JEAN FRESNEL
BERNARD DE MATHAN

Produit tensoriel topologique de corps valués

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 24, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A16_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 24, 6 p.

6 juin 1977

PRODUIT TENSORIEL TOPOLOGIQUE DE CORPS VALUÉS

par Jean FRESNEL et Bernard de MATHAN

0. Introduction.

L'objet de cet exposé est l'étude de l'algèbre produit tensoriel topologique de deux corps valués. Plus précisément, soient L et M deux extensions algébriques d'un corps K, qui est algébrique sur $\mathbb{Q}_p$. Soit T une extension galoisienne de K contenant L et M. Si $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(T|K)$, il existe un homomorphisme injectif $\mathfrak{F}$ de $L \otimes_K M$ dans l'algèbre $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$ des fonctions localement constantes définies sur $\mathfrak{G}$, à valeurs dans T, défini par

$$\mathfrak{F}(\ell \otimes m)(g) = \ell m^g .$$

Si $L \otimes_K M$ est muni de la norme tensorielle et $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$ de la norme de la convergence uniforme, l'homomorphisme $\mathfrak{F}$ est continu de norme 1. Il est bicontinu si, et seulement si, la différente de L sur K est non nulle ou si la différente de M sur K est non nulle (proposition 2).

Si $\mathfrak{F}$ n'est pas bicontinu, le radical de Jacobson (intersection des idéaux maximaux) de l'algèbre produit tensoriel complété de L et M, $L \hat{\otimes}_K M$ est le noyau de $\mathfrak{F}$, il est non nul. De plus, $\mathfrak{F}$ induit un homomorphisme injectif isométrique de $L \hat{\otimes} M / \ker \mathfrak{F}$ dans l'algèbre des fonctions continues sur $\mathfrak{G}$ à valeurs dans $\bar{T}$ (le complété de T pour la valeur absolue). Si $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $L \hat{\otimes}_K M$, il s'ensuit que $L \hat{\otimes}_K M / \mathfrak{M}$, est isomorphe et isométrique à $\overline{LM^\sigma}$ (où M^σ est un corps conjugué de M sur K). C'est le théorème 7.

Le résultat de base est un théorème sur la transformation de Fourier p-adique qui permet de montrer que le résultat précédent est vrai pour l'algèbre $KK_\infty \hat{\otimes}_K KK_\infty$, si K_∞ est le corps obtenu en adjoignant à $\mathbb{Q}_p$ toutes les racines de l'unité d'ordre une puissance de p ([5], et théorème 5). Ensuite, un théorème de transfert (théorème 3) permet de montrer que ce résultat est aussi valable pour $T \hat{\otimes}_K T$ si $T \supset K_\infty$, et ce même théorème de transfert permet de démontrer le résultat pour

$$L \hat{\otimes}_K M \subset T \hat{\otimes}_K T .$$

1. Produit tensoriel de corps et algèbres de fonctions.

Tous les corps considérés sont commutatifs. Soit T une extension galoisienne d'un corps K, et soient L et M deux corps intermédiaires.

Soient $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(T|K)$, $\mathfrak{H} = \mathrm{Gal}(T|L)$ et $\mathfrak{K} = \mathrm{Gal}(T|M)$. Notons $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$ l'algèbre des fonctions localement constantes définies sur $\mathfrak{G}$ à valeurs dans T. Soit $\mathfrak{F}$ l'homomorphisme de $L \otimes_K M$ dans $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$, défini par

$$\mathfrak{F}(\ell \otimes m)(g) = \ell m^g \ , \text{ pour tout } g \in \mathfrak{G} \ .$$

Il est clair que l'image de $\mathfrak{F}$ est contenue dans la sous-algèbre B' de $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$, ainsi définie

$$B' = \left\{ f \in \mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T) \ \middle| \ \begin{array}{l} f(g) \in L\tilde{M} \text{ pour tout } g \in \mathfrak{G} \\ f(hgk) = f(g)^h \text{ pour tout } g \in \mathfrak{G}, \ h \in \mathfrak{H}, \ k \in \mathfrak{K} \end{array} \right\}$$

($\tilde{M}$ est la clôture galoisienne de M sur K).

PROPOSITION 1. - *L'homomorphisme* $\mathfrak{F}$ *de* $L \otimes_K M$ *dans* B' *est un isomomorphisme. Soit* $g \in \mathfrak{G}$, *alors l'idéal*

$$\mathfrak{m}_g = \{ \textstyle\sum_i \ell_i \otimes m_i \mid \sum_i \ell_i m_i^g = 0 \} \ .$$

est maximal. Tous les idéaux maximaux sont de cette forme, et $L \otimes_K M / \mathfrak{m}_g$ *est isomorphe à* LM^g *par l'application* $x \longmapsto \mathfrak{F}(x)(g)$. *De plus*,

$$\mathfrak{m}_g = \mathfrak{m}_{g'}$$

si, et seulement si, il existe $h \in \mathfrak{H}$ *tel que* $g' = hg$. *Enfin, les idéaux premiers sont maximaux.*

Remarque. - Si $L = M = T$, les idéaux maximaux de $T \otimes_K T$ sont en bijection avec $\mathfrak{G}$. Si L et M sont linéairement disjoints sur K, il existe un seul idéal maximal (il est nul).

2. Produit tensoriel topologique de corps valués et algèbres de fonctions continues.

Soit $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue p-adique notée $|\cdot|$, $\mathbb{C}_p$ le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Tous les corps considérés seront désormais des sous-corps de $\mathbb{C}_p$. Nous savons que les sous-corps fermés de $\mathbb{C}_p$ ([4], [5]) sont les adhérences des extensions algébriques de $\mathbb{Q}_p$ (cette correspondance est une bijection). Nous reprenons les notations du paragraphe 1 *où* K, L, M *et* T *sont des extensions algébriques de* $\mathbb{Q}_p$.

Rappelons que la *norme tensorielle* $\|\cdot\|$ sur $L \otimes_K M$ est ainsi définie ([7], [12]) si

$$x = \textstyle\sum_i \ell_i \otimes m_i \ , \tag{1}$$

$$\|x\| = \inf \sup_i |\ell_i| \cdot |m_i| \ ,$$

où l' inf est pris sur les décompositions de x sous la forme (1).

Si $\mathrm{loc}(\mathfrak{G}, T)$ est muni de la norme de la convergence uniforme, l'homomorphisme $\mathfrak{F}$ est de norme 1, et se prolonge en un homomorphisme (que nous noterons toujours $\mathfrak{F}$) continu, du complété $L \hat{\otimes}_K M$ de $L \otimes_K M$ pour la norme tensorielle dans l'algèbre $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \bar{T})$ des fonctions continues de $\mathfrak{G}$ dans $\bar{T}$ (complété de T pour la valeur absolue).

Soit B la sous-L-algèbre de $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \bar{T})$ ainsi définie

$$(2) \qquad B = \{f \in \mathcal{C}(\mathfrak{G}, \bar{T}) \;\Big|\; \begin{array}{l} f(g) \in \overline{\widetilde{LM}} \text{ pour tout } g \in \mathfrak{G} \\ f(hgk) = f(g)^k \text{ pour tout } g \in \mathfrak{G},\ h \in \mathfrak{H},\ k \in \mathfrak{K} \end{array} \}.$$

($\tilde{M}$ désigne toujours la clôture galoisienne de M sur K ; d'autre part, si F est un sous-corps de $\underset{\sim}{C}_p$, $\bar{F}$ désignera toujours le complété de F pour la valeur absolue).

THÉORÈME 1 [6]. - La $\bar{L}$-algèbre B est l'adhérence de la L-algèbre B' , et l'image de $L \hat{\otimes}_K M$ par l'homomorphisme $\mathfrak{F}$ est contenu dans B . Soit $g \in \mathfrak{G}$, alors l'idéal

$$\mathfrak{M}_g = \{x \in L \hat{\otimes}_K M \ ; \ \mathfrak{F}(x)(g) = 0\}$$

est maximal. Tous les idéaux maximaux sont de cette forme. L'application $x \longmapsto \mathfrak{F}(x)(g)$ induit un homomorphisme injectif continu de $L \hat{\otimes}_K M / \mathfrak{M}_g$ dans $\overline{LM^g}$. De plus,

$$\mathfrak{M}_g = \mathfrak{M}_{g'}$$

si, et seulement si, il existe $h \in \mathfrak{H}$ tel que $g' = hg$. Les idéaux premiers fermés sont maximaux. Le radical de Jacobson de $L \hat{\otimes}_K M$ est le noyau de $\mathfrak{F}$.

Nous verrons au paragraphe 4, que la bicontinuité de $\mathfrak{F}$ est déterminée par la différente de L et de M sur K .

3. La différente dans les extensions infinies.

Les corps considérés seront toujours des extensions algébriques de $\underset{\sim}{Q}_p$, si K est un corps, nous désignerons par $\mathcal{O}_K$ son anneau de valuation.

Soit L une extension de degré fini de K , nous appellerons différente de L sur K l'idéal $\mathfrak{D}_{L|K}$ de $\mathcal{O}_L$ dont l'inverse $\mathfrak{D}_{L|K}^{-1}$ est ainsi défini [11]

$$\mathfrak{D}_{L|K}^{-1} = \{x \in L \ ; \ Tr_{L|K}(x\,\mathcal{O}_L) \subset \mathcal{O}_K\}.$$

Cet idéal peut s'exprimer à l'aide de différentes relatives à des extensions de degré fini de $\underset{\sim}{Q}_p$. Il existe $K_0 \subset K$ et L' une extension de K_0 linéairement disjointe de L sur K_0 telle que $L'K = L$. Il est facile de vérifier que

$$\mathfrak{D}_{L|K} = \cap_i \mathfrak{D}_{L'K_i|K_i} ,$$

où l'intersection est prise sur tous les corps K_i tels que

$$K_0 \subset K_i \subset K \qquad \text{et} \qquad [K_i : K_0] < \infty$$

(il y a confusion entre l'idéal $\mathfrak{D}_{L'K_i|K_i}$ de $\mathcal{O}_{L'K_i}$ et celui qu'il engendre dans $\mathcal{O}_L$).

Soit L une extension de K (éventuellement de degré infini), nous appellerons différente de L sur K , l'idéal $\mathfrak{D}_{L|K}$ de $\mathcal{O}_L$ ainsi défini

$$\mathfrak{D}_{L|K} = \cap_i \mathfrak{D}_{L_i|K} ,$$

où l'intersection est prise sur tous les corps L_i tels que $K \subset L_i \subset L$ et

$[L_i : K] < \infty$ (il y a aussi confusion entre l'idéal $\mathfrak{D}_{L_i|K}$ de $\mathcal{O}_{L_i}$ et celui qu'il engendre dans $\mathcal{O}_L$).

Comme nous nous intéressons essentiellement, dans la suite de ce travail, aux valuations des idéaux-différentes nous dirons (par abus) que

$$\mathfrak{D}_{L|K} = (1) \qquad \text{si} \qquad 1 = \sup_{x\in\mathfrak{D}_{L|K}} |x|$$

(si l'indice de ramification de L sur $\underset{\sim}{Q}_p$ est infini, cela veut dire que $\mathfrak{D}_{L|K} = \mathcal{O}_L$ ou $\mathfrak{D}_{L|K} = \mathfrak{M}_L$ idéal de valuation, sinon il n'y a pas d'abus).

THÉORÈME 2 [6]. - <u>Soit</u> L <u>une extension algébrique de</u> $\underset{\sim}{Q}_p$ <u>de différente nulle sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$. <u>Soit</u> M <u>une extension de degré fini de</u> L, <u>alors</u> $\mathfrak{D}_{M|L} = (1)$.

PROPOSITION 2 [6]. - <u>L'homomorphisme</u> $\mathfrak{F}$ <u>de</u> $L \hat{\otimes}_K M$ <u>dans</u> B <u>est bicontinue si, et seulement si,</u> $\mathfrak{D}_{L|K} \neq (0)$ ou $\mathfrak{D}_{M|K} \neq (0)$.

L'usage de la différente permet d'autre part de montrer un théorème de transfert.

THÉORÈME 3 [6]. - <u>Soit</u> K <u>algébrique sur</u> $\underset{\sim}{Q}_p$, L, L', M, M', 4 <u>extensions algébriques de</u> K <u>telles que</u>

$$M \subset M', \quad L \subset L', \quad \mathfrak{D}_{M'|M} \neq (0) \ \underline{\text{et}}\ \mathfrak{D}_{L'|L} \neq (0).$$

<u>Alors le radical</u> $\mathfrak{R}'$ <u>de</u> $L' \hat{\otimes}_K M'$ <u>est l'idéal fermé engendré par le radical</u> $\mathfrak{R}$ <u>de</u> $L \hat{\otimes}_K M$ <u>et l'injection</u> i <u>de</u> $L \hat{\otimes}_K M / \mathfrak{R}$ <u>dans</u> $L' \hat{\otimes}_K M' / \mathfrak{R}'$ <u>est isométrique</u>.

4. L'algèbre $KK_\infty \hat{\otimes}_K KK_\infty$.

Soit $K_N = \underset{\sim}{Q}_p(\sqrt[p^N]{1})$, $K_\infty = \cup_{N\geq 1} K_N$, et $K' \subset K_\infty$ une extension de degré fini de $\underset{\sim}{Q}_p$. Appelons Γ_N le groupe des racines p^N-ièmes de l'unité, et $\Gamma = \cup_{N\geq 1} \Gamma_N$. Soit $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty)$ l'algèbre des fonctions définies sur Γ, à valeurs dans K_∞, qui tendent vers zéro selon le complémentaire des parties finies de Γ. Le produit de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty)$ est la convolution définie par

$$f * g(\gamma) = \sum_{\delta\in\Gamma} f(\delta)g(\gamma\delta^{-1}).$$

D'autre part, la transformation de Fourier $\mathfrak{F}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty)$ dans les fonctions $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \bar{K}_\infty)$, continues sur $\underset{\sim}{Z}_p$, à valeurs dans $\bar{K}_p$, est définie par $\mathfrak{F}_1(f) = \hat{f}$, où $\hat{f}(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma)\gamma^x$.

Nous savons que $\mathfrak{F}_1$ est surjectif, que le noyau de $\mathfrak{F}_1$ est le radical $\mathfrak{R}_1$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_p)$, que $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty) / \mathfrak{R}_1$ est isométrique à $\mathcal{C}(\underset{\sim}{Z}_p, \bar{K}_\infty)$, et que l'idéal $\mathfrak{N}_1$ des nilpotents de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty)$ est dense dans $\mathfrak{R}$ (théorèmes 2 et 3 de [5]). Alors, en considérant l'application $f \longmapsto \sum_\gamma f(\gamma) \otimes \gamma$ de $\mathfrak{L}^1(\Gamma, \bar{K}_\infty)$ dans $K_\infty \hat{\otimes}_{K'} K_\infty$, où $\underset{\sim}{Q}_p \subset K' \subset K_\infty$ et $[K' : \underset{\sim}{Q}_p] < \infty$, on peut démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 4 [6]. - *Soit* $K_\infty = \bigcup_{N>1} K_N$ *, où* $K_N = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p^N]{1})$ *. Soit* $\mathbb{Q}_p \subset K' \subset K_\infty$ *et* K' *de degré fini sur* $\mathbb{Q}_p$ *. Soit* $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(K_\infty | K')$ *et* $\mathfrak{F}$ *l'homomorphisme de* $K_\infty \hat{\otimes}_{K'} K_\infty$ *dans* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{K_\infty})$ *, défini par*

$$\mathfrak{F}(x \otimes y)(g) = xy^g .$$

Alors, $\ker \mathfrak{F} \neq (0)$ *est le radical de* $K_\infty \hat{\otimes}_{K'} K_\infty$ *;* $K_\infty \hat{\otimes}_{K'} K_\infty / \ker \mathfrak{F}$ *est isomorphe et isométrique à* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{K_\infty})$ *. Enfin l'idéal* $\mathfrak{N}$ *des nilpotents est dense dans* $\ker \mathfrak{F}$ *, il est distinct de* $\ker \mathfrak{F}$.

On peut alors en déduire le théorème suivant.

THÉORÈME 5 [6]. - *Soit* K *algébrique sur* $\mathbb{Q}_p$ *tel que* $\mathfrak{D}_{K|\mathbb{Q}_p} \neq (0)$ *,* $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(KK_\infty | K)$ *, alors l'homomorphisme* $\mathfrak{F}$ *de* $KK_\infty \hat{\otimes}_K KK_\infty$ *dans* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{KK_\infty})$ *est surjectif,* $\ker \mathfrak{F} \neq (0)$ *, le quotient* $KK_\infty \hat{\otimes}_K KK_\infty$ *est isomorphe et isométrique à* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{KK_\infty})$ *, et l'idéal* $\mathfrak{N}$ *des nilpotents de* $KK_\infty \hat{\otimes}_K KK_\infty$ *est dense dans* $\ker \mathfrak{F}$ *, et distinct de* $\ker \mathfrak{F}$.

5. L'algèbre $L \hat{\otimes}_K M$.

Les théorèmes 3 et 5 permettent alors de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6 [6]. - *Soit* K *algébrique sur* $\mathbb{Q}_p$ *tel que* $\mathfrak{D}_{K|\mathbb{Q}_p} \neq (0)$ *, soit* T *une extension galoisienne de* K *contenant* K_∞ *, et soit* $\mathfrak{G} = \mathrm{Gal}(T | K)$ *. Alors l'homomorphisme* $\mathfrak{F}$ *de* $T \hat{\otimes}_K T$ *dans* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{T})$ *est surjectif,* $\ker \mathfrak{F} \neq (0)$ *, le quotient* $T \hat{\otimes} T / \ker \mathfrak{F}$ *est isomorphe et isométrique à* $\mathcal{C}(\mathfrak{G}, \overline{T})$ *, et l'idéal* $\mathfrak{N}$ *des nilpotents de* $T \hat{\otimes}_K T$ *est dense dans* $\ker \mathfrak{F}$ *et distinct de* $\ker \mathfrak{F}$.

Les théorèmes 3 et 6 permettent finalement de montrer le résultat suivant.

THÉORÈME 7 [6]. - *Soit* K *algébrique sur* $\mathbb{Q}_p$ *,* L *et* M *algébriques sur* K *tels que* $\mathfrak{D}_{L|K} = (0)$ *et* $\mathfrak{D}_{M|K} = (0)$ *. Alors l'homomorphisme* $\mathfrak{F}$ *de* $L \hat{\otimes}_K M$ *dans* B *est surjectif,* $\ker \mathfrak{F} \neq (0)$ *, le quotient* $L \hat{\otimes}_K M / \ker \mathfrak{F}$ *est isomorphe et isométrique à* B *. L'homomorphisme* $x \longmapsto \mathfrak{F}(x)(g)$ *induit un isomorphisme isométrique de* $L \hat{\otimes}_K M / \mathfrak{M}_g$ *sur* $\overline{LM^g}$.

Remarque 1. - Sous les hypothèses du théorème, avec en plus $L \supset K_\infty$ et $M \supset K_\infty$, on montre que les nilpotents de $L \hat{\otimes}_K M$ sont denses dans le radical de $L \hat{\otimes}_K M$.

Remarque 2. - Si $L \supset K_\infty$ ou $M \supset K_\infty$, le théorème 7 de [5] montre que les nilpotents de $L \hat{\otimes}_K M$ sont denses dans le radical de $L \hat{\otimes}_K M$.

Remarque 3. - Nous pensons que les nilpotents de $L \hat{\otimes}_K M$ sont toujours dense dans le radical de $L \hat{\otimes}_K M$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AX (J.). - Zeros of polynomials over local fields - The Galois action, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 417-428.

[2] BOURBAKI (N.). - Algèbre, Chap. 5 : Corps commutatifs, 2e édition. - Paris, Hermann, 1959 (Act. scient. et ind., 1102 ; Bourbaki, 11).

[3] FRESNEL (J.), de MATHAN (B.). - Transformation de Fourier p-adique et produit tensoriel de corps values, Groupe d'étude d'analyse ultramétrique (Y. Amice, P. Robba), 3e année, 1975/76, n° J1, 6 p.

[4] FRESNEL (J.), de MATHAN (B.). - Algèbre du groupe infini Γ et produit tensoriel de corps values, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 1975/76, exposé n° 26.

[5] FRESNEL (J.), de MATHAN (B.). - Algèbres L^1 p-adiques (à paraître).

[6] FRESNEL (J.), de MATHAN (B.). - Produit tensoriel de corps values, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 1976/77.

[7] GRUSON (L.). - Théorie de Fredholm p-adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.

[8] PARMENTIER (M. M.), SEHGAL (S. K.). - Non-archimedean group algebras, J. of Number Theory, t. 7, 1975, p. 376-384.

[9] SCHIKHOF (W. H.). - Non-archimedean harmonic analysis, Thèse Nijmegen. 1967.

[10] SEN (S.). - On automorphisms of local fields, Annals of Math., t. 90, 1969, p. 33-46.

[11] SERRE (J. P.). - Corps locaux, 2e édition. - Paris, Hermann, 1968 (Act. scient. et ind., 1296 ; Publ. Inst. Math. Univ. Nancago, 8).

[12] SERRE (J. P.). - Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publication mathématiques, 12, p. 69-85).

[13] TATE (J. T.). - p-divisible groups, "Proceedings of a conference on local fields", p. 158-183. - Berlin, Springer Verlag, 1967.

[14] WOODCOCK (C. F.). - Fourier analysis for p-adic Lipchitz functions, J. London math. Soc., 2nd Series, t. 7, 1974, p. 681-693.

(Texte reçu le 3 novembre 1977)

Jean FRESNEL et Bernard de MATHAN
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE