GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

GILLES CHRISTOL

Structure de Frobénius des équations différentielles p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J5, p. J1-J7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A4_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J5, 7 p.

Journées d'Analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

STRUCTURE DE FROBÉNIUS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES p-ADIQUES

par Gilles CHRISTOL

Dans [1], DWORK avait, à la suite de l'étude des équations différentielles provenant de la géométrie algébrique, conjecturé que toute équation différentielle p-adique avait une structure de Frobénius faible en tout point non singulier ; ROBBA, dans [3], a démontré la conjecture dans le cas d'équation différentielle d'ordre 1 , nous nous proposons d'étudier le cas général. Nous emploierons le langage des modules différentiels (que certains appellent connexions) qui rend les définitions plus "naturelles".

1. Modules différentiels.

Soit k un anneau , σ un automorphisme de k , et A un sous-anneau de $k[[x]]$. A est supposé stable par les opérateurs :

(a) opérateurs de Frobénius : $a \to a^{\sigma}(x^p)$ (le σ porte sur les coefficients de a), ainsi que son inverse; si $a^{\sigma}(x^p) \in A$, alors $a \in A$.

(b) opérateurs de dérivation : $a \to da/dx$ et $a \to x(da/dx) = \theta(a)$.

Un module différentiel est alors donné par

- un A-module de type fini $\mathfrak{M}$
- une application linéaire θ de $\mathfrak{M}$ dans lui-même qui vérifie

$$\forall\ a \in A \quad \text{et} \quad \forall\ m \in \mathfrak{M}\ , \quad \theta(am) = \theta(a)m + a\theta(m)\ .$$

Les morphismes de la catégorie des A-modules différentiels sont donnés par les applications A-linéaires qui commutent avec la dérivation θ .

Si deux A-modules différentiels $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont munis de bases, et si on note M et N respectivement, les matrices représentant l'opérateur θ sur ces deux bases, un morphisme h de $\mathfrak{M}$ dans $\mathfrak{N}$ sera représenté par une matrice H qui vérifie

$$\theta H = MH - HN \ , \tag{1}$$

où θH désigne la matrice obtenue en appliquant θ à chacun des termes de H . En particulier, $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ seront isomorphes si, et seulement si, il existe une matrice H inversible qui vérifie la relation (1).

Si on note O_n le module A^n muni de l'application $\theta = 0$, on a le résultat suivant.

PROPOSITION. – $\mathcal{M}$ <u>est isomorphe à</u> O_n <u>si, et seulement si, le système différentiel</u> $H = MH$ <u>a une solution complète dans</u> A .

Étant donné deux A-modules différentiels $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$, on définit les A-modules différentiels $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ et $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ comme dans le cas classique en tant que A-modules et d'après les formules :

$$\theta(m + n) = \theta(m) + \theta(n)$$

$$\theta(m \otimes n) = \theta(m) \otimes n + m \otimes \theta(n) .$$

2. Frobénius.

Nous noterons M^{φ} la matrice $M^{\sigma}(x^p)$, où σ porte sur tous les coefficients des termes de M . $\mathcal{M}$ étant un A-module différentiel, nous noterons $\mathcal{M}^{\varphi}$ le module égal à $\mathcal{M}$ en tant que A-module, mais pour lequel l'application θ est donnée par la matrice pM^{φ} dans la base de $\mathcal{M}$ pour laquelle θ est donnée par M .

Si le système différentiel $H = MH$, associé au module $\mathcal{M}$, a une solution complète $H(x)$ dans un anneau B , alors le système différentiel associé à $\mathcal{M}^{\varphi}$ a pour solution $H^{\sigma}(x^p) = H^{\varphi}$.

La proposition suivante montre que le module $\mathcal{M}^{\varphi}$ ne dépend pas de la base de $\mathcal{M}$ choisie.

PROPOSITION. – <u>Si</u> $\mathcal{M}$ <u>et</u> $\mathcal{N}$ <u>sont isomorphes en tant que</u> A-<u>modules différentiels, il en est de même de</u> $\mathcal{M}^{\varphi}$ <u>et</u> $\mathcal{N}^{\varphi}$.

Par hypothèse, il existe H , matrice inversible de $GL(n , A)$ telle que

$$\theta H = MH - HN ,$$

nous posons $K = H^{\varphi}$, il vient

$$\theta K = p(\theta H)^{\varphi} = (pM)^{\varphi} H^{\varphi} - H^{\varphi}(pN)^{\varphi} = (pM^{\varphi})K - K(pN^{\varphi})$$

puisque H est inversible, il en est de même de K $(K^{-1} = (H^{-1})^{\varphi})$, et la proposition est démontrée.

Comme l'a remarqué ROBBA, l'existence d'une structure de Frobénius revient à démontrer l'existence, pour tout $\mathcal{M}$ d'un $\mathcal{N}$ tel que $\mathcal{N}^{\varphi} = \mathcal{M}$. Nous allons commencer par examiner l'unicité (dans le cas où il existe) de cet $\mathcal{N}$.

PROPOSITION. – A^* <u>désignant les éléments inversibles de</u> A , <u>si</u> $(A^* + pA)$ <u>est contenu dans</u> A^* , <u>alors si</u> $\mathcal{M}^{\varphi}$ <u>et</u> $\mathcal{N}^{\varphi}$ <u>sont isomorphes, il en est de même de</u> $\mathcal{M}$ <u>et</u> $\mathcal{N}$.

Par hypothèse, il existe une matrice H dans $GL(n , A)$, telle que

$$\theta H = (pM^{\varphi})H - H(pN^{\varphi}) .$$

Nous avons $H = \sum H_n x^n$, où les H_n sont des matrices à coefficients dans k , ce qui donne :

$$\sum nH_n\, x^n = \sum[pM^{\sigma}(x^p)\, H_n - H_n\, pN^{\sigma}(x^p)]\, x^n ,$$

$$p\, \sum nH_{np}\, x^n = \sum[pM^{\sigma}(x)\, H_{np} - H_{np}\, pN^{\sigma}(x)]\, x^n ,$$

en ne considérant dans la première égalité que les termes dont la puissance de x soit un multiple de p. Nous posons donc $K = \sum H_{np}^{\sigma^{-1}}\, x^n$, et nous obtenons

$$\theta K = MK - KN .$$

Or nous savons que θH appartient à $pM_n(A)$, ce qui implique que nH_n appartient à $pM_n(k)$, et H_n lui-même, pour $(n , p) = 1$, appartient à $pM_n(k)$, ce qui démontre que

$$H - K^{\varphi} \text{ appartient à } pM_n(A) .$$

Il s'en suit que

$$\det H = \det(K^{\varphi}) = (\det K)^{\varphi} \pmod{pA} ,$$

et, d'après l'hypothèse, $(\det K)^{\varphi}$, et donc $(\det K)$, sont inversibles dans A, par suite K est bien inversible.

PROPOSITION. - <u>$\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ étant deux A-modules différentiels, on a</u>

$$\mathcal{M}^{\varphi} \oplus \mathcal{N}^{\varphi} = (\mathcal{M} \oplus \mathcal{N})^{\varphi} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{\varphi} \otimes \mathcal{N}^{\varphi} = (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})^{\varphi} .$$

3. Le foncteur U.

Dans ce paragraphe, nous supposons que k est un corps de caractéristique nulle (en fait que p est inversible dans k), c'est-à-dire le cas où $A^* + pA$ n'est certainement pas contenu dans A^*.

Étant donnée une matrice M de $M_n(A)$, $M = \sum M_n\, x^n$, nous posons,

$$\text{pour } 0 \leq i < p , \quad U_i\, M = \sum M_{i+np}^{\sigma^{-1}}\, x^n ,$$

et nous notons M^U la matrice de $M_{np}(A)$:

$$M^U = \begin{bmatrix} U_0\, M & xU_{p-1}\, M & \cdots & xU_1\, M \\ U_1\, M & U_0\, M & & xU_2\, M \\ & & & \\ U_{p-1}\, M & & & U_0\, M \end{bmatrix}$$

LEMME. - $M^U + N^U = (M + N)^U$; $M^U\, N^U = (MN)^U$.

La première relation est évidente, pour la deuxième, on part de

$$MN = \sum_{i=0}^{p-1} x^i (U_i\, M)\, \sum_{j=0}^{p-1} x^j (U_j\, N) ,$$

et on cherche les termes dont la puissance de x est congrue à i modulo p, ce qui donne

$$U_i(MN) = \sum_{j=0}^{i} U_j\ MU_{i-j}\ N + x \sum_{j=i+1}^{p-1} U_j\ MU_{i-j+p}\ N\ ,$$

d'où le résultat en faisant le produit par blocs des matrices.

Nous définissons dans $M_{np}(A)$ la matrice J (I est l'identité de $M_n(A)$).

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{p}I & 0 & \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{p-1}{p}I \end{bmatrix}$$

LEMME. – $\theta(M^U) = \frac{1}{p}(\theta M)^U - JM^U + M^U J$.

Un calcul simple donne

$$\theta(U_i\ M) = \frac{1}{p}\ U_i(\theta M) - \frac{i}{p}\ U_i\ M\ ,$$

ce qui permet de vérifier la formule.

$\mathfrak{M}$ étant un module différentiel, nous noterons $\mathfrak{M}^U$ le module égal à la somme directe de p modules égaux à $\mathfrak{M}$, muni de l'application θ donnée par la matrice $\frac{1}{p}\ M^U - J$.

PROPOSITION. – <u>Si $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont deux A-modules différentiels isomorphes, il en est de même de $\mathfrak{M}^U$ et de $\mathfrak{N}^U$</u> .

Par hypothèse, il existe H , inversible, telle que $\theta H = MH - HN$ ce qui, d'après les lemmes, conduit à

$$\theta(H^U) = (\frac{1}{p}\ M^U - J)\ H^U - H^U(\frac{1}{p}\ N^U - J)\ .$$

Il suffit donc de vérifier que H^U est bien une matrice inversible. Pour cela, ξ étant une racine p-ième de l'unité, nous considérons la matrice de $M_{np}(A)$

$$T = [\xi^{ij}\ x^j\ I]\ ,\quad T^{-1} = \frac{1}{p}[\xi^{-ij}\ x^{-i}\ I]$$

un calcul classique montre que

$$T(M^U) = [\xi^{-j}\ x^j\ M(\xi^i\ x)]$$

$$T(M^U)\ T^{-1} = \begin{bmatrix} M(x) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M(\xi x) & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & M(\xi^{p-1}x) \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne

$$(\det M^U)^\varphi = \det(M^U)^\varphi = \det(T(M^U)^\varphi\ T^{-1}) = \prod_{i=0}^{p-1} \det M(\xi^i\ x)\ ,$$

c'est-à-dire que si H est inversible, il en est bien de même de H^U.

Nous noterons $[\alpha]$ le A-module différentiel A muni de l'application θ définie par $\theta 1 = \alpha$.

PROPOSITION. - $(\mathcal{M}^{\varphi})^U = \oplus_{i=0}^{p-1}([i/p] \otimes \mathcal{M})$.

En effet, la matrice de l'application θ correspondant à $(\mathcal{M}^{\varphi})^U$ n'est autre que

$$\begin{bmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M-I & 0 & 0 \\ & & & \\ 0 & \cdots & 0 & M-\frac{p-1}{p}I \end{bmatrix}$$

et il est facile de voir que le module correpondant à la matrice $M-(i/p)I$ n'est autre que

$$[\tfrac{-i}{p}] \otimes \mathcal{M} = [\tfrac{p-i}{p}] \otimes \mathcal{M} .$$

Nous dirons que 0 n'est pas un point singulier de $\mathcal{M}$ si $\mathcal{M}$ est, en tant que k((x))-module différentiel, isomorphe à

$$0_n = \overbrace{[0] \oplus \cdots \oplus [0]}^{n \text{ fois}} .$$

COROLLAIRE. - <u>Si</u> $\mathcal{M}^{\varphi}$ <u>et</u> $\mathcal{N}^{\varphi}$ <u>sont isomorphes en tant que</u> A-<u>modules différentiels</u>, <u>et si</u> 0 <u>n'est un point singulier ni pour</u> $\mathcal{M}$, <u>ni pour</u> $\mathcal{N}$, <u>alors</u> $\mathcal{M}$ <u>et</u> $\mathcal{N}$ <u>sont isomorphes</u>, <u>en tant que</u> A-<u>modules différentiels</u>.

La proposition précédente montre que

$$\sum_{i=0}^{p-1} [\tfrac{i}{p}] \otimes \mathcal{M} \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p-1} [\tfrac{i}{p}] \otimes \mathcal{N}$$

sont A-isomorphes, donc aussi k((x)) isomorphes. K((x)) étant un corps, ce dernier isomorphisme nous donne donc deux décompositions de Jordan-Hölder du même module, comme [i/p] et [j/p] ne sont isomorphes en tant que k((x))-modules que si $i = j \pmod p$ l'isomorphisme de départ ne peut être qu'entre $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$.

<u>Remarque</u>. - Il est clair que $[i/p]^{\varphi} = [0] = [0]^{\varphi}$, le corollaire précédent montre que c'est, essentiellement, le seul cas où $\mathcal{M}^{\varphi}$ et $\mathcal{N}^{\varphi}$ sont isomorphes sans que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ le soient.

4. <u>Résultats particuliers</u>.

(a) k algébriquement clos, $A = k((x))$ (d'après [2]). - Si $\mathcal{M}$ est un A-module fuschien (cas qui correpond à 0 point singulier régulier), alors $\mathcal{M}$ est isomorphe à une somme directe de modules $[\lambda] \otimes \mathcal{M}^{(a)}$, où $\mathcal{M}^{(a)}$ est le A-module différentiel de dimension a et d'application θ définie par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

un calcul très simple montre qu'alors

$$\mathfrak{M}^{\varphi} = [p\lambda] \otimes \mathfrak{M}^{(a)} .$$

(b) $k = \underset{\sim}{Z}_p$, $A = k[[x]]$.

Dans ce cas, p^n est un sous-A-module différentiel et $\mathfrak{M}/p^n \mathfrak{M}$ est un $(\underset{\sim}{Z}/p^n \underset{\sim}{Z})$-module différentiel. On dira que $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ sont congrus modulo p^n si $\mathfrak{M}/p^n \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}/p^n \mathfrak{N}$ sont des $(\underset{\sim}{Z}/p^n \underset{\sim}{Z})$-modules isomorphes.

PROPOSITION (ROBBA). - <u>Si</u> $\mathfrak{M}$ <u>et</u> $\mathfrak{N}$ <u>sont, pour tout</u> n , <u>congrus modulo</u> p^n , <u>alors</u> $\mathfrak{M}$ <u>et</u> $\mathfrak{N}$ <u>sont isomorphes</u>.

Par hypothèse, il existe H , inversible dans $A/p^n A$, telle que

$$\theta H = MH - HN \pmod{p^n} ,$$

c'est-à-dire une solution approchée du système différentiel qui donne les coefficients de H , on sait alors qu'il existe une vraie solution (bornée), dans A , de ce système.

PROPOSITION. - <u>Si, pour tout</u> h , <u>il existe</u> $\mathfrak{N}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^{\varphi^h}$, <u>alors</u> $\mathfrak{M} = O_n$.

En effet, la définition même de φ montre que $\mathfrak{N}^{\varphi^h}$ est congru à O_n mod p^h .

(c) $k = \underset{\sim}{C}_p$, A = anneau des éléments analytiques sur $D(0 , 1^-)$.

PROPOSITION. - <u>On note</u> $\mathfrak{a}$ <u>les entiers de</u> $\underset{\sim}{C}_p$ <u>si</u> $\mathfrak{M}$ <u>est isomorphe à</u> O_n <u>en tant que</u> $\mathfrak{a}[[x]]$ <u>module différentiel, alors pour tout</u> h , <u>il existe</u> $\mathfrak{N}$ <u>tel que</u> $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}^{\varphi^h}$.

Par hypothèse, il existe une matrice H , inversible, à coefficients dans $\mathfrak{a}[[x]]$, telle que $\theta H = MH$. Nous posons

$$H(x + z)\, H(x)^{-1} = \sum_n H_n(x)\, z^n .$$

Il est classique (depuis que DWORK l'a remarqué ...) que

$$nH_n(x) = \frac{d}{dx} H_{n-1}(x) - [H_{n-1}(x)\ M(x)]/x ,$$

ce qui montre que les $H_n(x)$ sont des éléments analytiques sur $D(0 , 1^-)$. D'autre part, $H(x)$ appartenant à $\mathfrak{a}[[x]]$, il en est de même de $H_n(x)$, et on trouve $H_0 = I$. Nous posons alors

$$\sum_{\xi^p=1} H(\xi x) = pK^{\varphi} ,$$

où K est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}[[x]]$. Il vient

$$pK^{\varphi} = \sum_{\xi^p=1} H(x + (\xi - 1)x) = [\sum_n \sum_{\xi^p=1} H_n(x)(\xi - 1)^n x^n] H(x)$$

comme $(1 - \xi)$ est de valuation $1/(p - 1)$, la matrice

$$B(x) = \frac{1}{p} \sum_{\xi^p=1} \sum_n H_n(x)(\xi - 1)^n x^n$$

est à coefficients éléments analytiques. On trouve même

$$B(x) = I + (-x) H_1(x) + \dots + (-x)^{p-1} H_{p-1}(x) \pmod{p^{1/(p-1)}}$$

ce qui montre que B est inversible (dans $GL(n, A)$).

Nous avons donc

$$\theta(K^{\varphi}) = \theta(BH) = (\theta B + BM) H = (\theta B + BM) B^{-1} K^{\varphi} ,$$

ce qui montre que la matrice $N = \frac{1}{p} \theta K K^{-1}$ est telle que N^{φ} appartienne à $GL(n,A)$, et donc est une matrice de $GL(n, A)$. Par suite,

$$\theta B = pN^{\varphi} B - BM ,$$

et $\mathfrak{M}$ est isomorphe au module $\mathfrak{N}^{\varphi}$ avec $\mathfrak{N}$ associé à N. $\mathfrak{N}$ vérifiant les hypothèses de la proposition, on peut recommencer, d'où le résultat.

Remarque. - Cette proposition résoud le problème de l'existence d'une structure de Frobénius faible dans le cas où toutes les solutions sont bornées. Nous n'avons utilisé cette hypothèse que pour démontrer que la matrice B est inversible (ce qui est essentiel).

Au lieu d'étudier le Frobénius près de $x = 0$, on peut se placer au voisinage d'un autre point ; il suffit de remplacer la transformation $x \to x^p$ par

$$(x - \alpha) \to (x - \alpha^{\sigma-1})^p ,$$

les hypothèses étant celles de la proposition ci-dessus, on voit que $(\alpha^{\sigma} \equiv \alpha^p \bmod p)$

$$H^{\sigma}((x - \alpha^{\sigma-1})^p + \alpha) H^{\sigma}(x^p)^{-1} = \sum_n H_n^{\sigma}(x) \, p^n(\dots)^n ,$$

ce qui montre que les deux applications ainsi définies correspondent à des modules isomorphes dès que les $H_n(x)$ restent bornés dans le disque contenant α, c'est-à-dire, en fait, dans tous les disques non singuliers.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, I., Bull. Soc. math. France, Mémoire 39-40, 1974, p. 27-37.

[2] MANIN (J. I.). - Moduli Fuchsiani, Annali Scuola norm. sup. Pisa, t. 19, 1965, p. 113-126.

[3] ROBBA (P.). - Structure de Frobénius faible pour les équations différentielles du premier ordre, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 2e année, 1974/75, n° 20, 11 p.

Gilles CHRISTOL
5 allée des Gradins
91350 GRIGNY

(Texte reçu le 8 juillet 1976)