ALAIN ESCASSUT

Spectres d'algèbres de Banach p-adiques

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, nº 2 (1975-1976), exp. nº J4, p. J1-J8
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A3_0>

Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, P. ROBBA)
3e année, 1975/76, n° J4, 8 p.

Journées d'analyse ultramétrique
[1976. Marseille-Luminy]

SPECTRES D'ALGÈBRES DE BANACH p-ADIQUES

par Alain ESCASSUT

1. Partitions naturelles et calcul fonctionnel holomorphe.

On désignera par K un corps ultramétrique complet, algébriquement clos. Soit D un fermé borné de K. On appelle *partition naturelle infraconnexe* de $K - D$ une partition $\mathcal{P}$ de $K - D$ dont les éléments sont :

- le complémentaire dans K d'un disque circonférencié $\overline{\mathcal{P}}$ contenant D,

- une famille de disques non circonférenciés inclus dans $\overline{\mathcal{P}} - D$, appelés *supertrous* de $\mathcal{P}$.

On définit un ordre $\prec$ entre les partitions naturelles infraconnexes de la façon suivante.

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux partitions naturelles infraconnexes de $K - D$. On dit que $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$ si $\overline{\mathcal{P}}_1 \subset \overline{\mathcal{P}}_2$ et si tout supertrou de $\mathcal{P}_2$ est inclus dans un supertrou de $\mathcal{P}_1$.

Soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle de $K - D$; on notera $\mathcal{E}(D, \mathcal{P})$ l'ensemble des filtres circulaires [6] de K sécant à D, ou bien sécant à la fois à un supertrou T de $\mathcal{P}$ et au complémentaire de T. Pour toute semi-norme multiplicative φ de $K(D)$, on notera $\mathcal{F}_\varphi$ le filtre circulaire associé à φ. Alors on définit sur l'algèbre $K(D)$ une norme $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$

$$\|h\|_{\mathcal{P}} = \sup\{\varphi(h) \; ; \; \mathcal{F}_\varphi \in \mathcal{E}(D, \mathcal{P})\} .$$

On notera $H(D, \mathcal{P})$ l'algèbre de Banach complétée de $K(D)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{P}}$.

PROPOSITION 1. - *Soit D un fermé borné de K, et soient $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ deux partitions naturelles de $K - D$ telles que $\mathcal{P}_1 \prec \mathcal{P}_2$. Alors on a $\|h\|_D \leqslant \|h\|_{\mathcal{P}_1} \leqslant \|h\|_{\mathcal{P}_2}$ pour tout $h \in K(D)$, et il existe un homomorphisme unique, continu, de $H(D, \mathcal{P}_2)$ dans $H(D, \mathcal{P}_1)$ qui induit l'identité sur $K(D)$.*

2. Théorème de Mittag-Leffler pour les partitions naturelles [9].

Si Λ est le complémentaire d'un disque, on notera $H_0(\Lambda)$ l'ensemble des $f \in H(\Lambda)$ tels que $\lim_{|\xi| \to \infty} f(\xi) = 0$.

THÉORÈME 1. - *Soit D un fermé borné de K ; soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$, et soient $(T_i)_{i \in I}$ les supertrous de $\mathcal{P}$. Soit T un supertrou de $\mathcal{P}$ (resp. $T = K - D$), et soit $T' = K - T$. Pour tout $h \in K(T')$,* on a $\|h\|_{T'} = \|h\|_{\mathcal{P}}$, et cette isométrie de $(K(T'), \|\cdot\|_{T'})$ dans $(K(D), \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ permet d'identifier $H(T')$ à une sous-algèbre de $H(D, \mathcal{P})$. Soit $f \in H(D, \mathcal{P})$.

Alors il existe f_0 unique appartenant à $H(\overline{\mathcal{P}})$, et pour tout $i \in I$, il existe f_i unique appartenant à $H_0(T_i')$ tel que la famille $(f_\iota)_{\iota=0,\iota\in I}$ soit sommable dans $H(D, \mathcal{P})$ et satisfasse $f = \sum_{\iota=0,\iota\in I} f_\iota$ et $\|f\|_{\mathcal{P}} = \sup_{\iota=0,\iota\in I} \|f_\iota\|_{T'_\iota}$.

COROLLAIRE 1. - Soit D un fermé borné de K , et soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$. Soit $h \in K(D)$, et soient $T_1, \dots, T_n$ les supertrous de h qui contiennent au moins un pôle de h . Soit Δ un infraconnexe fermé borné de K tel que $\Delta_= = \overline{\mathcal{P}}$ et $D \subset \Delta$, et tel que $T_1, \dots, T_n$ soient des trous de Δ . Alors on a $\|h\|_\Delta = \|h\|_{\mathcal{P}}$.

COROLLAIRE 2. - Soit D un fermé borné de K , soit $\mathcal{P}$ une partition naturelle infraconnexe de $K - D$ telle que $\Delta_= = \overline{\mathcal{P}}$ et telle que tout trou de Δ soit un supertrou de $\mathcal{P}$. Alors l'homomorphisme canonique de $(K(\Delta), \|\cdot\|_\Delta)$ dans $(K(D), \|\cdot\|_{\mathcal{P}})$ est isométrique et se prolonge de façon unique en un homomorphisme isométrique de $H(\Delta)$ dans $H(D, \mathcal{P})$.

Nous allons définir la notion de partition x-canonique grâce au lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $(A, \|\cdot\|)$ une K-algèbre de Banach commutative unitaire, soit x un élément inversible de A , et soit $D = s(x)$. Soit $\|\cdot\|'$ une semi-norme ultramétrique définie sur A , telle que

$$\left\|\frac{1}{x}\right\|_{si}^{A} \leq \left\|\frac{1}{x}\right\|' \leq \left\|\frac{1}{x}\right\| .$$

Alors on a

$$\left\|\frac{1}{x-b}\right\|' = \left\|\frac{1}{x}\right\|' \quad \text{pour tout } b \in K \text{ tel que } |b| < \frac{1}{\left\|\frac{1}{x}\right\|'} .$$

Appliquons ce lemme dans le cas où $\|\cdot\|' = \|\cdot\|$; on voit que grâce au lemme 1

$$d^-\left(b, \frac{1}{\|1/(x-b)\|}\right) = d^-\left(a, \frac{1}{\|1/(x-a)\|}\right) \quad \text{si} \quad |a-b| < \frac{1}{\|1/(x-a)\|} .$$

On appellera partition x-canonique l'unique partition naturelle infraconnexe de $K - s(x)$ de diamètre $\|x\|_{si}^{A}$ dont les supertrous $T(a)$ ont pour diamètre $\dfrac{1}{\|1/(x-a)\|}$.

3. Algèbres de Banach multbijectives.

Soit R un anneau commutatif unitaire. On note $Max(R)$ l'ensemble des idéaux maximaux de R , et on notera $\mathfrak{X}(R)$ l'ensemble des homomorphismes de R sur les corps quotients de R par ses idéaux maximaux. Pour tout $x \in R$, on notera $\sigma(x)$ l'adhérence dans $Max(R)$ pour la topologie de Jacobson, de l'ensemble des $\mathcal{M} \in Max(R)$ tels que $x \notin \mathcal{M}$. Soit F un fermé de $Max(R)$; alors l'ensemble $f(F)$ des $x \in R$, tels que $\sigma(x) \cap F = \emptyset$, est un idéal. Enfin, on notera $I(F)$ l'intersection des idéaux maximaux $\mathcal{M} \in F$. Rappelons les résultats élémentaires suivants.

LEMME 2. - Soit R un anneau commutatif unitaire, soit $\mathfrak{I}$ un idéal de R, et soit F un fermé de $\mathrm{Max}\,R$ tel que $F \cap h(\mathfrak{I}) = \emptyset$. Alors il existe $u \in \mathfrak{I}$ satisfaisant $\chi(u) = 1$, $\forall \chi \in \mathfrak{X}(R)$ tel que $\ker \chi \in F$.

COROLLAIRE. - Soit R un anneau commutatif unitaire sans radical, et soit F un fermé de $\mathrm{Max}\,R$. Alors, pour tout idéal $\mathfrak{I}$ tel que $h(\mathfrak{I}) = F$, on a

$$f(F) \subset \mathfrak{I} \subset I(F) .$$

Considérons maintenant un corps L algébriquement clos et valué (ultramétrique ou archimédien) complet. Soit $(A , \|\cdot\|)$ une L-algèbre normée commutative unitaire ; rappelons que l'on note $\mathrm{Mult}(A , \|\cdot\|)$ l'ensemble des semi-normes multiplicatives et $\mathrm{Mult}_m(A , \|\cdot\|)$ l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Mult}(A , \|\cdot\|)$ tels que l'idéal premier fermé $\mathrm{Ker}\,\varphi$ des $x \in A$ satisfaisant $\varphi(x) = 0$ soit un idéal maximal [8].

Soit A une K-algèbre de Banach commutative unitaire. Nous noterons Φ_A la surjection [7] $\varphi \to \mathrm{Ker}\,\varphi$, définie dans $\mathrm{Mult}_m(A , \|\cdot\|)$, à valeurs dans $\mathrm{Max}(A)$, et nous dirons que A est multbijective si Φ_A est une bijection. Grâce au procédé du calcul fonctionnel holomorphe, on démontre le théorème 2 suivant :

Nous allons maintenant introduire la notion de corps fortement valué afin de pouvoir résoudre le problème de la multbijectivité.

Définition. - Soit k le corps résiduel de K, et soit $|K| = \{|\lambda| \; ; \; \lambda \in K\}$. Nous dirons que K est fortement valué si l'un au moins des deux ensembles k et $|K|$ n'est pas dénombrable.

THÉORÈME 2. - Si K est fortement valué, toute K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire est multbijective. Si K n'est pas fortement valué, il existe des infraconnexes fermés bornés D de K tels que l'algèbre de Banach $H(D)$ ne soit pas multbijective.

Preuve. - On a démontré dans [5] l'existence d'infraconnexes fermés bornés D tels que $H(D)$ ne soit pas multbijective lorsque K n'est pas fortement valué. Réciproquement, on va donner un aperçu de la démonstration selon laquelle si K est fortement valué, toute K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire est multbijective.

Procédant par l'absurde, on suppose qu'il existe φ_1 et $\varphi_2 \in \mathrm{Mult}(A , \|\cdot\|)$ tels que $\mathrm{Ker}\,\varphi_1 = \mathrm{Ker}\,\varphi_2$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, de sorte que le corps quotient $\Gamma = A/\mathrm{Ker}\,\varphi_1$ est une K-algèbre de Banach qui possède deux valeurs absolues continues :

$$|\theta(y)|_1 = \varphi_1(y) \quad \text{et} \quad |\theta(y)|_2 = \varphi_2(y) ,$$

en désignant par θ la surjection canonique de A sur Γ.

Alors il existe $x \in \Gamma$ tel que $|x|_1 \neq |x|_2$; supposons $|x|_1 < |x|_2$, et soit $\mathcal{P}_0$ la partition x-canonique. Comme K est fortement valué, on peut construire un infraconnexe fermé borné D possédant un T-filtre croissant $\mathcal{T}$ [4] tel que l'homomorphisme canonique de $(K(D), \|\cdot\|_D)$ dans $H(\emptyset, \mathcal{P}_0)$ soit continu et se prolonge en un homomorphisme continu N de $H(D)$ dans $H(\emptyset, \mathcal{P}_0)$, définissant ainsi un homomorphisme continu $\pi = \theta_i N$ de $H(D)$ dans Γ. Alors il existe un élément $\xi \in H(D)$ strictement annulé par $\mathcal{T}$, et on voit que $\pi(\xi)$ n'est pas inversible, ni nul, ce qui est absurde.

On montre le théorème suivant par un raisonnement voisin.

THÉORÈME 3. - Supposons K fortement valué, et soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire. Soit $\varphi \in \mathrm{Mult}(A, \|\cdot\|)$ tel que $h(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ soit dénombrable ; alors $\varphi \in \mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$.

4. Algèbres de Banach régulières et synthèse harmonique [2].

Rappelons qu'une $\mathbb{C}$-algèbre de Banach A est dite régulière si l'application $\chi \to \mathrm{Ker}\,\chi$ de $\mathfrak{X}(A)$ sur $\mathrm{Max}(A)$ est un homéomorphisme quand on munit $\mathfrak{X}(A)$ de la convergence simple, et $\mathrm{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson. En fait, il est équivalent de dire que Φ_A est un homéomorphisme, et comme Φ_A est trivialement continue, il est équivalent de dire que Φ_A est fermée.

Prolongeant donc la notion d'algèbre de Banach régulière comme dans la théorie classique, nous dirons qu'une K-algèbre de Banach A commutative unitaire est régulière si Φ_A est fermée quand on munit $\mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$ de la topologie de la convergence simple, et $\mathrm{Max}(A)$ de la topologie de Jacobson. On a une caractérisation immédiate des algèbres de Banach régulières.

PROPOSITION 2. - Soit A une K-algèbre de Banach commutative unitaire. Alors A est régulière si, et seulement si, pour tout couple de fermés F_1 , F_2 de $\mathrm{Mult}_m(A, \|\cdot\|)$, tels que $\Phi_A(F_1) \cap \Phi_A(F_2) = \emptyset$, il existe $x \in A$ tel que $\varphi(x) = 0$ pour tout $\varphi \in F_1$, et $\varphi(x) = 1$ pour tout $\varphi \in F_2$.

Nous allons maintenant rechercher les idéaux $\mathfrak{I}$ d'une K-algèbre de Banach A satisfaisant $\mathfrak{I} = I(h(\mathfrak{I}))$. Dans le cas où $h(\mathfrak{I})$ est dénombrable, on obtient aisément un résultat qui ne nécessite aucune hypothèse de régularité ni de multbijectivité sur A.

Définition. - Soit L un corps algébriquement clos valué ultramétrique ou archimédien complet. Nous dirons qu'une L-algèbre de Banach commutative unitaire A satisfait la condition de Ditkin si, pour tout $\mathfrak{M}_0 \in \mathrm{Max}(A)$, et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$, et une suite de voisinage V_n de $\mathfrak{M}_0$ (dans $\mathrm{Max}\,A$, pour la topologie de Jacobson de A) telle que $u_n \in \mathfrak{M}$, $\forall \mathfrak{M} \in V_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} x u_n = x .$$

THÉORÈME 4. - Soit A une L-algèbre de Banach commutative unitaire sans radical, satisfaisant la condition de Ditkin. Alors, pour tout idéal fermé $\mathfrak{I}$ tel que $h(\mathfrak{I})$ ait une frontière dénombrable (dans Max A, pour la topologie de Jacobson), on a $\mathfrak{I} = I(h(\mathfrak{I}))$.

Preuve. - Il s'agit de montrer que $I(h(\mathfrak{I})) \subset \mathfrak{I}$. Soit

$$F = \{\mathfrak{M}_n \; ; \; n \in \underset{\sim}{N}\}$$

la frontière de $h(\mathfrak{I})$; soit $x \in \mathfrak{I}$ et soit $\varepsilon > 0$. Nous allons définir une suite (u_n , V_n) où $u_n \in A$ et V_n est un voisinage de F dans Max(A) tel que

(1) $$\|x(u_{n+1} - u_n)\| \leqslant \varepsilon/n^2$$

et

(2) $$u_n \in \mathfrak{M} , \; \forall \mathfrak{M} \in V_n .$$

Supposons déjà définis (u_j , V_j) satisfaisant (1) et (2) pour $j = 1 , \dots , n$. D'après la condition de Ditkin, il existe $u \in A$, et il existe un voisinage V de $\mathfrak{M}_{n+1}$ tel que

$$\|u_n x(1 - u)\| \leqslant \varepsilon/(n+1)^2 \quad \text{et} \quad u \in \mathfrak{M} , \; \forall \mathfrak{M} \in V$$

de sorte que l'on peut définir $u_{n+1} = uu_n$ et $V_{n+1} = V_n \cup V$: on voit que les couples (U_j , V_j) satisfont bien (1) et (2) pour $j \leqslant n+1$. Donc la suite (u_n, V_n) est définie par récurrence, et la suite $u_n x$ converge évidemment vers une limite $y_\varepsilon \in A$ telle que

(3) $$\|x - y_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 \text{ et } y_\varepsilon \in \mathfrak{M} , \; \forall \mathfrak{M} \in \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$$

et bien sûr $\forall \mathfrak{M}_\varphi \in h(\mathfrak{I})$. Alors $h(\mathfrak{I}) \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n)$ est un voisinage de $h(\mathfrak{I})$ et l'on a

$$\sigma(y_\varepsilon) \cap h(\mathfrak{I}) = \emptyset ,$$

donc $y_\varepsilon \in \mathfrak{I}$ d'après le lemme.

Enfin ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui prouve, grâce à (3), que $x \in \mathfrak{I}$ puisque $\mathfrak{I}$ est fermé.

Remarque. - Cette démonstration n'est pas généralisable dans le cas où la frontière de $h(\mathfrak{I})$ n'est pas dénombrable. Pour cela nous allons utiliser dans la théorie ultramétrique un procédé apparenté à l'étude classique, à l'aide de la compacité de $\mathrm{Mult}(A , \|\cdot\|)$.

Notations. - Soit A une $\underset{\sim}{K}$-algèbre de Banach commutative unitaire, et soit $P \subset \mathrm{Max}(A)$. On notera $\tilde{P} = \Phi_A^{-1}(P)$. Soit $F \subset \mathrm{Mult}_m(A , \|\cdot\|)$; on notera $\hat{F}$ l'adhérence de F dans $\mathrm{Mult}(A , \|\cdot\|)$. Enfin, on notera

$$\Delta(A , \|\cdot\|) = \widehat{\mathrm{Mult}_m(A , \|\cdot\|)} .$$

On a tout d'abord dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$ un lemme préparatoire tout à fait analogue à celui connu dans le cas complexe.

LEMME 3. – Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multbijective, régulière, sans radical. Soit $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ un recouvrement ouvert fini de $\Delta(A, \|\cdot\|)$. Alors il existe $x_1, \dots, x_n \in A$ tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ et

$$\widehat{\sigma(x_i)} \subset \mathcal{O}_i, \quad \forall\, i = 1, \dots, n.$$

La proposition suivante remplace la proposition bien connue de la théorie classique selon laquelle, si x "appartient à $\mathfrak{J}$ au voisinage de $\mathfrak{M}$", pour tout $\mathfrak{M} \in \operatorname{Max} A$, alors $x \in \mathfrak{J}$. Ici, il faut encore remplacer $\operatorname{Max} A$ par $\Delta(A, \|\cdot\|)$.

PROPOSITION 3. – Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multbijective régulière, sans radical. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de A et soit $x \in A$ tel que, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$, il existe un voisinage V_φ de φ (dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$) et un élément $y_\varphi \in \mathfrak{J}$ satisfaisant $\theta(y_\varphi - x) = 0$, $\forall\, \theta \in V_\varphi$. Alors on a $x \in \mathfrak{J}$.

Maintenant nous pouvons conclure en introduisant deux variantes de la condition de Ditkin appliquées, non plus à $\operatorname{Max} A$, mais à $\Delta(A, \|\cdot\|)$, ce qui est encore, pour la première que nous allons citer, une forme de généralisation de la condition de Ditkin classique, $\Delta(A, \|\cdot\|)$ étant identifié à $\operatorname{Max}(A)$ dans une $\underset{\sim}{C}$-algèbre de Banach régulière.

Définitions. – Soit A une K-algèbre de Banach commutative unitaire multbijective régulière. Nous dirons que A satisfait la supercondition de Ditkin si, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$, et une suite V_n de voisinages de φ dans $\Delta(A, \|\cdot\|)$ telle que $\theta(u_n) = 0$, $\forall\, \theta \in V_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n x = x.$$

Nous dirons que A satisfait la condition de Ditkin normée si, pour tout $\varphi \in \Delta(A, \|\cdot\|)$ et pour tout $x \in A$, il existe une suite $u_n \in A$ telle que $\|u_n\| = 1$, et une suite V_n de voisinages de φ telle que $\theta(u_n) = 0$, $\forall\, \theta \in V_n$, et $\lim_{n\to\infty} u_n x = x$.

Alors nous avons maintenant un résultat qui rappelle celui de la théorie classique, utilisant l'absence dans la frontière de $h(\mathfrak{J})$ d'ensembles parfaits non vides.

THÉORÈME 5. – Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire multbijective régulière sans radical, satisfaisant la supercondition de Diktin. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal fermé, et soit $\lambda(\mathfrak{J})$ la frontière de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$. Alors, si toute partie fermée de $\lambda(\mathfrak{J})$ admet au moins un point isolé (pour la topologie induite), on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.

Preuve. - Pour tout $x \in I(h(\mathfrak{J}))$, on notera $F(x)$ l'ensemble des $\varphi \in \Delta(A , \|\cdot\|)$ pour lesquels il existe un couple (y_φ , V_φ) où $y_\varphi \in \mathfrak{J}$, et V_φ est un voisinage de φ (dans $\Delta(A , \|\cdot\|)$) tel que $\theta(y_\varphi - x) = 0$, $\forall \theta \in V_\varphi$, et on notera

$$G(x) = \Delta(A , \|\cdot\|) - F(x) .$$

Montrons que $G(x) = \emptyset$, ce qui prouvera que $x \in \mathfrak{J}$ d'après la proposition.

D'abord $F(x)$ est évidemment ouvert de sorte que $G(x)$ est fermé. De plus, $F(x)$ contient l'intérieur Λ de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$ (dans $\Delta(A , \|\cdot\|)$) : il suffit de considérer $u_\varphi = 0$ et $V_\varphi = \Lambda$, $\forall \varphi \in \Lambda$. Alors nous allons montrer que

$$F(x) \supset \Delta(A , \|\cdot\|) - \widehat{\widehat{h(\mathfrak{J})}} .$$

En effet, soit $\varphi \in \Delta(A , \|\cdot\|) - \widehat{\widehat{h(\mathfrak{J})}}$; puisque $\Delta(A , \|\cdot\|)$ est compact, il existe un voisinage fermé V_φ de φ et un voisinage fermé W_φ de $\widehat{h(\mathfrak{J})}$ tels que $V_\varphi \cap W_\varphi = \emptyset$ et comme A est régulière et multbijective, il existe $u_\varphi \in A$ tel que

$$\theta(u_\varphi) = 0 , \ \forall \theta \in W_\varphi , \text{ et } \theta(u_\varphi) = 1 , \ \forall \theta \in V_\varphi .$$

Alors posons $y_\varphi = u_\varphi x$: nous voyons que $\varphi \in F(x)$ de sorte que $G(x) \subset \lambda(\mathfrak{J})$, et par suite $G(x)$ a au moins un point isolé, ou bien $G(x)$ est vide.

Montrons donc que $G(x) = \emptyset$; pour cela supposons $G(x) \neq \emptyset$; soit φ_0 un point isolé de $G(x)$. Soit $G_0 = G(x) - \varphi_0$. Alors il existe un voisinage fermé V_0 de φ_0 dans $\Delta(A , \|\cdot\|)$ tel que $G_0 \cap V_0 = \emptyset$, et par suite il existe $u_0 \in A$ tel que $\theta(u_0) = 1$, $\forall \theta \in V_0$, et $\theta(u_0) = 0$, $\forall \theta \in G_0$. Soit $y_0 = u_0 x$; on a $\theta(y_0 - x) = 0$, $\forall \theta \in V_0$, et il reste donc seulement à montrer que $y_0 \in \mathfrak{J}$ pour en déduire que $x_0 \in \mathfrak{J}$ (d'après la proposition 3).

Or nous avons de façon évidente $y_0 \in I(h(\mathfrak{J}))$ et

$$G(y_0) \subset G(u_0) \cap G(x) = \{\varphi_0\} .$$

Mais grâce à la supercondition de Ditkin, il existe une suite u_n de A et une suite V_n de voisinages de φ_0 telles que $\theta(u_n) = 0$, $\forall \theta \in V_n$, et

$$\lim_{n\to\infty} u_n y_0 = y_0 .$$

Maintenant, puisque $\varphi_0 \notin G(u_n)$, on a $G(u_n) \cap G(y_0) = \emptyset$, donc $G(u_n y_0) = \emptyset$, et $u_n y_0 \in \mathfrak{J}$ d'après la proposition 2, donc $y_0 \in \mathfrak{J}$.

Enfin la supercondition normée nous permet d'obtenir un résultat qui concerne tous les idéaux fermés. Nous utiliserons ici, à nouveau, une propriété typiquement ultramétrique.

THÉORÈME 6. - Soit A une K-algèbre de Banach ultramétrique commutative unitaire régulière multbijective sans radical, satisfaisant la supercondition de Ditkin normée. Alors, pour tout idéal fermé $\mathfrak{J}$ de A , on a $I(h(\mathfrak{J})) = \mathfrak{J}$.