

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Systèmes d'équations analytiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 5 (1977-1978), exp. n° 5, p. 1-5

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1977-1978__5__A3_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ANALYTIQUES

par Jean-Paul BEZIVIN

(d'après G. I. GUSEV [1])

Résumé. - On expose un article de G. I. GUSEV, sur les solutions d'un système d'équations analytiques. GUSEV se donne n séries restreintes en n variables, G_i , à coefficients dans l'anneau de valuation d'un corps ultramétrique localement compact K , et étudie le système $G_i(x) = 0$.

1. Définitions et notations.

Soit A un anneau commutatif unitaire, et n et m deux entiers non nuls. Soit B un sous-ensemble de $A^m \times A^n$. Pour α parcourant un certain ensemble d'indices Λ , on note $\bar{M}_\alpha = (M_{\alpha,1}, \dots, M_{\alpha,m})$ et $\bar{N}_\alpha = (N_{\alpha,1}, \dots, N_{\alpha,n})$, deux familles de m -uplets et n -uplets d'idéaux de A .

Définition 1. - On dira que B est concordant pour le système $(\bar{M}_\alpha, \bar{N}_\alpha)$, $\alpha \in \Lambda$, si la condition suivante est réalisée : $\forall x = (x_1, \dots, x_{n+m})$, $\forall y = (y_1, \dots, y_{n+m})$, x et $y \in B$, la relation

$$x_i \equiv y_i [M_{\alpha,i}], \quad \forall \alpha, \quad \forall i \in \{1, m\}$$

$$\text{implique } x_{j+m} \equiv y_{j+m} [N_{\alpha,j}], \quad \forall \alpha \in \Lambda, \quad \forall j \in \{1, n\}.$$

Définition 2. - On dira que B est totalement concordant si la propriété réciproque est vérifiée : $\forall x$ et $\forall y$ dans B , si l'on a

$$x_{j+m} \equiv y_{j+m} [N_{\alpha,j}], \quad \forall \alpha, \quad \forall j,$$

alors

$$x_i \equiv y_i [M_{\alpha,i}], \quad \forall \alpha, \quad \forall i.$$

Dans la suite, on prendra $A = V$, anneau de valuation d'un corps ultramétrique localement compact K , on fera $n = m$, et on prendra B comme image d'une application de V^n dans $V^n \times V^n$, notée $H = (F_1, \dots, F_n, G_1, \dots, G_n)$. On notera $\bar{F} \mathcal{S} \bar{G} [\bar{M}_\alpha, \bar{N}_\alpha]$ si B est concordant, et $\bar{F} \mathcal{R} \bar{G}$ s'il est totalement concordant, avec $\bar{F} = (F_1, \dots, F_n)$ et $\bar{G} = (G_1, \dots, G_n)$.

On note π une uniformisante de V , et ρ sa valeur absolue. La valuation sera notée v , et supposée normalisée par $v(\pi) = 1$. Tout idéal de V est principal, et engendré par une puissance de π . L'idéal maximal de V est noté $\mathfrak{p}$.

2. Propriétés des systèmes concordants et totalement concordants.

PROPOSITION 1. - On suppose que l'on a deux applications $\bar{F}$ et $\bar{T}$ de V^n dans V^n , et n suites d'entiers $d_k^{(i)}$ non décroissantes, telles que :

- (a) $\bar{T}(x) \equiv 0 \quad [(\rho^{d_1^{(i)}})]$,
 (b) $\bar{F} \leq \bar{T} \quad [(\rho^{d_k^{(i)}}), (\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$.

Alors, si l'on pose $\bar{G} = \bar{F} + \bar{T}$, on a $\bar{F} \leq \bar{G} \quad [(\rho^{d_k^{(i)}}), (\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$.

Preuve. - On procède par récurrence sur l'entier k . Pour $k = 1$, la propriété est triviale. Supposons que

$$\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [(\rho^{d_k^{(i)}})] \iff \bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [(\rho^{d_k^{(i)}})],$$

et soient x et y dans V^n tels que $\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$. On a alors, par l'hypothèse (b), $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [(\rho^{d_{k+2}^{(i)}})]$, donc $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$ puisque les suites $d_k^{(i)}$ sont non décroissantes, et par suite

$$\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})].$$

Supposons maintenant que $\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$. On a alors $\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(y) \quad [(\rho^{d_k^{(i)}})]$ donc, par l'hypothèse de récurrence, $\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [(\rho^{d_k^{(i)}})]$, et par suite $\bar{T}(x) \equiv \bar{T}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$, donc que

$$\bar{F}(x) \equiv \bar{F}(y) \quad [(\rho^{d_{k+1}^{(i)}})]$$

par différence.

Remarque 1. - Ici le résultat est valable dans un anneau quelconque, l'idéal ρ et les suites d'entiers étant fixées comme ci-dessus.

PROPOSITION 2. - On se donne n suites d'entiers $d_k^{(i)}$ telles que $d_k^{(i)} \rightarrow +\infty$, si $k \rightarrow +\infty$, et deux fonctions $\bar{F}$ et $\bar{G}$ de V^n dans V^n telles que :

- (a) $\bar{G} \leq \bar{F} \quad [(\rho^{d_k^{(i)}}), (\rho^{d_k^{(i)}})]$,
 (b) $\bar{G}$ est continue,
 (c) $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$.

Alors on a $\bar{G}(V^n) = \bar{F}(V^n)$.

Preuve. - Soit x_0 dans V^n , il s'agit de montrer qu'il existe z_0 dans V^n tel que $\bar{F}(x_0) = \bar{G}(z_0)$. Pour cela, on réalise la partition de $\bar{F}(V^n)$ et de $\bar{G}(V^n)$

modulo $[\rho^{d_k^{(i)}}]$ en classes $K_1^{(k)}, \dots, K_{t_k}^{(k)}$ et $L_1^{(k)}, \dots, L_{s_k}^{(k)}$ respectivement. On montre d'abord qu'il y a le même nombre de classes. Il est clair que, $\forall i \in [1, s_k]$, il existe un unique $j \in [1, t_k]$ tel que $L_i^{(k)} \subset K_j^{(k)}$. On en

déduit que $t_k \geq s_k$.

Soient maintenant $x_1, \dots, x_{t_k}$ dans V^n , tels que les $\bar{F}(x_j)$ constituent des représentants des classes $K_j^{(k)}$. D'après la condition (a), il est clair que les $\bar{G}(x_j)$ sont non congrus modulo $[\rho^{d(i)k}]$, donc $s_k \geq t_k$, et l'égalité annoncée.

Dans la classe de $\bar{F}(x_0)$, il existe donc un élément de $\bar{G}(V^n)$, donc, pour tout k , il existe un z_k dans V^n tel que $\bar{G}(z_k) \equiv \bar{F}(x_0) \pmod{[\rho^{d(i)k}]}$. Puisque V est supposé compact, il existe une sous-suite convergente de z_k de limite z_0 ; il est clair que l'on a alors $\bar{G}(z_0) = \bar{F}(x_0)$.

3. Systèmes d'équations.

THÉOREME 1. - On se donne :

- (a) Un système de formes linéaires indépendantes, à coefficients dans V ,
 $F_i(x) = \sum_{j=1}^{j=n} a_{i,j} x_j$,
- (b) Une suite d'entiers d_m , strictement croissante,
- (c) Un système S_i de fonctions de V^n dans $V \cap \rho^{\Delta_0 - \Delta}$, où $\Delta_0 = v(\det(a_{i,j}))$,
et Δ est un entier quelconque $\geq d_1$.

Si le système satisfait à $\bar{X} \not\equiv \bar{S} \pmod{[(\rho^{d_m - \Delta_0}), (\rho^{d_{m+1} - \Delta})]}$, alors si $\bar{G} = \bar{F} + \pi^\Delta \bar{S}$,
on a

$$\bar{F} \not\equiv \bar{G} \pmod{[(\rho^{d_m}), (\rho^{d_m})]} \text{ et } \bar{F}(V^n) = \bar{G}(V^n).$$

Preuve. - L'hypothèse faite sur $\bar{F}$ montre que $\bar{F} \not\equiv \bar{X} \pmod{[(\rho^{d_m}), (\rho^{d_m - \Delta_0})]}$. On obtient donc que $\bar{F} \not\equiv \bar{S} \pmod{[(\rho^{d_m}), (\rho^{d_{m+1} - \Delta})]}$, d'où, d'après la proposition 1, $\bar{F} \not\equiv \bar{G} \pmod{[(\rho^{d_m}), (\rho^{d_m})]}$. On a facilement $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$, en résolvant le système par la règle de CRAMER. D'autre part, l'hypothèse $\bar{X} \not\equiv \bar{S} [\dots]$, implique $\bar{S}$ continue, donc aussi $\bar{G}$. La proposition 2 donne alors $\bar{G}(V^n) = \bar{F}(V^n)$.

Remarque 2. - Les conclusions du théorème 1 sont vraies sous des hypothèses plus faibles. En effet, remarquons que la condition $\bar{X} \not\equiv \bar{S} \pmod{[(\rho^{d_m - \Delta_0}), (\rho^{d_{m+1} - \Delta})]}$ implique (si l'on prend sur V^n la norme "sup des coordonnées")

$$\rho^\Delta \|S(x) - S(y)\| \leq \rho^{1+\Delta_0} \|x - y\|.$$

On garde alors l'hypothèse (a), on suppose simplement K complet, et on note $\lambda = |\det(a_{i,j})|$. On se donne une application $\bar{T}$ de V^n dans V^n , vérifiant

$$\|\bar{T}(x) - \bar{T}(y)\| \leq \theta \lambda \|x - y\| \quad \text{où } \theta \in [0, 1[$$

et on suppose $\|\bar{T}(x)\| \leq \lambda$, $\forall x$ dans V^n .

Alors pour $\bar{G} = \bar{F} + \bar{T}$, on a encore les conclusions du théorème 1. En effet, on vérifie facilement que

$$\|\bar{T}(x) - \bar{T}(y)\| \leq \theta \|\bar{F}(x) - \bar{F}(y)\| ,$$

d'où

$$\|\bar{F}(x) - \bar{F}(y)\| = \|\bar{G}(x) - \bar{G}(y)\| .$$

L'hypothèse $\|\bar{T}(x)\| \leq \lambda$ donne comme précédemment que $\bar{G}(V^n) \subset \bar{F}(V^n)$, et l'autre inclusion est simplement un théorème de point fixe pour l'application

$$x \longrightarrow x_0 - \bar{F}^{-1}(\bar{T}(x)) = \bar{U}(x) ;$$

on vérifie facilement que $\|\bar{U}(x) - \bar{U}(y)\| \leq \theta \|x - y\|$. On a alors les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. - Dans les conditions du théorème 1, pour tout c dans V^n , le système $\bar{G}(x) - c = 0$ a une unique solution $\iff$ le système $\bar{F}(x) - c = 0$ a une unique solution.

COROLLAIRE 2. - Soient $G_1, \dots, G_n$, n séries restreintes à coefficients dans V , et un point x_0 de V où $J(\bar{G}(x_0)) \neq 0$, où J est le jacobien du système. On pose $\Delta_0 = v(J(\bar{G}(x_0)))$, et on suppose que, $\forall i$, $G_i(x_0)$ appartient à $\rho^{2\Delta_0+1}$. Alors, dans le disque circonferentié $D(x_0, \rho^{\Delta_0+1})$, le système $\bar{G}(x) = 0$ a une unique solution.

Preuve. - On suppose $x_0 = 0$, et on écrit

$$G_i(x) = G_i(0) + F_i(x) + T_i(x) ,$$

où F_i est la partie linéaire de G_i , et

$$T_i(x) = \sum_{|r| \geq 2} b_r^{(i)} x^r , \quad r = (r_1, \dots, r_n) , \quad |r| = r_1 + r_2 + \dots + r_n .$$

On se ramène dans V^n en posant $x = \pi^{-\Delta_0-1} t$. On note alors

$$G_i^*(x) = \pi^{-\Delta_0-1} , \quad G_i(x) = \pi^{-\Delta_0-1} G_i(0) + F_i(t) + T_i^*(t) .$$

On vérifie facilement que $T_i^*(t) \in \rho^{2\Delta_0+1}$, $\forall t$ dans V^n , et que l'on a

$$\|T_i^*(t) - T_i^*(t')\| \leq \rho^{1+\Delta_0} \|t - t'\| , \quad \forall t, t' \text{ dans } V^n .$$

Pour le système F_i et le système $R_i = F_i + T_i^*$, on est donc dans les conditions du théorème 1. Le corollaire 1 nous indique qu'il suffit de regarder le système $F_i(x) = -\pi^{-\Delta_0-1} G_i(0)$. L'hypothèse faite sur les $G_i(0)$ permet alors de conclure.

Remarque 3. - On peut bien entendu donner une version de ce corollaire dans le cas où K est supposé simplement complet, en utilisant la remarque 2.

4. Applications.

PROPOSITION 3. - Soit un système G_i de n séries restreintes à coefficients dans V , tel que, $\forall x$ dans V^n , $J(G(x)) \neq 0$. Alors le système $\bar{G}(x) = 0$ a un nombre fini de solutions dans V^n .

Preuve. - A chaque solution x_0 de $\bar{G}(x) = 0$, on associe le disque circonferencié $D(x_0, \rho^{1+\Delta_0})$, où Δ_0 est entier tel que $|J(\bar{G}(x))| \geq \rho^{\Delta_0}$, $\forall x$ dans V^n . Dans ce disque, d'après le corollaire 2, x_0 est la seule solution de $\bar{G}(x) = 0$. Si q est le cardinal du corps résiduel de K , il y a au plus $q^{n(\Delta_0+1)}$ tels disques distincts, donc il y a au plus $q^{n(\Delta_0+1)}$ solutions au système $\bar{G}(x) = 0$.

PROPOSITION 4. - Soit $x_0 \in V^n$ et supposons que $J(\bar{G}(x_0)) \neq 0$. Soit Δ_0 un entier tel que $\rho_n^{\Delta_0} \leq |J(\bar{G}(x_0))|$. On se donne $d_1, \dots, d_m$ dans V , et une unité de V , ε , tels que

$$|\sum_1^m d_k - \varepsilon| \leq \rho^{\Delta_1}, \text{ où } \Delta_1 = \sup(0, (2\Delta_0 + 1) - \inf v(G_i(x_0))) .$$

Alors, pour tout choix de $x_1, \dots, x_m$ dans le disque circonferencié $D(x_0, \rho^{\Delta_0+1})$, il existe y dans ce disque tel que

$$\sum_1^m d_k G_i(x_k) = \varepsilon G_i(y), \quad \forall i \in \{1, n\} .$$

La preuve est analogue à celle des autres propositions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUSEV (G. I.). - Concordant and totally concordant systems of functions in non archimedean valued fields [en russe], Issled. Teor. Čisel, t. 5, 1975, p. 22-44.

(Texte reçu le 18 janvier 1978)

Jean-Paul BEZIVIN
Mathématiques, Tour 46,
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05