Alain Escassut

Sur la semi-norme spectrale supérieure en algèbre de Banach ultramétrique

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n^{o} 13, p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A12_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, D. BARSKY, P. ROBBA)
4e année, 1976/77, n° 13, 5 p.

14 février 1977

SUR LA SEMI-NORME SPECTRALE SUPÉRIEURE EN ALGÈBRE DE BANACH ULTRAMÉTRIQUE

par Alain ESCASSUT

1. Rappels et définitions.

On désignera par K un corps ultramétrique complet algébriquement clos.

Soit $(A\ ,\ \|.\|)$ une K-algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, et soit $x \in A$; on notera $s(x)$ l'ensemble des $\lambda \in K$ tels que $x - \lambda$ ne soit pas inversible, et

$$\|x\|_{si} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} .$$

D'autre part, on notera $\max(A)$ l'ensemble des idéaux maximaux de A , et $\mathfrak{X}(A)$ l'ensemble des homomorphismes de K-algèbre surjectifs de A sur des extensions de K . Enfin, on notera $\mathrm{Mult}(A\ ,\ \|.\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives continues de A , et $\mathrm{Mult}_{\mathfrak{m}}(A\ ,\ \|.\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Mult}(A\ ,\ \|.\|)$, dont le noyau (c'est-à-dire l'idéal premier fermé $\mathrm{Ker}\ \varphi$ des $u \in A$ tels que $\varphi(u) = 0$) est un idéal maximal de A .

Pour tout x fixé dans A , on peut définir un procédé de calcul fonctionnel holomorphe de la façon suivante [3].

Soit $R(s(x))$ l'algèbre des fractions rationnelles sans pôle dans $s(x)$, et soit Φ l'homomorphisme canonique de $R(s(x))$ dans A , défini par

$$\Phi(\frac{P}{Q}) = P(x)\ (Q(x))^{-1}$$

($Q(x)$ étant nécessairement inversible dans A du fait que $P/Q \in R(s(x))$).

On démontre que $\|(x-a)^{-1}\| = \|(x-b)^{-1}\|$ si $|a-b| < 1/\|(x-a)^{-1}\|$, et on en déduit l'existence d'une norme $\|.\|_{\wp}$ sur $R(s(x))$, telle que Φ soit continue pour les normes $\|.\|_{\wp}$ (de $R(s(x))$) et $\|.\|$ (de A). En particulier, si D est un infraconnexe de diamètre $\|x\|$, dont tous les trous sont de la forme $d^-(a\ ,\ 1/\|(x-a)^{-1}\|)$, alors l'homomorphisme naturel Λ_0 de $R(D)$ dans A , tel que $\Lambda_0(X) = x$, est continu quand on munit $R(D)$ de la norme $\|.\|_D$ de la convergence uniforme, et il se prolonge donc en un homomorphisme Λ de l'algèbre $H(D)$ des éléments analytiques au sens de Krasner sur D , tel que $\Lambda(X) = x$.

2. Problème de la multbijectivité.

Rappelons que tout idéal maximal d'une K-algèbre de Banach A est le noyau d'au moins une semi-norme multiplicative continue de A [5]. On dit que A est <u>multbijective</u> si la surjection $\varphi \longrightarrow \mathrm{Ker}\ \varphi$ de $\mathrm{Mult}_{\mathfrak{m}}(A\ ,\ \|.\|)$ sur $\max(A)$ est une bijection.

Rappelons que le corps K est dit fortement valué si l'un au moins des deux ensembles $|K|$ et k n'est pas dénombrable, où $|K| = \{|\lambda| \; ; \; \lambda \in K\}$, et où k désigne le corps résiduel de K.

THÉORÈME 1. - Si K est fortement valué, toute extension de K, possédant une structure de K-algèbre de Banach ultramétrique, admet une seule valeur absolue continue pour sa norme. Si K n'est pas fortement valué, il existe des extensions de K possédant une structure de K-algèbre de Banach qui admettent une infinité de valeurs absolues continues pour leur norme.

COROLLAIRE. - Si K est fortement valué, toute K-algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, est multbijective. Si K n'est pas fortement valué, il existe des K-algèbres de Banach ultramétriques commutatives, unitaires non multbijectives.

Preuve du corollaire. - Si K n'est pas fortement valué, l'assertion du corollaire est évidente d'après le théorème 1.

Supposons donc K fortement valué, et supposons que A soit une K-algèbre de Banach ultramétrique, non multbijective. Il existe donc un idéal maximal $\mathfrak{M}$ et deux semi-normes multiplicatives continues φ_1 et φ_2, telles que $\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2 = \mathfrak{M}$, et $\varphi_1 \neq \varphi_2$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ tel que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$.

Soit $\Gamma = A/\mathfrak{M}$; alors Γ est une extension de K, et possède une structure d'algèbre de Banach, quotient de celle de A. On notera θ la surjection canonique de A sur Γ.

Alors il est clair que φ_i se factorise sous la forme $v_i \circ \theta$ $(i = 1, 2)$, où v_i est une valeur absolue de Γ, continue pour la norme de Γ. Alors, par hypothèse,

$$v_1(\theta(x)) \neq v_2(\theta(x)) ,$$

donc $v_1 \neq v_2$, ce qui est absurde d'après le théorème 1, et par suite le corollaire est établi.

Preuve du théorème 1. - Si K n'est pas fortement valué, on sait [2] qu'il existe des extensions Γ admettant une infinité de valeurs absolues continues pour une même norme d'algèbre de Banach ultramétrique.

Supposons donc K fortement valué et supposons que Γ soit une extension de K et une K-algèbre de Banach ultramétrique pour une norme $\|.\|$, et que Γ possède deux valeurs absolues distinctes v_1 et v_2 continues pour cette norme. Soit $x \in \Gamma$ tel que $v_1(x) \neq v_2(x)$. On notera $r_1 = v_1(x)$ et $r_2 = v_2(x)$ en supposant $r_1 < r_2$.

Comme K est fortement valué, il est immédiat d'exhiber une famille de disques non circonférenciés

$$T_n = d^-(a_n , \frac{1}{\|(x - a_n)^{-1}\|})$$

de diamètre $\geqslant \delta > 0$, $\forall\, n$, tels que

$$r < |a_n| \leqslant |a_{n+1}| < R \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = R \in \,]r_1 , r_2[\ ,$$

et tels que l'infraconnexe D de diamètre R , qui admet pour seuls trous les éléments de la suite T_n , admette un T-filtre croissant $\mathfrak{F}$ de centre 0 , de diamètre $\|x\|_{si}$. Alors il existe, d'après ce qui précède, un homomorphisme continu Λ de H(D) dans Γ tel que $\Lambda(X) = x$.

On voit que $\psi_1 = v_1 \circ \Lambda$ et $\psi_2 = v_2 \circ \Lambda$ sont deux semi-normes multiplicatives continues de H(D) telles que

$$\psi_1(X) = v_1(x) \quad \text{et} \quad \psi_2(X) = v_2(x) \ .$$

Or, puisque D admet le T-filtre $\mathfrak{F}$, H(D) contient un élément f tel que $|f(\alpha)| = 1$ quand $|\alpha| \leqslant r_1$, et $f(\alpha) = 0$ quand $|\alpha| \geqslant R$. Par suite, $\psi_1(f) = 1$ et $\psi_2(f) = 0$. Soit $y = \Lambda(f)$; on a donc $v_1(y) = 1$ et $v_2(y) = 0$, ce qui est absurde.

3. La semi-norme $\|.\|_{si}$.

On sait que $\|x\|_{si} = \sup_{\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)} \varphi(x)$ [s] . On obtient maintenant l'amélioration suivante.

THÉORÈME 2. - *Si K est fortement valué, pour toute K-algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, on a*

$$\|x\|_{si} = \sup_{\varphi \in \mathrm{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|.\|)} \varphi(x) \ .$$

Si K n'est pas fortement valué, il existe des K-algèbres de Banach ultramétriques, commutatives, unitaires A telles que, pour certains $x \in A$, on ait

$$\|x\|_{si} > \sup_{\varphi \in \mathrm{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|.\|)} \varphi(x) = 0 \ .$$

Remarque. - Supposons K fortement valué ; alors, pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de A , l'extension $A/\mathfrak{M}$ de K admet une seule valeur absolue $|.|$ continue pour sa norme de K-algèbre de Banach, et si l'on note χ l'homomorphisme canonique de A sur $A/\mathfrak{M}$, on voit que l'unique semi-norme multiplicative continue φ , telle que $\mathrm{Ker}\, \varphi = \mathfrak{M}$, est l'application $x \longrightarrow |\chi(x)|$. Par suite, le théorème 2 permet de retrouver une relation célèbre en analyse complexe :

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \sup_{\chi \in \max(A)} |\chi(x)| \ .$$

Toutefois, ici, les homomorphismes χ ne vérifient pas forcément $\chi(A) = K$.

Preuve du théorème 2. - Supposons d'abord que K est fortement valué, et montrons l'égalité

$$\sup_{\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)} \varphi(x) = \sup_{\varphi \in \mathrm{Mult}_{\mathfrak{m}}(A, \|.\|)} \varphi(x) \ .$$

Pour cela, supposons le résultat faux, c'est-à-dire qu'il existe $x \in A$ et $\varphi_0 \in \mathrm{Mult}(A, \|.\|)$ tel que

$$\varphi_0(x) > \sup_{\varphi\in \mathrm{Mult}_m(A,\|.\|)} \varphi(x) .$$

Soit $R = \varphi_0(x)$, et soit $r = \sup_{\varphi\in \mathrm{Mult}_m(A,\|.\|)} \varphi(x)$. Comme K est fortement valué, il existe trivialement un fermé borné D admettant un T-filtre croissant de centre 0 , de diamètre $R' \in]r , R[$ tel que, pour tout trou T de D , on ait

$$\mathrm{diam}\ T = \frac{1}{\|(x - a)^{-1}\|} \quad \text{pour} \quad a \in T .$$

Alors comme précédemment, il existe $f \in H(D)$ tel que $|f(\alpha)| = 1$ si $|\alpha| \leqslant r$, et $f(\alpha) = 0$ si $|\alpha| \geqslant R$, d'où $\psi(f) = 1$ quel que soit $\psi \in \mathrm{Mult}(H(D) , \|.\|_D)$ tel que $\psi(X) \leqslant r$, et $\psi(f) = 0$ quel que soit $\psi \in \mathrm{Mult}(H(D) , \|.\|_D)$ tel que $\psi(X) \geqslant R$.

En particulier, si $\varphi_0' = \varphi_0 \circ \Lambda$, on a $\varphi_0'(f) = 0$, c'est-à-dire qu'en notant $y = \Lambda(f)$, on a $\varphi_0(y) = 0$. Maintenant, soit $\mathfrak{p} = \mathrm{Ker}\ \varphi_0$, soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de A qui contient $\mathfrak{p}$ et soit $\varphi \in \mathrm{Mult}_m(A , \|.\|)$ tel que $\mathrm{Ker}\ \varphi = \mathfrak{M}$. Enfin soit $\varphi' = \varphi \circ A$. Alors, dans $H(D)$, on a $\mathrm{Ker}\ \varphi_0' \subset \mathrm{Ker}\ \varphi'$; mais, par hypothèse, $\varphi(x) \leqslant r$, ce qui est absurde puisque $\varphi_0'(f) = 0$. Ainsi l'égalité

$$\|x\|_{si} = \sup_{\varphi\in \mathrm{Mult}_m(A,\|.\|)} \varphi(x)$$

est établie.

Montrons maintenant la dernière affirmation en supposant K non fortement valué. Rappelons que, dans la preuve du théorème II. 2 de [3], on a construit un infraconnexe fermé borné D de diamètre R contenant 0 tel que, pour tout $r \in |K|$, chaque classe $d^-(a , r)$ du cercle $C(0 , r)$ admet un T-filtre croissant de diamètre r , et tel que D n'admette aucun autre T-filtre que ceux-ci, dont on notera la famille $\mathfrak{F}$. Il est immédiat d'en déduire la construction d'un infraconnexe fermé borné Δ de diamètre R , inclus dans $d^-(0 , R)$, admettant pour seuls T-filtres ceux induits par ceux de la famille $\mathfrak{F}$ ainsi qu'un T-filtre croissant $\mathcal{U}$ de diamètre R . On voit donc que le seul idéal maximal de codimension infinie de $H(\Delta)$ est l'ensemble m des $f \in H(\Delta)$ tels que $\lim_{\mathcal{U}} f(x) = 0$. D'autre part, on note $\mathfrak{p}$ l'idéal premier fermé des $f \in H(\Delta)$ tel que $\lim_{\mathcal{T}} f(x) = 0$, $\forall\ \mathcal{T} \in \mathfrak{F}$. Soit $A = H(\Delta)/\mathfrak{p}$, et soit Φ la surjection canonique de $H(\Delta)$ sur A . Alors A admet un seul idéal maximal de codimension infinie qui est $\hat{m} = \Phi(m)$, et A n'admet aucun idéal maximal de codimension 1 car, pour tout $a \in \Delta$, il existe un T-filtre $\mathcal{T}_a \in \mathfrak{F}$ de centre a , et il existe $f_a \in H(\Delta)$ strictement annulé par $\mathcal{T}_a$ tel que $f_a \in \mathfrak{p}$ et $f_a(a) \neq 0$. Considérons maintenant un élément $g \in H(\Delta)$ strictement annulé par $\mathcal{U}$. Alors on a $\lim_{\mathcal{T}} |g(\lambda)| \neq 0$, $\forall\ \mathcal{T} \in \mathfrak{F}$. Chaque T-filtre $\mathcal{T} \in \mathfrak{F}$ définit une semi-norme $\varphi_{\mathcal{T}} \in \mathrm{Mult}(H(\Delta) , \|.\|)$ telle que $\mathrm{Ker}\ \varphi_{\mathcal{T}} = \mathfrak{p}$ et telle que $\lim_{\mathcal{T}} |g(x)| = \varphi(g)$. Alors comme $\varphi_{\mathcal{T}}(f) \leqslant \|f\|_\Delta$, $\forall\ f \in H(\Delta)$, il est clair que $\varphi_{\mathcal{T}}$ se factorise sous la forme $\varphi_{\mathcal{T}} \circ \Phi$, où $\varphi_{\mathcal{T}} \in \mathrm{Mult}(A , \|.\|)$ de sorte que, dans A , on a $\varphi_{\mathcal{T}}(\Phi(g)) \neq 0$, et par suite, $\|\Phi(g)\|_{si} \neq 0$. Or $g \in m$, donc $\Phi(g) \in \hat{m}$, ce qui prouve trivialement que

$$\sup_{\psi \in \mathrm{Mult}_m(A, \|.\|)} \psi(\Phi(g)) = 0 .$$

COROLLAIRE du théorème 2. - Si K est fortement valué, dans toute K-algèbre de Banach ultramétrique, commutative, unitaire, l'idéal I des x tels que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|} = 0$$

est égal au radical de Jacobson ; si K n'est pas fortement valué, il existe des K-algèbres de Banach ultramétriques, commutatives, unitaires, dont l'idéal I est strictement inclus dans le radical de Jacobson.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ESCASSUT (Alain). - T-filtres, ensembles analytiques et transformation de Fourier p-adique, Annales Institut Fourier, Grenoble, t. 25, 1975, fasc. 2, p. 45-80.

[2] ESCASSUT (Alain). - Spectre maximal d'une algèbre de Krasner, Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique, 1re année, 1973/74, n° 12, 14 p., et Colloquium Mathematicum, t. 37, 1977, fasc. 2.

[3] ESCASSUT (Alain). - Calcul fonctionnel holomorphe dans les algèbres de Banach ultramétriques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 17, 7 p.

[4] GARANDEL (Gérard). - Les semi-normes multiplicatives sur les algèbres d'éléments analytiques au sens de Krasner, Proc. konkl. Nederl. Akad. Wet., Séries A, t. 78, 1975, p. 327-341.

[5] GUENNEBAUD (Bernard). - Algèbres localement connexes sur les corps valués, Bull. Sc. math., 2e série, t. 91, 1967, p. 75-96.

(Texte reçu le 24 février 1977)

Alain ESCASSUT
Mathématiques
Université de Bordeaux-I
351 cours de la Libération
33405 TALENCE