

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Idéaux de fonctions analytiques bornées stables par dérivation

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 7, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A6_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

IDÉAUX DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES
 STABLES PAR DÉRIVATION

par Jean-Paul BEZIVIN

On note K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos. Le disque unité "ouvert" D de K est l'ensemble $D = \{x \in K ; |x| < 1\}$. On note B l'ensemble des fonctions analytiques bornées sur D , qui s'identifie à l'espace des séries $f = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ avec $\sup |a_n| < +\infty$. On en fait une algèbre de Banach à norme multiplicative en posant $\|f\| = \sup |a_n|$.

1. Rappels.

On rappelle un résultat de [1], généralisation d'un théorème de M. Van der PUT [2], et se démontrant de manière analogue.

PROPOSITION 1. - Soit $f_h \in B$ une suite de fonctions analytiques bornées sur D , telles que $\|f_h\| \rightarrow 0$ si $h \rightarrow +\infty$. Soit $g \in B$, on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, $\forall x \in D$, on ait

$$|g(x)| \leq c(\sup_h |f_h(x)|)^2.$$

Alors il existe une suite t_h d'éléments de B vérifiant

$$1^\circ \sup_h \|t_h\| < +\infty,$$

$$2^\circ g = \sum_{h=0}^{+\infty} t_h f_h.$$

On en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. - Soit $f_h \in B$, telles que $\|f_h\| \rightarrow 0$ si $h \rightarrow +\infty$, et soit J l'idéal de B engendré par les f_h . Alors,

$$J = B \iff \inf_{x \in D} \sup_h |f_h(x)| = \delta > 0.$$

2. Idéaux stables par dérivation.

On veut étudier les idéaux de B stables par dérivation. On commence par montrer qu'il y en a, et caractériser les $f \in B$ qui peuvent appartenir à de tels idéaux.

PROPOSITION 2. - Soit $f \in B$. Pour qu'il existe un idéal I de B , stable par dérivation, propre et contenant f , il faut et il suffit que l'on ait (*) :

$$(*) \quad \inf_{x \in D} \sup_h |f^{(h)}(x)| = 0.$$

Preuve. - Soit I un idéal propre, stable par dérivation, contenant f . On a $\|f^{(h)}\| \leq |h|! \|f\|$, d'où on déduit $\|f^{(h)}\| \rightarrow 0$ si $h \rightarrow +\infty$.

On peut alors appliquer le corollaire 1 aux $f^{(h)}$. Si (*) n'était pas réalisé, l'idéal $J = (f, f', \dots, f^{(h)}, \dots)$ serait égal à B ; or il est inclus dans I , d'où une contradiction.

Réciproquement, soit

$$I = \{g; \exists t_h \in B, \sup \|t_h\| < +\infty \text{ et } g = \sum t_h f^{(h)}\}.$$

Il est clair que I est un idéal, stable par dérivation; s'il était égal à B , on aurait une égalité

$$1 = \sum t_h f^{(h)} \text{ avec } \sup \|t_h\| = A < +\infty.$$

D'où

$$1 \leq \sup |t_h(x)| |f^{(h)}(x)| \leq A \sup |f^{(h)}(x)|,$$

ce qui constituerait une contradiction avec (*).

Donnons un autre critère. Soit $\sigma \in |K|$, $0 < \sigma \leq \text{Rcv}(e^x)$.

PROPOSITION 3. - Pour que (*) soit vérifiée, il faut et il suffit qu'il existe une suite de disques $D_m = D(X_m, \sigma)$, telle que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \|f\|_{D_m} = 0$ (où l'on a noté $\|f\|_{D_m} = \sup_{x \in D_m} |f(x)|$).

Preuve. - Soit $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, et considérons l'ensemble $E_m(f) = \{x \in D; \sup |f^{(h)}(x)| \leq 1/m\}$. Si (*) est réalisé, $E_m(f) \neq \emptyset$, $\forall m \geq 1$. Soit $x_m \in E_m(f)$ et $\alpha \in K$, $|\alpha| \leq \sigma$. On a alors

$$f(X_m + \alpha) = \sum_{h \geq 0} \frac{\alpha^h}{h!} f^{(h)}(X_m).$$

Comme $|\alpha| \leq \sigma$, on a $\sup_h \frac{|\alpha|^h}{|h!|} \leq 1$, d'où

$$|f(X_m + \alpha)| \leq \sup_h \left(\frac{|\alpha|^h}{|h!|} |f^{(h)}(X_m)| \right) \leq \frac{1}{m}.$$

D'où $\|f\|_{D(X_m, \sigma)} \leq 1/m$, et le résultat.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, et $q \in \mathbb{N}$ tel que $\|f^{(p)}\| \leq \varepsilon$ pour $p \geq q$.

Choisissons k tel que $\|f\|_{D(X_h, \sigma)} \leq \varepsilon^q$. On a

$$\|f^{(s)}\|_{D(X_h, \sigma)} \leq \frac{\|f\|}{\sigma^q} D(X_h, \sigma).$$

Si l'on prend alors un élément x_0 quelconque dans $D(X_h, \sigma)$, on a

$$|f^{(s)}(x_0)| \leq \varepsilon \text{ si } s \geq q,$$

$$|f^{(s)}(x_0)| \leq \frac{\varepsilon \sigma^q}{\sigma^s} \leq \varepsilon \text{ si } s \leq q,$$

d'où

$$\inf_{x \in D} \sup_{s \in \mathbb{N}} |f^{(s)}(x)| = 0.$$

Ce résultat permet de construire des f vérifiant (*). Par exemple, soit $x_h \in D$, $x_h \neq 0$, tels qu'il existe une suite $n_h \in \mathbb{N}$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} n_h = +\infty$, et vé-

rifiant $\prod_{h \geq 0} |X_h|^{n_h} > 0$. On sait alors qu'il existe $f \in B$ vérifiant $f \neq 0$, $f \equiv 0 \pmod{(X - X_h)^{n_h}}$. Une telle fonction vérifie le critère de la proposition 3 ; en effet, $f = (X - X_h)^{n_h} g_h$, $\forall h$, avec $g_h \in B$, d'où on déduit d'abord $\|f\| = \|g_h\|$, puis

$$\|f\|_{D(X_h, \sigma)} \leq \sigma^{n_h} \|g_h\|.$$

Comme $\sigma < 1$, $\sigma^{n_h} \rightarrow 0$, d'où le résultat.

On peut aussi se donner, au lieu d'un zéro multiple, d'ordre n_h , n_h zéros distincts situés dans $D(X_h, \sigma)$.

On aura le même résultat. En particulier, il n'est pas besoin que f possède des zéros d'ordre tendant vers $+\infty$ pour que f vérifie (*).

A partir de maintenant, on se fixe $\sigma \in |K|$, $0 < \sigma \leq \text{Rcv}(e^x)$. La relation $x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leq \sigma$ est une relation d'équivalence sur D , on note D_λ , $\lambda \in \Lambda$ les classes d'équivalences, qui sont des disques fermés de rayon σ .

PROPOSITION 4. - Soit I un idéal non réduit à $\{0\}$ et propre de B , stable par dérivation. Alors il existe un filtre \mathfrak{F} sur Λ , tel que

$$f \in I \implies \lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_\lambda = 0,$$

où l'on a noté $\|f\|_\lambda = \|f\|_{D_\lambda} = \sup_{x \in D_\lambda} |f(x)|$.

Preuve. - Pour $f \in I$, $f \neq 0$, soit $A_\varepsilon(f) = \{\lambda \in \Lambda ; \|f\|_\lambda < \varepsilon\}$, où ε est un réel strictement positif. D'après la proposition 3, puisque I est stable par dérivation, on a $A_\varepsilon(f) \neq \emptyset$. On va montrer que l'ensemble des intersections finies $A_{\varepsilon_1}(f_1) \cap \dots \cap A_{\varepsilon_n}(f_n)$ (où les $f_i \in I$ et les $\varepsilon_i > 0$), forment une base de filtre sur Λ . Il suffit clairement de démontrer que chaque intersection finie est non vide ; on voit facilement qu'il suffit de le faire pour $\varepsilon_i = \varepsilon > 0$, $\forall i = 1, \dots, n$.

Considérons les $f_i^{(h)}$, $i = 1, \dots, n$, $h \in \mathbb{N}$. Cet ensemble forme visiblement une suite g_m d'éléments de B tels que $\|g_m\| \rightarrow 0$ si $m \rightarrow +\infty$.

On peut alors leur appliquer le corollaire de la proposition 1, d'où, $\forall \varepsilon > 0$,

$$E_\varepsilon = \{x \in D ; \sup_{i,h} |f_i^{(h)}(x)| \leq \varepsilon\}$$

est non vide. Soit $x_0 \in E_\varepsilon$; on voit facilement que l'on a, $\forall i$, $\|f_i\|_{D(x_0, \sigma)} \leq \varepsilon$. Si D_λ est la classe de x_0 , on aura donc $\lambda \in A_\varepsilon(f_1) \cap \dots \cap A_\varepsilon(f_n)$, d'où le résultat.

Soit \mathfrak{F} le filtre sur Λ , engendré par cette base de filtre. Il est clair que, $\forall f \in I$, $\lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_\lambda = 0$, ce qui termine la démonstration.

3. Idéaux premiers fermés stables par dérivation.

PROPOSITION 5.

(a) Soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur Λ , alors si l'on note $\varphi_{\mathcal{U}}$ l'application $f \in B \rightarrow \varphi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{\lambda}$, $\varphi_{\mathcal{U}}$ est une semi-norme multiplicative continue, dont le noyau $\text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}} = \{f ; \varphi_{\mathcal{U}}(f) = 0\}$ est un idéal premier fermé, stable par dérivation de B (éventuellement réduit à $\{0\}$).

(b) Pour tout idéal propre I , et stable par dérivation, il existe un idéal du type $\text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}}$ tel que $I \subset \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}}$.

Preuve.

(a) $\varphi_{\mathcal{U}}$ est clairement une semi-norme multiplicative et continue, et l'on voit facilement que l'on a

$$\forall f \in B, \quad \varphi_{\mathcal{U}}(f') \leq \frac{1}{\sigma} \varphi_{\mathcal{U}}(f),$$

d'où la stabilité par dérivation.

(b) La proposition 4 fournit un filtre \mathfrak{F} sur Λ tel que $f \in I \Rightarrow \lim_{\mathfrak{F}} \|f\|_{\lambda} = 0$. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre plus fin que \mathfrak{F} , il est clair qu'alors on a $I \subset \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}}$, qui est premier, fermé, stable par dérivation d'après (a).

Soit \mathcal{P} un idéal du type $\text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}}$, \mathcal{U} ultrafiltre sur Λ (qui correspond toujours au $\sigma \in |K|$ tel que $0 < \sigma \leq \text{Rcv}(\exp(x))$). La présence du rayon de convergence de l'exponentielle peut sembler surprenante, la proposition suivante montre qu'elle est artificielle.

PROPOSITION 6. - On note Λ_{σ} les classes d'équivalence de D pour la relation $x \mathcal{R} y \iff |x - y| \leq \sigma$, et Λ_r celles relatives à la relation $|x - y| \leq r$, où r est dans $(\sigma, 1[$. Soit \mathcal{U}_{σ} un ultrafiltre sur Λ_{σ} , et $\mathcal{P} = \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}_{\sigma}}$. Alors il existe un ultrafiltre \mathcal{U}_r sur Λ_r tel que

$$\mathcal{P} = \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}_{\sigma}} = \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}_r}.$$

Preuve. - Soit $a \in D$, r et $R \in]0, 1[$. On a, en désignant par

$$N_a(f, r) = \text{Card}[\text{Zéros de } f \text{ dans } D(a, r^+)],$$

$$n_a(f, r) = \text{Card}[\text{Zéros de } f \text{ dans } D(a, r^-)],$$

$$|f|_a(r) = \sup_{|x-a| \leq r} |f(x)| \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{N_a(f, r)} |f|_a(R)$$

et

$$|f|_a(r) \geq \left(\frac{r}{R}\right)^{n_a(f, R)} |f|_a(R).$$

Soit $\lambda \in \Lambda_{\sigma}$. On note

$$\|f\|_{\lambda, \sigma} = \sup_{x \in D(x_{\lambda}, \sigma)} |f(x)| \quad \text{et} \quad \|f\|_{\lambda, r} = \sup_{x \in D(x_{\lambda}, r)} |f(x)|.$$

On a alors

$$\|f\|_{\lambda,r} \geq \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{n_\lambda(f,r)} \|f\|_{\lambda,\sigma}.$$

Deux cas se présentent alors :

1° Si $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} n_\lambda(f, r) < +\infty$, on déduit de $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0$ que

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0.$$

2° Si $\lim_{\mathcal{U}_\sigma} n_\lambda(f, r) = +\infty$, on a

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} N_\lambda(f, r) = +\infty,$$

et, $\forall R, 1 > R > r$,

$$\|f\|_{\lambda,r} \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{N_\lambda(f,r)} \|f\|_{\lambda,r}.$$

D'où en faisant tendre R vers 1, $R < 1$:

$$\|f\|_{\lambda,r} \leq r^{N_\lambda(f,r)} \|f\|.$$

D'où encore

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0.$$

Donc

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0 \implies \lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,r} = 0.$$

Mais comme $\|f\|_{\lambda,\sigma} \leq \|f\|_{\lambda,r}$, la réciproque est trivialement vraie.

Enfin, on obtient Λ_r à partir de Λ_σ par la relation d'équivalence sur des représentants x_λ des classes de D modulo \mathcal{R} par

$$\lambda \mathcal{S} \lambda' \iff |x_\lambda - x_{\lambda'}| \leq r.$$

Si l'on note \mathcal{U}_r l'image de l'ultrafiltre \mathcal{U}_σ sur Λ_r , on obtient un ultrafiltre, et il est clair que

$$\lim_{\mathcal{U}_\sigma} \|f\|_{\lambda,\sigma} = 0 \iff \lim_{\mathcal{U}_r} \|f\|_{\lambda,r} = 0,$$

d'où le résultat.

Une question posée par M. Van der PUT concerne l'existence d'idéaux maximaux de B , stables par dérivation [2]. On ne résout pas ici cette question, mais la proposition 5 admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE. - Soit \mathfrak{M} un idéal maximal stable par dérivation. Alors :

1° Il existe un ultrafiltre \mathcal{U} sur Λ tel que $\mathfrak{M} = \text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}}$.

2° Il existe une famille x_λ , $\lambda \in \Lambda$, et un ultrafiltre \mathcal{U} sur Λ tel que

$$\mathfrak{M} = \{f ; \lim_{\mathcal{U}} |f(x_\lambda)| = 0\}.$$

Preuve. - Le 1° est immédiat à partir de la proposition 5. Pour le 2°, on se donne x_λ représentants des classes d'équivalence de Λ . On a

$$|f(x_\lambda)| \leq \|f\|_{\lambda,\sigma}.$$

Soit $\varphi_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{\lambda}$ et $\bar{\varphi}_{\mathcal{U}}(f) = \lim_{\mathcal{U}} |f(x_{\lambda})|$.

Il est clair que, $\forall f \in B$, $\bar{\varphi}_{\mathcal{U}}(f) \leq \varphi_{\mathcal{U}}(f)$, d'où

$$\text{Ker } \varphi_{\mathcal{U}} \subset \text{Ker } \bar{\varphi}_{\mathcal{U}} \subset B, \\ \neq$$

d'où le résultat.

4. Chânes croissantes d'idéaux premiers fermés stables par dérivation.

Dans cette partie, on suppose K maximalement complet. On montre que, dans ce cadre, il existe des chaînes infinies strictement croissantes d'idéaux premiers fermés, stables par dérivation.

LEMME 1. - Soit x_h une suite d'éléments de D , et $\theta_h \in]0, 1[$, $\forall h$, telle qu'il existe $\delta > 0$, $\theta_h \geq \delta$, $\forall h \in \mathbb{N}$. Soit \mathcal{U} un ultrafiltre sur \mathbb{N} . On note $D_h = D(x_h, \theta_h)$. Alors $\mathcal{P} = \{f \in B; \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{D_h} = 0\}$ est un idéal premier, fermé, stable par dérivation (éventuellement réduit à $\{0\}$).

Preuve. - Il suffit de vérifier la stabilité par dérivation, qui provient de la relation

$$\|f'\|_{D_h} \leq \frac{1}{\theta_h} \|f\|_{D_h} \leq \frac{1}{\delta} \|f\|_{D_h}.$$

Si l'on fixe la suite x_h et l'ultrafiltre \mathcal{U} , le lemme suivant donne une condition suffisante sur deux suites θ_h et τ_h pour que les idéaux associés par le lemme 1 soient identiques.

LEMME 2. - Soient τ_h et θ_h deux suites d'éléments de $]0, 1[$ tels que θ_h et τ_h tendent vers 1 si $h \rightarrow +\infty$. Alors si $\lim_{\mathcal{U}} (1 - \tau_h)/(1 - \theta_h) \in]0, +\infty[$, les idéaux associés par le lemme 1 sont égaux.

Preuve. - On a d'abord que si $E_1 = \{h; \tau_h \leq \theta_h\}$ et $E_2 = \{h; \theta_h \leq \tau_h\}$, $E_1 \cup E_2 = \mathbb{N}$. Comme \mathcal{U} est un ultrafiltre, E_1 ou E_2 est dans \mathcal{U} : on peut donc supposer que $\theta_h \geq \tau_h$, $\forall h \in \mathbb{N}$.

On a encore

$$|f|_h(\tau_h) \geq \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f, \theta_h)} |f|_h(\theta_h) \quad (\text{avec des notations évidentes}).$$

Si $\lim_{\mathcal{U}} \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f, \theta_h)} \neq 0$, de $\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\tau_h) = 0$, on déduit

$$\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0.$$

Si $\lim_{\mathcal{U}} \left(\frac{\tau_h}{\theta_h}\right)^{n_h(f, \theta_h)} = 0$, on voit facilement que l'on a

$$\lim_{\mathcal{U}} n_h(f, \theta_h)(1 - \theta_h) = +\infty,$$

donc aussi

$$\lim_{\mathcal{U}} N_h(f, \theta_h)(1 - \theta_h) = +\infty,$$

et comme l'on a

$$|f|_h(\theta_h) \leq \theta_h^{N_h(f, \theta_h)} \|f\| ,$$

on a trivialement

$$\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0 .$$

Donc $\lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\tau_h) = 0 \implies \lim_{\mathcal{U}} |f|_h(\theta_h) = 0$, et l'implication réciproque étant triviale, on a le résultat annoncé.

Le lemme 2 nous indique que c'est l'ordre de croissance de θ_h vers 1 qui est important.

On peut maintenant construire un exemple de chaîne strictement croissante d'idéaux premiers fermés stables par dérivation.

On se donne une suite x_h , vérifiant

$$1^\circ |x_{h+1}| > |x_h| , \quad \forall h , \quad |x_0| > 0 ,$$

$$2^\circ \prod_{h \in \mathbb{N}} |x_h| > 0 .$$

Dans ces conditions, on montre facilement qu'il existe deux suites d'entiers n_h et q_h , $h \in \mathbb{N}$, telles que

$$3^\circ \prod_{h \in \mathbb{N}} |x_h|^{n_h} > 0 ,$$

$$4^\circ \lim_{h \rightarrow +\infty} q_h = +\infty , \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{n_h}{q_h} = +\infty , \quad n_h \geq q_h \geq 2 , \quad \forall h .$$

LEMME 3. - Il existe une suite double d'entiers $m_h^{(\ell)}$, vérifiant

$$(a) \quad n_h \geq m_h^{(\ell)} \geq m_h^{(\ell+1)} \geq q_h , \quad \forall h , \quad \forall \ell ,$$

$$(b) \quad m_h^{(0)} = n_h ,$$

$$(c) \quad \lim_{h \rightarrow +\infty} (m_h^{(\ell)}) / (m_h^{(\ell+1)}) = +\infty , \quad \forall \ell \text{ fixé} .$$

Preuve. - Par récurrence, construisons $m_h^{(1)}$ par exemple. On prend

$$m_h^{(1)} = q_h \left[\sqrt{\frac{n_h}{q_h}} \right]$$

(où $[]$ désigne la partie entière), et on vérifie que $m_h^{(1)}$ ainsi défini convient.

Soit maintenant un ultrafiltre \mathcal{U} sur \mathbb{N} , non trivial, fixé dans tout ce qui suit.

On définit $\theta_h^{(\ell)}$ par $\theta_h^{(\ell)} = 1 - \frac{1}{m_h^{(\ell)}}$. On a alors

$$\theta_h^{(\ell+1)} \leq \theta_h^{(\ell)} , \quad \forall \ell , \quad \forall h \text{ et } \theta_h^{(\ell)} \geq \frac{1}{2} , \quad \forall h , \quad \forall \ell ,$$

Si $\ell \in \mathbb{N}$ et $f \in B$, on pose

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{U}, \ell}(f) = \lim_{\mathcal{U}} \|f\|_{D(x_h, \theta_h^{(\ell)})} .$$

D'après le lemme 1, $\text{Ker } \mathfrak{F}_{\mathcal{U}, \ell} = \mathcal{P}_\ell$ est un idéal premier, fermé, stable par dérivation.

PROPOSITION 7. - La suite \mathcal{P}_ℓ , $\ell \in \mathbb{N}$, est une suite strictement croissante d'idéaux premiers, fermés, stables par dérivation.

Preuve. - On remarque tout d'abord que la suite est trivialement croissante, puisque $\theta_h^{(\ell+1)} < \theta_h^{(\ell)}$; d'où $\Phi_{u, \ell+1}(f) \leq \Phi_{u, \ell}(f)$, $\forall f$, et $\mathcal{P}_\ell \subset \mathcal{P}_{\ell+1}$. Pour montrer que les \mathcal{P}_ℓ forment une suite strictement croissante, on va exhiber $f_\ell \in B$ tel que

$$f_\ell \in \mathcal{P}_{\ell+1} \text{ et } f_\ell \notin \mathcal{P}_\ell .$$

On a $n_h \geq m_h^{(\ell)}$, $\forall h$. Par suite, on a

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{m_k^{(\ell)}} > 0 .$$

On sait alors qu'il existe f_ℓ dans B , tel que f_ℓ admette x_h comme zéro à l'ordre exactement $m_k^{(\ell)}$, et ne s'annule pas ailleurs (parce que K est maximallement complet, voir [2]).

Montrons que $f_\ell \in \mathcal{P}_{\ell+1}$. On a $\forall k$, $f_\ell(x) = (x - x_k)^{m_k^{(\ell)}} \lambda_{k, \ell}(x)$, relation d'où on déduit

$$\|f_\ell\| = \|\lambda_{k, \ell}\| ,$$

puis

$$\|f_\ell\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell+1)})} \leq [\theta_k^{(\ell+1)}]^{m_k^{(\ell)}} \|f_\ell\| .$$

Mais

$$\theta_k^{(\ell+1)} = 1 - \frac{1}{m_k^{(\ell+1)}} \text{ et } \frac{m_k^{(\ell)}}{m_k^{(\ell+1)}} \rightarrow +\infty \text{ si } k \rightarrow +\infty ,$$

d'où

$$\lim_u \|f_\ell\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell+1)})} = \Phi_{u, \ell+1}(f) = 0 ,$$

et le fait que $f_\ell \in \mathcal{P}_{\ell+1}$.

Montrons que $f_\ell \notin \mathcal{P}_\ell$. On a

$$f_\ell(x) = (x - x_k)^{m_k^{(\ell)}} \lambda_{k, \ell}(x) .$$

On en déduit, en posant $r_k = |x_k|$, que

$$\|f_\ell\|_{D(0, r_k)} = r_k^{m_k^{(\ell)}} \|\lambda_{k, \ell}\|_{D(0, r_k)} .$$

Comme $\prod_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{m_k^{(\ell)}} > 0$, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k^{m_k^{(\ell)}} = 1$, donc

$$\|\lambda_{k, \ell}\|_{D(0, r_k)} \rightarrow \|f_\ell\| \text{ si } k \rightarrow +\infty .$$

On a d'autre part

$$\|f_\ell\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell)})} = [\theta_k^{(\ell)}]^{m_k^{(\ell)}} \|\lambda_{k, \ell}\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell)})} .$$

Pour k assez grand, f_ℓ n'a que x_k pour zéros sur $|x| = |x_k| = r_k$. Donc

$\lambda_{k,\ell}$ n'a plus de zéros sur $|x| = r_k$. On en déduit que l'on a

$$\|\lambda_{k,\ell}\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell)})} = \|\lambda_{k,\ell}\|_{D(0, r_k)}.$$

Enfin, $\theta_k^{(\ell)} = 1 - 1/m_k^{(\ell)}$. Donc $[\theta_k^{(\ell)}]^{m_k^{(\ell)}} \rightarrow \frac{1}{e}$ si $k \rightarrow +\infty$. Finalement,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|f_\ell\|_{D(x_k, \theta_k^{(\ell)})} = \frac{\|f_\ell\|}{e} = \Phi_{u,\ell}(f) \neq 0,$$

ce qui prouve que $f_\ell \notin \mathcal{P}_\ell$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEZIVIN (J.-P.). - Interpolation et idéaux de fonctions analytiques bornées, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 3, 9 p.
- [2] Van der PUT (Marius). - The non-archimedean corona problem, "Table ronde d'analyse non archimédienne [1972. Paris]", Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 287-317.

(Texte reçu le 20 décembre 1976)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS
