtres croissants  $\mathcal{F}_1$  et  $\mathcal{F}_2$  sont contigus si  $\overline{\mathcal{F}}_1 = \overline{\mathcal{F}}_2$ .

Nous aurons besoin de quelques généralisations de ces notions d'encerclement appliquées au filtre monotone de  $D$ .

Définition. - Soit  $D$  un infraconnexe de  $K$ . Nous dirons qu'un filtre circulaire  $\mathcal{F}$  encercle un filtre monotone  $\mathcal{G}$  si  $\mathcal{F}$  encercle  $\mathcal{G}$ .

Nous dirons qu'un filtre décroissant  $\mathcal{Q}$  encercle un filtre circulaire  $\mathcal{F}$  (resp. un filtre monotone  $\mathcal{G}$ ) si  $\overline{\mathcal{Q}}$  encercle  $\mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{G}$ ).

Nous dirons, enfin, qu'un filtre croissant  $\mathcal{F}$  est étranger à un filtre circulaire  $\mathcal{G}$  si  $\overline{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{G}$  sont étrangers, et nous dirons que  $\mathcal{F}$  est étranger à un filtre croissant  $\mathcal{K}$  si  $\overline{\mathcal{F}}$  et  $\overline{\mathcal{K}}$  sont étrangers.

THÉOREME 1. - Soit  $D$  un infraconnexe fermé borné. Une semi-norme multiplicative continue de  $H(D)$  est une valeur absolue si, et seulement si, son filtre circulaire  $\mathcal{F}$  ne satisfait aucune des quatre conditions (a), (b), (c), (d) suyvantes

- (a)  $\mathcal{F}$  est de Cauchy.
- (b) Il existe un T-filtre croissant étranger à  $\mathcal{F}$ .
- (c) Il existe un T-filtre croissant encerclé par  $\mathcal{F}$ .
- (d) Il existe un T-filtre décroissant qui encercle  $\mathcal{F}$ .

## 2. Existence de valeurs absolues continues.

On se propose maintenant de caractériser les ensembles  $D$  tels que  $H(D)$  soit une algèbre de Banach qui possède au moins une valeur absolue continue.

La description de ces ensembles nécessitera l'utilisation des définitions qui suivent.

Définitions. - Soit  $D$  un infraconnexe fermé borné de  $K$ .

On appellera suite ascendante (resp. descendante) de filtres monotones de  $D$  une

suite de filtres monotones  $n \rightarrow \mathfrak{F}_n$  telle que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{F}_n$  encercle strictement  $\mathfrak{F}_{n-1}$  (resp.  $\mathfrak{F}_{n-1}$  encercle strictement  $\mathfrak{F}_n$ ).

Soit une suite ascendante (resp. descendante) de filtres monotones  $n \rightarrow \mathfrak{F}_n$ ; alors le filtre admettant pour base la suite

$$n \rightarrow (\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Delta(\mathfrak{F}_m) \setminus \Delta(\mathfrak{F}_n)) ; \quad (\text{resp. } n \rightarrow (\Delta(\mathfrak{F}_n) \setminus \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \Delta(\mathfrak{F}_m)))$$

est un filtre  $\mathfrak{F}$  croissant (resp. décroissant ou de Cauchy) qui sera appelé butoir de la suite  $(\mathfrak{F}_n)$ , et  $\mathfrak{F}$  sera appelé circulobutoir de la suite  $(\mathfrak{F}_n)$ .

Remarque. - Soit une suite ascendante (resp. descendante) de filtres croissants (resp. décroissants)  $\mathfrak{F}_n$ , et soit  $\mathfrak{F}$  son butoir. Alors les deux ensembles  $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ , et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\mathfrak{F}_n)$  forment une partition de  $D$ , et la suite  $\mathcal{P}(\mathfrak{F}_n)$  est strictement croissante.

Nous appellerons suite T-complémentaire, toute suite ascendante (resp. descendante) de T-filtres décroissants (resp. croissants) dont le butoir est un T-filtre, et nous appellerons suite T-Cauchy une suite descendante de T-filtres croissants dont le butoir est un filtre de Cauchy.

Rappelons d'autre part que deux filtres monotones  $\mathfrak{F}$  et  $\mathfrak{G}$  de  $D$  sont dits complémentaires si  $\mathcal{P}(\mathfrak{F}) \cup \mathcal{P}(\mathfrak{G}) = D$  [4] et qu'une algèbre de Banach  $H(D)$  est intègre si, et seulement si,  $D$  est un fermé borné infraconnexe sans couple de T-filtres complémentaires ([4], théorème I).

LEMME 2. - Soit  $D$  un infraconnexe de  $K$ . L'ensemble circulobutoir des suites ascendantes (resp. descendantes) de T-filtres décroissants (resp. croissants) de  $D$  est inductif pour la relation d'ordre  $<$  (resp.  $>$ ).

Nous pouvons maintenant caractériser les algèbres de Krasner sans idempotent non trivial qui admettent des valeurs absolues continues.

THÉORÈME 2. - Soit  $D$  un infraconnexe fermé borné. Alors l'algèbre  $H(D)$  possède des valeurs absolues continues pour sa norme  $\|\cdot\|_D$  si, et seulement si,  $D$  est un fermé borné infraconnexe qui n'admet aucun couple de T-filtres complémentaires, ni aucune suite T-complémentaire, ni aucune suite T-Cauchy.

Le théorème 2 peut s'interpréter de la façon suivante. Pour chaque T-filtre  $\mathfrak{F}$  de  $D$ , soit  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  l'idéal des  $f \in H(D)$  annulés par  $\mathfrak{F}$  et tels que  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in \mathcal{P}(\mathfrak{F})$ .

Alors l'ensemble des idéaux maximaux de codimension 1 qui contiennent  $\mathfrak{J}(\mathfrak{F})$  s'identifie à  $\mathcal{P}(\mathfrak{F})$ .

Maintenant, pour chaque idéal  $J$  de  $H(D)$ , soit  $h(J)$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $H(D)$  qui contiennent  $J$ , et supposons que  $H(D)$  soit intègre, mais n'admette pas de valeur absolue continue. Il existe donc ou bien une suite T-

complémentaire, ou bien une suite T-Cauchy.

Supposons d'abord qu'il existe une suite T-complémentaire  $\mathcal{C}_n$ , de butoir  $\mathcal{C}$ . Alors il est immédiat de voir que la suite  $f_n = h(\mathcal{J}(\mathcal{C}_n))_\infty$  est une suite de fermés de Jacobson telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \text{Max } H(D) - h(\mathcal{J}(\mathcal{C})) .$$

De même, s'il existe une suite T-Cauchy  $\mathcal{C}_n$  de limite  $a$ , alors la suite  $F_n = h(\mathcal{J}(\mathcal{C}_n))$  est une suite croissante de fermés telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \text{Max } H(D) - \{\mathcal{M}_a\} .$$

Ainsi dans les deux cas, on voit que  $\text{Max } H(D)$  admet une partition de la forme  $\{(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n), F\}$ , où  $F_n$  est une suite croissante de fermés et  $F$  est un fermé.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ESCASSUT (Alain). - Algèbres d'éléments analytiques en analyse non archimédienne, *Indagationes Mathematicae*, t. 36, 1974, p. 339-351.
- [2] ESCASSUT (Alain). - Eléments analytiques et filtres parcés sur un ensemble infraconnexe, *Annali di Mat. pura ed appl.*, Bologna, t. 110, 1976, p. 335-352.
- [3] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, *Ann. Ins. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, p. 75-110.
- [4] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Krasner intègres et noethériennes, *Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch. Proc.*, series A, t. 79, 1976, p. 109-130.
- [5] ESCASSUT (Alain). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, *Colloquium Math.*, Wroclaw., t. 38, 1978, p. 339-357.
- [6] ESCASSUT (Alain). - Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate, "Prolongements analytiques et algèbres de Banach ultramétriques", *Astérisque*, n° 10, 1973, p. 1-107.
- [7] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, *Indagationes Mathematicae*, t. 37, 1975, p. 327-341.
- [8] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement convexes sur les corps valués, *Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.
- [9] GUENNEBAUD (Bernard). - Sur une notion de spectre pour les algèbres normées ultramétriques, *Thèse Doct. ès Sc.*, Univ. Poitiers, 1973.