

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

DANIEL BARSKY

Différentielles et congruences

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 4 (1976-1977), exp. n° 12, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1976-1977__4__A11_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1976-1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIFFÉRENTIELLES ET CONGRUENCES

par Daniel BARSKY

RÉSUMÉ. - On montre que les coefficients d'une série de Taylor satisfont des congruences si l'on connaît des propriétés de la série réciproque.

Soit p un nombre premier, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{C}_p$ ont leur signification habituelle [1].

La valeur absolue $|\cdot|$ sur $\mathbb{C}_p$ est normalisée par $|p| = p^{-1}$. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}_p$. Supposons que la série génératrice de Hurwitz

$$Y = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{X^n}{n!}$$

de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ satisfasse la propriété suivante

$$\frac{dY}{dX} = \sum_{n \geq 1} d_n Y^{n-1} \quad \text{avec} \quad d_1 = 1 \quad \text{et} \quad |d_n| \leq 1,$$

alors on peut montrer que les a_n ont des propriétés p -adiques remarquables, ou bien il existe $c \in \mathbb{C}_p$ avec $|c| = 1$ tel que

$$\left| \frac{a_n}{c^n} - \frac{a_{n+(p-1)p^{h-1}}}{c_{n+(p-1)p^{h-1}}} \right| \leq p^{-h/2} \quad \text{pour} \quad n \geq h,$$

ou bien a_n est divisible par $p^{n\alpha}$ ou, autrement dit, $|a_n| \leq p^{-n\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

En fait, on montrera essentiellement que $Z(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ est un élément analytique sur des quasi-connexes de $\mathbb{C}_p$ contenant strictement $B(0, 1^-)$ [1]; le théorème de Mittag-Leffler p -adique donnera alors le résultat [1].

Rappelons que l'on note, si ρ est un nombre réel positif, et a un élément de $\mathbb{C}_p$,

$$B(a, \rho^-) = \{X \in \mathbb{C}_p; |X - a| < \rho\}$$

et

$$B(a, \rho^+) = \{X \in \mathbb{C}_p; |X - a| \leq \rho\}.$$

Ce genre de situation se rencontre pour les fonctions L p -adiques. Par exemple, si B_n est le n -ième nombre de Bernoulli, on a

$$\frac{1}{X} + \sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n} \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{e^X}{e^X - 1} = V(X),$$

alors

$$\frac{d(1/V)}{dX} = 1 - \left(\frac{1}{V}\right).$$

De même si $p(z)$ est la solution de l'équation différentielle $(p')^2 = p^3 - ap - b$ ayant un pôle double à l'origine, alors $t(z) = 1/\sqrt{p(z)}$ vérifie

$$dt/dz = \sqrt{1 - at^4 - bt^6}.$$

Il est facile alors de remonter des propriétés de $1/V$ et de $1/\sqrt{p}$ à celle de V et de p pour obtenir des congruences entre les B_n/n et entre les h_n où l'on a posé

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 0} \frac{h_{n+2}}{n+2} \frac{z^n}{n!}.$$

Le principe de la démonstration est d'écrire formellement

$$Y(X) = \sum_{n \geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n$$

et de choisir $c \in \mathbb{C}_p$ de telle sorte que la croissance des $|b_n|$ soit aussi lente que possible.

On utilise alors la transformation de Laplace formelle [2], et on montre que

$$Z(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)},$$

expression sur laquelle il est facile de voir si $Z(X)$ est un élément analytique p -adique. Ce genre de situation s'applique par exemple aux fonctions hyperelliptiques ou plus généralement si l'on a

$$(Y')^k = 1 + YP(Y)$$

où $P(Y)$ est un polynôme à coefficient dans $\mathbb{Z}$ (on doit alors supposer que p ne divise pas k).

Ces résultats étaient connus de CARLITZ par une méthode différente ([3], [4] et [5]). Soit

$$Y = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{X^n}{n!} \in \mathbb{C}_p[[X]]$$

vérifiant les hypothèses suivantes :

$$(H_0) \quad \frac{dY}{dX} = \sum_{n \geq 1} d_n Y^{n-1} \text{ avec } d_1 = 1 \text{ et } |d_n| \leq 1 \quad (d_n \in \mathbb{C}_p).$$

Les hypothèses (H_0) sont équivalentes aux hypothèses (H_1) :

$$(H_1) \quad Y = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} X^n \in \mathbb{C}_p[[X]] ; \quad \frac{dX}{dY} = \sum_{n \geq 1} e_n Y^{n-1} \in \mathbb{C}_p[[X]]$$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$.

Les hypothèses (H_1) sont elles-mêmes équivalentes aux hypothèses (H) :

$$(H) \quad Y = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} X^n \in \mathbb{C}_p[[X]] ; \quad X = \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \in \mathbb{C}_p[[X]]$$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$.

Le problème que nous nous posons est le suivant : Sous les hypothèses (H) que peut-on dire sur la fonction

$$Z(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n,$$

du point de vue de l'analyticité au sens de Krasner ?

Nous allons écrire

$$Y = \sum_{n \geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n,$$

ce qui est toujours possible formellement, car $(e^{cX} - 1)^n = X^n + \text{termes de degré}$

plus élevé, et nous allons montrer que l'hypothèse (H) permet de choisir $c \in \mathbb{C}_p$, c dépendant de e_p , de telle sorte que la croissance de b_n soit assez lente. Pour réaliser ce programme, nous allons utiliser le théorème suivant.

THÉORÈME (LAGRANGE-BÜRMAN [6]). - Soit

$$T = \sum_{n \geq 1} c_n Y^n \quad \text{et} \quad Y = \sum_{n \geq 1} b_n T^n$$

deux séries formelles à coefficients dans un corps.

Supposons que Y et T soient réciproques l'une de l'autre, c'est-à-dire que

$$T(Y(T)) = T \quad \text{et} \quad Y(T(Y)) = Y,$$

supposons en outre que $c_1 \neq 0$. Alors le coefficient de T^n dans la série Y est égal au coefficient de Y^{n-1} dans le développement en série de Taylor de $(Y/T)^{n+1} \frac{dT}{dY}$.

Démonstration. - Il existe des démonstrations purement formelles. Mais nous allons en donner une, basée sur l'intégrale de Cauchy. Soit C un petit cercle autour de l'origine, alors

$$b_n = \oint_C \frac{Y}{T^{n+1}} dT = \oint_{C'} \frac{Y}{T^{n+1}} \left(\frac{dT}{dY} \right) dY$$

(C' est l'image de C par l'application $T \rightarrow Y$). Si

$$\frac{Y}{T^{n+1}} \frac{dT}{dY} = \frac{1}{Y^n} \sum_{i \geq 0} \alpha_i Y^i,$$

alors $b_n = \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire : c'est le coefficient de Y^{n-1} dans $\left(\frac{Y}{T}\right)^{n+1} \left(\frac{dT}{dY}\right)$.
Q. E. D.

Application.

$$T = e^{cX} - 1, \quad Y = \sum_{n \geq 1} b_n T^n, \quad X = \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n.$$

Donc

$$T = \left(\exp \left(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \right) \right) - 1 \quad \text{et} \quad Y = \sum_{n \geq 1} b_n T^n$$

sont deux séries réciproques l'une de l'autre, et $b_1 = \frac{1}{c}$.

Si $c \neq 0$, le coefficient b_n est égal au coefficient de Y^{n-1} dans le développement en série de Taylor en Y de

$$\begin{aligned} & \left(\frac{Y}{\exp \left(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \right) - 1} \right)^{n+1} \left(\exp \left(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \right) \right) \left(c \sum_{n \geq 1} e_n Y^{n-1} \right) \\ &= \left(c \sum_{n \geq 1} e_n Y^{n-1} \right) \left(Y \left(\frac{Y}{\exp \left(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \right) - 1} \right)^n + \left(\frac{Y}{\exp \left(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \right) - 1} \right)^{n+1} \right) \\ &= \sum_{m \geq 0} b_m^{(n)} Y^m. \end{aligned}$$

Nous voulons obtenir une estimation de $|b_n|$, il nous suffit donc d'obtenir une estimation de $|b_m^{(n)}|$. Pour obtenir une estimation de $|b_m^{(n)}|$, nous allons tout d'abord obtenir une estimation de $|\beta_n|$, où l'on a posé

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = 1 + \sum_{n \geq 1} \beta_n Y^n .$$

Pour cela, nous allons écrire formellement (utilisant ainsi une astuce due à B. DWORK),

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \exp(\sum_{i \geq 1} \log(1 - \alpha_i Y^i)) ,$$

ce qui est toujours possible.

LEMME 1. - Si

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \exp(\sum_{n \geq 1} \log(1 - \alpha_i Y^i)) = \prod_{i \geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) ,$$

alors

$$ce_n = \sum_{i|n} i \alpha_i^{n/i} .$$

Démonstration. - On dérive logarithmiquement les 2 membres de

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \prod_{i \geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) ,$$

et il vient

$$c \sum_{n \geq 1} e_n Y^{n-1} = \sum_{i \geq 1} \frac{i \alpha_i Y^{i-1}}{1 - \alpha_i Y^i} .$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 1. - Si

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = 1 + \sum_{n \geq 1} \beta_n Y^n ,$$

alors

$$\beta_n = \sum_{i_1 + \dots + i_k = n, i_1 > i_2 > \dots > i_k > 0} (-1)^k \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} .$$

C'est clair.

Nous allons maintenant choisir c de telle sorte que la croissance des $|\alpha_i|$ soit aussi faible que possible.

THÉORÈME 1. - Soit

$$\exp(c \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n) = \prod_{i \geq 1} (1 - \alpha_i Y^i) = 1 + \sum_{n \geq 1} \beta_n Y^n ,$$

avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$. Alors, si

$$c^{p-1} = e_p \quad \underline{\text{si}} \quad e_p \neq 0$$

et

$$c = p^{-1/p} \quad \underline{\text{si}} \quad e_p = 0 ,$$

on a

$$(i) \quad \alpha_1 = \beta_1 = c ,$$

(ii) pour $n \geq 2$ et pour $p \neq 2$,

$$|\alpha_n| \leq |c| p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} ;$$

$$|\beta_n| \leq |c| p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} ;$$

(iii) pour $n \geq 2$ et pour $p = 2$,

$$|\alpha_n| \leq |c| 2^{3(n-1)/4};$$

$$|\beta_n| \leq |c| 2^{3(n-1)/4}.$$

Démonstration. - On a

$$\alpha_n = \frac{ce_p}{n} - \sum_{i|n, i < n} \frac{i}{n} \alpha_i^{n/i}.$$

Donc $\alpha_1 = c$. Compte tenu du fait que $|e_n| \leq 1$, on a, avec le choix $c^{p-1} = e_p$ (resp. $c = p^{-1/p}$ si $e_p = 0$), $|\alpha_2| \leq 1, \dots, |\alpha_{p-1}| \leq 1$.

$$\alpha_p = \frac{1}{p} (ce_p - c^p),$$

donc,

$$\text{si } |e_p| \geq p^{-1+(1/p)}, \text{ on a } \alpha_p = 0 \text{ avec } c^{p-1} = e_p,$$

et

$$\text{si } |e_p| \leq p^{-1+(1/p)}, \text{ on a } |\alpha_p| \leq 1 \text{ avec le choix } c = p^{-1/p}.$$

Il est clair alors que $|\alpha_{p+1}| \leq 1, \dots, |\alpha_{2p-1}| \leq 1$ et $|\alpha_{2p}| \leq p$ si $p \neq 2$, et $|\alpha_4| \leq 2^2$ si $p = 2$. De l'inégalité ultramétrique, on tire

$$|\alpha_n| \leq \sup\left(\frac{|c| |e_n|}{|n|}, \sup_{i|n} \left(\frac{i}{n} |\alpha_i|^{n/i}\right)\right) \\ \leq \sup\left(\sup_{1 \leq i \leq n} \left|\frac{ce_n i}{n}\right|, \sup_{2p \leq i < n} \left|\frac{i}{n} \alpha_i^{n/i}\right|\right)$$

car $|\alpha_i| \leq 1$ si $1 \leq i < 2p$.

Il suffit donc de montrer que, pour $p \neq 2$,

$$(a) \quad \frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1} \geq \left[\frac{\log n}{\log p}\right] \text{ pour } n \geq 2p,$$

$$(b) \quad \frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1} \geq \frac{n}{i} \left(\frac{i}{2p-2} - \frac{1}{p-1}\right) + \left[\frac{\log(n/i)}{\log p}\right],$$

pour n et $i \geq 2p$, car $|c| \leq 1$.

Démontrons (a). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \geq \frac{x}{2p-2} - \frac{1}{p-1} - \frac{\log x}{\log p} = g(x).$$

Pour $2p \leq x \leq p^2 - 1$, on a directement $f(x) \geq 0$.

Pour $x \geq p^2$, on montre que $g(x) \geq 0$, car $g(x)$ a un minimum pour $x = \frac{2p-2}{\log p} < p^2$ et $g(p^2) \geq 0$ si $p \geq 3$.

Démontrons (b). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{x}{p-1} - \frac{1}{p-1} - \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \geq \frac{x}{p-1} - \frac{1}{p-1} - \frac{\log x}{\log p} = g(x),$$

où $x = n/i$, donc $x \geq 2$. Si $2 \leq x \leq p$, $f(x) \geq 0$. Si $x \geq p$, alors $g(x) \geq 0$ car $g(x)$ a un minimum pour $x = \frac{p-1}{\log p} < p$ et $g(p) = 0$.

Si $p = 2$, il suffit de montrer

$$(a) \quad \frac{3}{4}n - 1 \geq \left[\frac{\log n}{\log 2}\right] \text{ pour } n \geq 4,$$

(b) $\frac{3}{4}n - 1 \geq \left(\frac{3}{4}i - 1\right)\frac{n}{i} + \left[\frac{\log(n/i)}{\log 2}\right]$, pour $n \geq 4$, car $|c| \leq 1$.

Démontrons (a). - On étudie la fonction

$$f(x) = \frac{3}{4}x - 1 - \frac{\log x}{\log 2} \quad (x \geq 4),$$

elle a un minimum pour $x = 4/(3 \log 2) < 4$ et $f(4) = 0$.

Démontrons (b). - On étudie la fonction

$$f(x) = x - 1 - \frac{\log x}{\log 2}, \text{ où } x = n/i,$$

donc $x \geq 2$. Elle a un minimum pour $x = 1/\log 2 < 2$ et $f(2) = 0$.

Nous avons donc démontré que $\alpha_1 = c$ et, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &\leq |c| p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} \quad \text{si } p \neq 2 \\ (|\alpha_n| &\leq |c| 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si } p = 2). \end{aligned}$$

On déduit de là immédiatement que $\beta_1 = c$ et, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} |\beta_n| &\leq |c| p^{\frac{n}{2p-2} - \frac{1}{p-1}} \quad \text{si } p \neq 2 \\ (|\beta_n| &\leq |c| 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si } p = 2). \end{aligned}$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 2. - La série $1/(\sum_{n \geq 1} \beta_n Y^{n-1})$ a pour rayon de convergence $\rho_p = p^{-1/(2p-2)}$ si $p \neq 2$, $\rho_2 = 2^{-3/4}$ si $p = 2$ et

$$\sup_{Y \in B(0, \rho_p)} \left| \frac{1}{\sum_{n \geq 1} \beta_n Y^{n-1}} \right| \leq |c|^{-1}.$$

Démonstration. - On a $\beta_1 = c$ et

$$\begin{aligned} |\beta_n| &\leq |c| p^{(n-2)/(2p-2)} \quad \text{si } p \neq 2, \\ \text{resp. } |\beta_n| &\leq |c| 2^{3(n-1)/4} \quad \text{si } p = 2. \end{aligned}$$

Q. E. D.

THEOREME 2. - Soit $Y = \sum_{n \geq 1} a_n \frac{X^n}{n!}$ et $X = \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n$ avec $e_1 = 1$ et $|e_n| \leq 1$ (e_n et $a_n \in \mathbb{C}_p$).

Si l'on choisit $c \neq 0$ tel que $c^{p-1} = e_p$ si $|e_p| > p^{-1+(1/p)}$ (respectivement $c = p^{-(1/p)}$ si $|e_p| \leq p^{-1+(1/p)}$), on a

$$Y = \sum_{n \geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n$$

$$\text{avec } b_1 = \frac{1}{c} \text{ et } |b_n| \leq |c|^{-n} p^{(n-1)/2(p-1)}$$

si $p \neq 2$ (respectivement $|b_n| \leq |c|^{-n} 2^{3(n-1)/4}$ si $p = 2$).

Démonstration. - C'est immédiat à partir du corollaire 2 et du théorème de Lagrange-Bürman, via les inégalités de Cauchy pour les séries de Taylor $\sum_{m \geq 0} b_m^{(n)} Y^m$.

Q. E. D.

Remarque. - On peut un peu raffiner les inégalités sur les b_n . Il est clair, en

effet que $|\beta_n| \leq |c|$ pour $n \leq 2p - 1$, $|\beta_{2p}| \leq |c|_p$, donc même chose pour les b_n .

THÉOREME 3. - Soit

$$X = \sum_{n \geq 1} \frac{e_n}{n} Y^n \quad \text{avec} \quad e_1 = 1 \quad \text{et} \quad |e_n| \leq 1,$$

et

$$Y = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} X^n$$

deux séries réciproques de $\mathbb{C}_p[[X]]$.

(i) Si $|e_p| > p^{-1/2}$, $Z(X) = \sum_{n \geq 1} a_n X^n$ est un élément analytique p-adique [1], sur

$$\mathbb{C}(\rho_p) = B(0, \rho_p^{-1}) - \bigcup_{i=1}^{p-1} B(i^{-1} c^{-1}, \rho_p)$$

avec $\rho_p < |c|^{-1} p^{-(1/2)-(1/2(p-1))}$ si $p \neq 2$, respectivement $\rho_2 < |c|^{-1} 2^{-1/2}$.
En outre, $\sup_{X \in \mathbb{C}(\rho_p)} |Z(X)| \leq 1$ si $\rho_p \leq |c|^{-1} p^{-1/2}$ pour $p \neq 2$, respective-
ment $\rho_2 \leq |c|^{-1} 2^{-1/4}$.

(ii) Si $|e_p| \leq p^{-1/2}$, $Z(X)$ est une fonction analytique (non bornée) sur
 $B(0, \rho_p^{-1})$, où $\rho_p < p^{-1/(2p-2)}$ pour $p \neq 2$, respectivement $\rho_2 < 2$.

En outre, $\sup_{X \in B(0, \rho_p)} |Z(X)| = 1$ si

$$\rho_p \leq p^{-(1 - \frac{1}{5 \log p}) \frac{1}{2(p-1)}} \quad \text{pour } p \neq 2,$$

$$\rho_2 \leq 2^{-(1 - \frac{2}{5}) \frac{1}{4}}.$$

respectivement si $\rho_2 \leq 2$.

Démonstration. - Rappelons qu'un élément analytique p-adique sur un sous-ensemble $\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}_p$ est une limite uniforme sur $\mathbb{C}$ de fractions rationnelles de $\mathbb{C}_p(X)$ sans pôles dans $\mathbb{C}$ [1]. Choisissons $c \neq 0$ tel que $c^{p-1} = e_p$ si $|e_p| > p^{-1+(1/p)}$ (resp. $c = p^{-1/p}$ sinon). On a, par le théorème 2 :

$$Y = \sum_{n \geq 1} b_n (e^{cX} - 1)^n \quad \text{avec} \quad b_1 = \frac{1}{c}$$

et

$$|b_n| \leq |c|^{-n} p^{(n-1)/(2p-2)} \quad \text{si } p \neq 2$$

(resp. $|b_n| \leq |c|^{-n} 2^{3(n-1)/4}$ si $p = 2$). Soit $\mathcal{L}$ l'application de $\mathbb{C}_p[[X]]$ dans lui-même, définie par

$$\tilde{f}(X) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{X^n}{n!} \mapsto \mathcal{L}(\tilde{f}(X)) = f(X) = \sum_{n \geq 0} a_n X^n.$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}((e^{cX} - 1)^n) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{1 - kcX} \\ &= \frac{n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)} = \left[0, \frac{n}{c}, X \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$Z(X) = \sum_{n \geq 1} b_n \frac{n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)}.$$

Nous allons montrer que sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ la suite $n \rightarrow b_n \left[0, \frac{n}{c}, X \right]$ converge uniformément vers zéro, si $|e_p| > p^{-1/2}$. En effet, posons

$$\rho_p = |c|^{-1} p^{-(1/2) - (1/2(p-1)) + \varepsilon} \text{ avec } \varepsilon > 0, \quad p \neq 2,$$

alors

$$\sup_{X \in \mathcal{C}_p} \left| \frac{b_n n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)} \right| \leq p^{-\varepsilon n - \frac{1}{2p-2} + \left[\frac{\log n}{\log p} \right] + 1},$$

ce qui montre que $Z(X)$ est un élément analytique sur $\mathcal{C}(\rho_p)$ si

$$\rho_p < p^{-(1/2) - (1/2(p-1))} |c|^{-1}$$

(même démonstration pour ρ_2).

Si $p \neq 2$ et si $\varepsilon \geq \frac{1}{2(p-1)}$, alors des calculs antérieurs (théorème 1) montrent que

$$\sup_{X \in \mathcal{C}(\rho_p)} \left| \frac{b_n n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)} \right| \leq 1 \quad \text{pour } n \geq 4p - 4.$$

La remarque qui suit le théorème 2 permet de conclure pour $1 \leq n < 4p - 4$, car alors $|\beta_n| \leq |c|^{-1} p$.

La démonstration est analogue pour $p = 2$. On a donc démontré (i).

Si $|e_p| \leq p^{-1/2}$ alors, si $|X| < |c|^{-1} \leq p^{1/(2p-2)}$, $p \neq 2$,

$$\sup_{X \in B(0, \rho_p)} \left| \frac{b_n n! c^n X^n}{(1 - cX) \dots (1 - ncX)} \right| \leq p^{1 - \varepsilon n + \frac{\log n}{\log p}}, \quad \varepsilon > 0,$$

et donc la limite pour $n \rightarrow \infty$ est zéro.

On a donc montré que, si $|e_p| \leq p^{-1/2}$ et $p \neq 2$, $Z(X)$ est une fonction analytique sur $B(0, \rho_p^{-1})$ avec $\rho_p < p^{-1/(2p-2)}$. La démonstration est analogue pour $p = 2$.

Posons

$$\rho_p^{-1} = \frac{\alpha}{2(p-1)}, \quad \text{resp.} \quad \rho_2^{-1} = \frac{\alpha}{4}.$$

On cherche $\alpha \leq 1$ tel que

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{X \in B(0, \rho_p^{-1})} \left| b_n \left[0, \frac{n}{c}, X \right] \right| \leq 1.$$

On cherche donc $\alpha \leq 1$ tel que, pour $p \neq 2$,

$$\sup_{n \geq 1} p^{\frac{n-1}{2(p-1)} - \frac{n}{p-1} + \left[\frac{\log n}{\log p} \right] + \frac{\alpha n}{2(p-1)} + 1} \leq 1$$

ou de manière équivalente,

$$f(n) = n \frac{\alpha - 1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p-1)} + \left[\frac{\log n}{\log p} \right] + 1 \leq 0.$$

On voit que le maximum de $f(n)$ est atteint pour $n = \frac{2(p-1)}{(1-\alpha)\log p}$. On choisit alors α pour que ce maximum soit négatif. On trouve

$$\alpha \leq 1 - \frac{p}{e p^{1/(2(p-1))} 2(p-1) \log p}, \quad \text{où } e = 2, 7, \dots$$

Si $p = 2$, on trouve de manière analogue $\alpha \leq 1 - (2/(e2^{11/4} \log 2))$. On prendra donc de manière approchée

$$\alpha = 1 - \frac{1}{5 \log p} \text{ si } p \neq 2 \text{ et } \alpha = 1 - \frac{2}{5} \text{ si } p = 2.$$

Q. E. D.

COROLLAIRE 3. - Si $|e_p| \geq p^{-1/2}$, alors, pour $n \geq h$ et $p \neq 2$,

$$\left| \frac{a_n}{c^n} - \frac{a_{n+(p-1)p^{h-1}}}{c^{n+(p-1)p^{h-1}}} \right| \leq p^{-h/2}$$

(resp. $\leq 2^{-h/4}$).

Pour $n \geq m$ et $p \neq 2$,

$$\left| \sum_{r=0}^m (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \frac{a_{n+r(p-1)}}{c^{n+r(p-1)}} \right| \leq p^{-m/2}$$

(resp. $\leq 2^{-m/4}$).

Démonstration. - C'est immédiat à partir de la décomposition de Mittag-Leffler [1] ou [8], de $Z(X)$ sur $\mathbb{C}(\rho_p)$ avec

$$\rho_p = |c|^{-1} p^{-1/2} \text{ si } p \neq 2$$

et

$$\rho_2 = |c|^{-1} 2^{-1/4} \text{ si } p = 2.$$

Q. E. D.

Remarque 1. - On peut aussi le démontrer en tronquant la série qui définit $Z(X)$ sur $\mathbb{C}(\rho_p)$ à un rang suffisamment grand en fonction de h et m .

Remarque 2. - Ces résultats sont à rapprocher de ceux de Carlitz ([3], [4], [5]).

COROLLAIRE 4. - Si $|e_p| \geq p^{-1/2}$, posons

$$a_n^* = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{a_{n+(p-1)p^h}}{c^{n+(p-1)p^h}}$$

(limite au sens p -adique). Alors a_n^* est, pour $n \equiv i \text{ modulo } (p-1)$, la restriction d'une fonction localement analytique de $\mathbb{Z}_p$ dans $\mathbb{C}_p$ de rayon d'analyticité local supérieur ou égal à $p^{(p-3)/2(p-1)}$ si $p \neq 2$ (resp. $2^{-1/4}$).

Démonstration. - C'est encore immédiat à partir de la décomposition de Mittag-Leffler de $Z(X)$. En effet,

$$Z^*(X) = \sum_{n \geq 1} a_n^* X^n$$

a la même décomposition de Mittag-Leffler que $Z(X)$ relativement aux trous $B(i^{-1} c^{-1}, \rho_p)$, et n'a pas de partie singulière relative au trou à l'infini. Donc $Z^*(X)$ est un élément analytique p -adique sur $\mathbb{C}_p - \bigcup_{i=0}^{p-1} B(i^{-1} c^{-1}, \rho_p)$ nul à l'infini. Le résultat est alors immédiat.

Q. E. D.

COROLLAIRE 5. - Si $|e_p| < p^{-1/2}$, alors pour $p \neq 2$,

$$\left| a_n p^{-\frac{n}{2p-2}\left(1 - \frac{1}{5 \log p}\right)} \right| \leq 1 ,$$

respectivement

$$\left| a_n 2^{-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{5}\right)n} \right| \leq 1 .$$

Démonstration. - C'est immédiat à partir du théorème 3 et des inégalités de Cauchy.

Q. E. D.

Remarque. - Si l'on connaît des résultats plus fins sur les e_n , on peut améliorer l'estimation des $|b_n|$ et donc, par là même, les congruences sur les a_n .

Par exemple si l'on sait que

$$e_{np^{v+1}} \equiv e_{np^v} e_p \pmod{p^{v+1}} ,$$

alors on peut facilement montrer que $|b_n| \leq 1$. Mais déjà si l'on sait que $e_{np} \equiv e_n e_p \pmod{p}$, on a de meilleurs résultats sur les $|b_n|$.

Par exemple, si $e_n \in \mathbb{Z}$, $|e_p| \leq p^{-1}$, alors on peut montrer que $p^{[np/(p^2-1)]}$ divise a_n et que $a_n/p^{[np/(p^2-1)]}$ vérifie des congruences analogues à celle du corollaire 3 (Cf. KATZ [7]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.). - Nombres p -adiques. - Paris, Presses Universitaires de France, 1975 (Collection SUP, "Le Mathématicien", 14).
- [2] BARSKY (D.). - Transformation de Cauchy p -adique et algèbre d'Iwasawa, Math. Annalen (à paraître).
- [3] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficients of the Jacobi elliptic function, Duke math J., t. 16, 1949, p. 297-302.
- [4] CARLITZ (L.). - Congruences for the coefficients of hyperelliptic and related functions, Duke math. J., t. 19, 1952, p. 329-337.
- [5] CARLITZ (L.). - Congruences for generalized Bell and Stirling numbers, Duke math. J., t. 22, 1955, p. 193-205.
- [6] EICHLER (M.). - Introduction to the theory of algebraic numbers and functions. - New York, Academic Press, 1966 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 23).
- [7] KATZ (N.). - Graduate course, Princeton University, 1977/78.
- [8] ROBBA (P.). - Fonctions analytiques sur les corps valués complets ultramétriques, Astérisque n° 10, 1973, p. 109-218.

(Texte reçu le 20 octobre 1977)

Daniel BARSKY
Mathématiques, Tour 45-55,
Université Paris-7
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05