

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

BERTIN DIARRA

Modules de Banach sur l'algèbre des mesures p -adiques d'un groupe compact totalement discontinu

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J2, p. J1-J11

http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A2_0

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODULES DE BANACH SUR L'ALGÈBRE DES MESURES p -ADIQUES D'UN GROUPE COMPACT TOTALEMENT DISCONTINU

par Bertin DIARRA

Introduction.

Dans tout ce qui suit, K désignera un corps valué ultramétrique complet non discret.

Soit G un groupe compact totalement discontinu (c. t. d.). Rappelons qu'une représentation linéaire continue de G sur K est la donnée d'une application U de G dans l'algèbre des opérateurs linéaires bornées $\mathcal{L}(E)$ d'un K -espace de Banach ultramétrique E telle que, $\forall s, t \in G$, $U_{st} = U_s \circ U_t$ et, $\forall x \in E$, l'application $s \rightarrow U_s x$ de G dans E est continue. On dit aussi que E est un G -module.

L'étude des représentations linéaires continues d'un groupe c. t. d. a été faite par F. ARIBAUD [2] et W. H. SCHIKHOE [7] dans le cas où G possède une mesure de Haar à valeurs dans K . Ces auteurs obtiennent la plupart des résultats de la théorie des représentations unitaires complexes des groupes compacts. Entre autres, lorsque K est à valuation discrète toute représentation linéaire continue de G sur K est semi-simple. La situation n'est plus aussi agréable si G ne possède pas de mesure de Haar à valeurs dans K (par exemple $G = \mathbb{Z}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p$). Dans ce cas, on perd la semi-simplicité (pour des exemples illustrant ce fait, voir [3]).

Soit A une K -algèbre de Banach ultramétrique ; un module de Banach sur A est un K -espace de Banach ultramétrique E muni d'une structure de A -module (à gauche) pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^k$, $\alpha \geq 1$, tel que

$$\|a \cdot x\| \leq \alpha \|a\| \|x\|, \quad \forall a \in A, \quad \forall x \in E.$$

Considérons l'espace de Banach $\mathcal{C}(G, K)$ des fonctions continues de G dans K . L'algèbre des mesures de G à valeurs dans K est le dual $\mathcal{C}(G, K)'$ de $\mathcal{C}(G, K)$ (espace des formes linéaires continues sur $\mathcal{C}(G, K)$) muni du produit de convolution des mesures. Nous allons montrer que les représentations linéaires continues du groupe c. t. d. G sur K sont (à équivalence près) en correspondance bijective avec une sous-famille des modules de Banach sur $\mathcal{C}(G, K)'$ (à isomorphisme près). On établira au 1° que les représentations linéaires continues de G sur K (à équivalence près) sont en correspondance bijective avec les comodules complets sur l'algèbre de Hopf complète $\mathcal{C}(G, K)$ (à isomorphisme près).

Nous ferons quelques remarques sur les limites inductives et projectives d'espaces de Banach ultramétriques.

Soit $\mathbb{W}$ la famille des sous-groupes ouverts distingués du groupe c. t. d. G , alors

$$\mathcal{C}(G, K)' = \varprojlim_n K[G/H],$$

où $\mathbb{H}$ parcourt $\mathbb{W}$; $K[G/H]$ étant l'algèbre du groupe fini G/H .

Tous les espaces de Banach considérés seront ultramétriques; on omettra donc ce terme.

1. Algèbres de Hopf complètes et comodules complets.

Soit $E \otimes F$ le produit tensoriel topologique de deux K -espaces de Banach E et F ; si E et F sont des algèbres de Banach, on considère sur $E \otimes F$ la structure d'algèbre de Banach telle que

$$\forall x, x' \in E, \forall y, y' \in E, (x \otimes y)(x' \otimes y') = xx' \otimes yy'.$$

On identifiera $K \otimes E$ et $E \otimes K$ à E .

Soit $\mathcal{H}$ une K -algèbre de Banach; la multiplication m de $\mathcal{H}$ prolongée en une application de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ sera encore notée m . On suppose ici que $\mathcal{H}$ est commutative unitaire et que l'ensemble $X(\mathcal{H}) = \text{Hom alg}(\mathcal{H}, K)$ des caractères de $\mathcal{H}$ est non vide; tout élément de $X(\mathcal{H})$ est continu.

DÉFINITION. - On dit qu'une algèbre de Banach commutative, unitaire, $\mathcal{H}$ sur K est une algèbre de Hopf complète si :

(i) il existe un homomorphisme continu d'algèbres de Banach c de $\mathcal{H}$ dans le produit tensoriel topologique $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tel que $(c \otimes 1_{\mathcal{H}}) \circ c = (1_{\mathcal{H}} \otimes c) \circ c$;

(ii) $X(\mathcal{H})$ est non vide, et il existe $\sigma \in X(\mathcal{H})$ tel que

$$(1_{\mathcal{H}} \otimes \sigma) \circ c = 1_{\mathcal{H}} \text{ et } (\sigma \otimes 1_{\mathcal{H}}) \circ c = 1_{\mathcal{H}};$$

(iii) il existe un endomorphisme continu η de l'algèbre de Banach $\mathcal{H}$ tel que $m \circ (1_{\mathcal{H}} \otimes \eta) \circ c = m \circ (\eta \otimes 1_{\mathcal{H}}) \circ c = k \circ \sigma$, où k est l'application canonique de K dans $\mathcal{H}$.

L'application c (resp. σ , resp. η) est appelée coproduit (resp. co-unité, resp. inversion ou antipode) de $\mathcal{H}$.

Remarque. Si $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf complète, l'ensemble des caractères $X(\mathcal{H})$, muni du produit $u * v = (u \otimes v) \circ c$ et de la topologie de la convergence simple, est un groupe topologique totalement discontinu. L'unité de ce groupe est σ , et l'inverse de $u \in X(\mathcal{H})$ est $u \circ \eta$.

DÉFINITION. - Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf complète. On dit qu'un K -espace de Banach E est un $\mathcal{H}$ -comodule (à gauche) complet s'il existe une application K -li-

néaire continue Δ de E dans $\mathcal{K} \otimes E$, appelée coproduit, telle que

$$(i) \quad (c \otimes 1_E) \circ \Delta = (1_{\mathcal{K}} \otimes \Delta) \circ \Delta ,$$

$$(ii) \quad (\sigma \otimes 1_E) \circ \Delta = 1_E .$$

Soit G un groupe c. t. d. Considérons sur l'ensemble $\mathcal{C}(G, K)$ des fonctions continues de G dans K la structure usuelle d'algèbre de Banach commutative unitaire. On fait de $\mathcal{C}(G, K)$ une algèbre de Hopf complète si l'on considère comme coproduit $c = \pi^{-1} \circ \rho$, où π est l'isomorphisme d'algèbres de Banach de

$$\mathcal{C}(G, K) \otimes \mathcal{C}(G, K)$$

sur $\mathcal{C}(G \times G, K)$, défini par $\pi(f \otimes g)(s, t) = f(s)g(t)$, et ρ l'homomorphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{C}(G, K)$ dans $\mathcal{C}(G \times G, K)$ tel que $\rho(f)(s, t) = f(st)$ où $s, t \in G$; la co-unité étant le caractère σ défini par $\sigma(f) = f(e)$ où e est l'unité de G , et l'inversion l'endomorphisme η de $\mathcal{C}(G, K)$ défini par $\eta(f)(s) = f(s^{-1})$.

On sait que

$$X(\mathcal{C}(G, K)) = \{\varepsilon_s ; \mathcal{C}(G, K) \rightarrow K, \varepsilon_s(f) = f(s)\} .$$

Il est clair que $\varepsilon_s * \varepsilon_t = (\varepsilon_s \otimes \varepsilon_t) \circ c = \varepsilon_{st}$. Ainsi on a le résultat suivant.

LEMME. - Les groupes topologiques G et $X(\mathcal{C}(G, K))$ sont isomorphes.

Soient γ et δ les représentations linéaires de G dans $\mathcal{C}(G, K)$ définies par les opérateurs de translations $\gamma_s f(t) = f(s^{-1}t)$ et $\delta_s f(t) = f(ts)$; si V est un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(G, K)$ stable par γ (resp. δ ; resp. γ et δ), on a $c(V) \subseteq \mathcal{C}(G, K) \otimes V$ (resp. $c(V) \subseteq V \otimes \mathcal{C}(G, K)$; reps. $c(V) \subseteq V \otimes V$).

Soit $H \in \mathcal{W}$; le sous-espace $\mathcal{C}(G, K)^{H_i}$ de $\mathcal{C}(G, K)$ formé des éléments invariants par $\gamma|_H$ est de dimension finie $n_{H_i} = [G : H_i]$ (l'indice du sous-groupe H_i). Si $f \in \mathcal{C}(G, K)^{H_i}$, on a aussi $\delta_s f = f$, $\forall s \in H_i$, et $\mathcal{C}(G, K)^{H_i}$ est une algèbre de Hopf complète. Le sous-espace $\mathcal{R}^*(G) = \bigcup_{H \in \mathcal{W}} \mathcal{C}(G, K)^{H_i}$ est dense dans $\mathcal{C}(G, K)$.

Soit E un K -espace de Banach; on notera par π_E l'isomorphisme de

$$\mathcal{C}(G; K) \otimes E$$

sur $\mathcal{C}(G, E)$ défini par

$$\pi_E(f \otimes x)(s) = f(s)x \quad (f \in \mathcal{C}(G, K), x \in E \text{ et } s \in G) .$$

Soit U une représentation linéaire continue de G dans E ; puisque G est compact $\alpha = \sup_{s \in G} \|U_s\| < +\infty$. On associe à la représentation U l'application K -linéaire continue d_U de E dans $\mathcal{C}(G, E)$ telle que

$$d_U(x)(s) = U_s x \quad (x \in E, s \in G) ;$$

on a $\|d_U\| \leq \alpha$.

THÉOREME 1. - Soit G un groupe c. t. d.

(i) Soit Δ le co-produit d'une structure de $\mathcal{C}(G, K)$ -module complet sur l'espace de Banach E ; posons, pour tout $s \in G$

$$U_s^\Delta = (\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \Delta.$$

On définit ainsi une représentation linéaire continue U^Δ de G dans E .

(ii) Soit U une représentation linéaire continue de G dans E . Posons

$$\Delta_U = \pi_E^{-1} \circ d_U ;$$

alors Δ_U est le coproduit d'une structure sur E de $\mathcal{C}(G, K)$ -comodule complet.

De plus, $\Delta = \Delta_{U^\Delta}$ et $U = U^{\Delta_U}$.

(i) Il est clair que, $\forall s \in G$, $U_s^\Delta = (\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \Delta \in \mathcal{L}(E)$. On a $\varepsilon_e = \sigma$, donc $U_e^\Delta = (\sigma \otimes 1_E) \circ \Delta = 1_E$. D'autre part, on voit que

$$[(\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \Delta] \otimes \varepsilon_t = (\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \Delta \circ (\varepsilon_t \otimes 1_E),$$

puisque $(c \otimes 1_E) \circ \Delta = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta$ (1 = identité de $\mathcal{C}(G, K)$), on a

$$U_{st}^\Delta = U_s^\Delta \circ U_t^\Delta, \quad \forall s, t \in G.$$

Soit $H \in \mathcal{W}$; si $\tau_H = (s_i)_{1 \leq i \leq n_H}$ est un système de représentants des classes modulo H , la famille $(\chi_{s_{iH}})_{1 \leq i \leq n_H}$ des fonctions caractéristiques des classes s_{iH} , $1 \leq i \leq n_H$, est une base de $\mathcal{C}(G, K)^H$. Puisque $\mathcal{R}^*(G)$ est dense dans $\mathcal{C}(G, K)$, $\mathcal{R}^*(G) \otimes E$ est dense dans $\mathcal{C}(G, K) \otimes E$. Considérons $x \in E$; pour tout $\varepsilon \in \mathcal{R}_+^k$, il existe $H_\varepsilon^x \in \mathcal{W}$ tel que $\|\Delta x - \sum_{i=1}^{n_{H_\varepsilon^x}} \chi_{s_{iH_\varepsilon^x}} \otimes x_i\| < \varepsilon$ avec $x_i \in E$. Posons

$$T_s = \varepsilon_s \otimes 1_E, \quad \forall s \in G ;$$

on a $\|T_s\| \leq 1$, donc

$$\|(T_s - T_e)(\Delta x - \sum_{i=1}^{n_{H_\varepsilon^x}} \chi_{s_{iH_\varepsilon^x}} \otimes x_i)\| < \varepsilon ;$$

mais, $\forall s \in H_\varepsilon^x$, on a

$$(T_s - T_e)(\sum_{i=1}^{n_{H_\varepsilon^x}} \chi_{s_{iH_\varepsilon^x}} \otimes x_i) = 0,$$

donc

$$\|U_s^\Delta x - U_e^\Delta x\| = \|(T_s - T_e)(\Delta x)\| < \varepsilon, \quad \forall s \in H_\varepsilon^x.$$

L'application $s \rightarrow U_s^\Delta x$ de G dans E est donc continue ($\mathcal{W}$ est un système fondamental de voisinages de e).

(ii) Remarquons tout d'abord que $\pi_E(\mathcal{C}(G, K)^H \otimes E) = \mathcal{C}(G, E)^H$ (sous-espace des éléments f de $\mathcal{C}(G, E)$ tels que $f(s^{-1}t) = f(t)$, $\forall s \in H$, $\forall t \in G$) et que $\bigcup_{H \in \mathcal{W}} \mathcal{C}(G, E)^H$ est dense dans $\mathcal{C}(G, E)$. Soit $\mathcal{SR}(G/H)$ la famille des

systèmes de représentants des classes modulo H ; si $f \in \mathcal{C}(G, E)$ et

$$I_H = (s_i)_{1 \leq i \leq n_H} \in \mathcal{SR}(G/H),$$

posons

$$f^{I_H} = \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} f(s_i),$$

alors $f^{I_H} \in \mathcal{C}(G, E)^H$. Puisque G est compact, f est uniformément continu et, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon \in \mathbb{W}$ tel que

$$\|f - f^{I_{H_\varepsilon}}\| < \varepsilon, \quad \forall I_{H_\varepsilon} \in \mathcal{SR}(G/H_\varepsilon).$$

Considérons $x \in E$ et $d_U^{I_H}(x) = \sum_{s=1}^{n_H} \chi_{s_i H} U_{s_i}(x)$; si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon^x \in \mathbb{W}$

tel que

$$\|d_U(x) - d_U^{I_{H_\varepsilon^x}}(x)\| < \varepsilon, \quad \forall I_{H_\varepsilon^x} \in \mathcal{SR}(G/H_\varepsilon^x).$$

Posons

$$\Delta_U^{I_H}(x) = \pi_E^{-1} \circ d_U^{I_H}(x) = \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x);$$

la famille $(\Delta_U^{I_H}(x))$, $H \in \mathbb{W}$, $I_H \in \mathcal{SR}(G/H)$ est une base de filtre de Cauchy telle que

$$(1) \quad \Delta_U(x) = \lim_{H \in \mathbb{W}} \Delta_U^{I_H}(x) = \lim_{H \in \mathbb{W}} \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x).$$

On voit alors que

$$\lim_{H \in \mathbb{W}} (1 \otimes \Delta_U^{I_H}) \circ \Delta_U^{I_H}(x) = \lim_{H \in \mathbb{W}} (c \otimes 1_E) \circ \Delta_U^{I_H}(x);$$

$$\text{donc } (1 \otimes \Delta) \circ \Delta = (c \otimes 1_E) \circ \Delta.$$

De la même manière, on a

$$(\varepsilon_e \otimes 1_E) \circ \Delta(x) = \lim_{H \in \mathbb{W}} \sum_{i=1}^{n_H} \chi_{s_i H}(e) U_{s_i}(x) = x$$

$$\text{c'est-à-dire } (\sigma \otimes 1_E) \circ \Delta = 1_E.$$

La vérification de $\Delta = \Delta_{U^\Delta}$ se fait par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent. Soient $x \in E$, $U_s \in G$; on voit que

$$U_s^{\Delta_U}(x) = (\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \Delta_U(x) = (\varepsilon_s \otimes 1_E) \circ \pi_E^{-1} \circ d_U(x) = U_s(x);$$

$$\text{donc } U^{\Delta_U} = U.$$

Remarque. - On définit de façon évidente la notion de morphisme de comodules complets. Le théorème établit bien une correspondance bijective (à équivalence et isomorphisme près) entre représentations linéaires continues de G et structures de $\mathcal{C}(G, K)$ -comodules complets.

2. Remarques sur les limites inductives et projectives complètes d'espaces de Banach (ultramétriques).

DEFINITION (cf. [4]).

(i) Soit (E_i, u_{ji}) un système inductif d'espaces de Banach tel que

$$\|u_{ji}\| \leq 1, \quad \forall i, j, \quad i \leq j;$$

la limite inductive complète de ce système, notée $\varprojlim_n E_i$ est le séparé complété de $\varprojlim_n {}^s E_i$ (la limite inductive algébrique) muni de la semi-norme

$$\|x\| = \inf_{x = \sum_i u_i(x_i)} \max \|x_i\|$$

où u_i est l'application canonique de E_i dans $\varprojlim_n {}^s E_i$.

(ii) Soit (F_i, v_{ij}) un système projectif d'espaces de Banach tel que

$$\|v_{ij}\| \leq 1, \quad \forall i, j, \quad i \leq j;$$

la limite projective complète de ce système est

$$\varprojlim_n F_i = \{y \in \prod F_i; \quad v_{ij}(y_j) = y_i\}$$

où $\prod F_i = \{y = (y_i); \quad \sup \|y_i\| < +\infty\}$.

Soit E un espace de Banach; on pose

$$E_0 = \{x \in E; \quad \|x\| \leq 1\} \quad \text{et} \quad E_1 = \{x \in E; \quad \|x\| < 1\}.$$

Si (F_i, v_{ij}) est un système projectif d'espaces de Banach tel que

$$\|v_{ij}\| \leq 1, \quad \forall i, j, \quad i \leq j,$$

alors (F_{i0}, v_{ij}) [resp. (F_{i1}, v_{ij})] est un système projectif de modules sur l'anneau des entiers Λ de K . Il est clair que la limite projective algébrique $\varprojlim_n F_{i0}$ (resp. $\varprojlim_n F_{i1}$) est une partie de $\varprojlim_n F_i$.

LEMME. - Soit $F = \varprojlim_n F_i$; alors $F_0 = \varprojlim_n F_{i0}$ et $F_1 \subseteq \varprojlim_n F_{i1}$.

Le dual E' (espace des formes linéaires continues) d'un espace normé E muni de la norme

$$\|x'\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x', x \rangle|}{\|x\|}$$

est un espace de Banach. Soit u un homomorphisme continu de l'espace normé E dans l'espace normé F ; la transposée ${}^t u$ de u est un homomorphisme continu de F' dans E' tel que $\|{}^t u\| \leq \|u\|$. Si (E_i, u_{ji}) est un système inductif d'espaces de Banach tel que $\|u_{ji}\| \leq 1, \quad \forall i, j, \quad i \leq j$, alors $(E_i', {}^t u_{ji})$ est un système projectif d'espaces de Banach tel que $\|{}^t u_{ji}\| \leq 1, \quad \forall i, j, \quad i \leq j$. On supposera que l'ensemble des indices est filtrant à droite.

PROPOSITION 1. - Soit (E_i, u_{ji}) un système inductif d'espaces de Banach tel

que $\|u_{ji}\| \leq 1$, $\forall i, j, i \leq j$.

Posons $E = \varinjlim_n E_i$; on a

$$E' = (\varinjlim_n E_i)' = \varprojlim_n E_i'.$$

Soit I l'ensemble des indices du système inductif et $\oplus_{i \in I} E_i$ la somme directe algébrique des E_i ; $\varinjlim_n {}^S E_i = \oplus_{i \in I} E_i / S$ où S est le sous-espace de $\oplus_{i \in I} E_i$ engendré par $\{x_i - u_{ji}(x_j); i \in I, i \leq j, x_j \in E_j\}$. La semi-norme de $\varinjlim_n {}^S E_i$ est la semi-norme quotient par S de la norme de $\oplus_{i \in I} E_i$ définie par $\|X\| = \max \|x_i\|$, où $X = \sum x_i \in \oplus_{i \in I} E_i$. Il vient que

$$E' = (\varinjlim_n E_i)' = (\oplus_{i \in I} E_i / S)' \cong \{\varphi \in (\oplus_{i \in I} E_i)'; \langle \varphi, S \rangle = 0\}.$$

On sait que $(\oplus_{i \in I} E_i)'$ et $\prod_{i \in I} E_i'$ sont isométriquement isomorphes. Soit Φ_1 l'application linéaire continue de E' dans $\prod_{i \in I} E_i'$, définie par

$$\Phi_1(x') = (x' \circ u_i)_{i \in I}$$

(u_i est l'application canonique de E_i dans E), alors $\Phi_1(E') \subseteq \varprojlim_n E_i'$. Réciproquement si $\chi = (x_i')_{i \in I} \in \varprojlim_n E_i'$, alors $\chi \in \prod_{i \in I} E_i' = (\oplus_{i \in I} E_i)'$; comme

$$x_i' = {}^t u_{ji}(x_j') = x_j' \circ u_{ji},$$

on a $\langle \chi, u_i - u_{ji}(x_j') \rangle = 0$, $\forall i \in I, \forall x_j' \in E_j'$; donc $\langle \chi, S \rangle = 0$; il correspond à χ un élément x' de E' tel que $\chi = \Phi_1(x')$, ainsi

$$\Phi_1(E') = \varprojlim_n E_i'.$$

Remarque. - Considérons sur $E' = \varprojlim_n E_i'$ la topologie θ_p induite par la topologie produit; E_s étant l'image canonique de $\varinjlim_n {}^S E_i$ dans $E = \varinjlim_n E_i$, soient $\sigma(E', E_s)$ et $\sigma(E', E)$ les topologies faibles sur E' associées aux dualités $\langle E', E_s \rangle$ et $\langle E', E \rangle$.

Alors $\sigma(E', E_s) \subsetneq \sigma(E', E)$ et $\sigma(E', E_s) \subseteq \theta_p$.

Soient X et Y deux espaces topologiques compacts totalement discontinus, et θ une application continue de X dans Y ; l'application $\tilde{\theta}$ de $\mathcal{C}(Y, K)$ dans $\mathcal{C}(X, K)$, définie par $\tilde{\theta}(g) = g \circ \theta$ est un homomorphisme continu d'algèbres de Banach tel que $\|\tilde{\theta}\| \leq 1$ ($\tilde{\theta}$ est isométrique si θ est surjectif).

Considérons un système projectif (X_i, θ_{ij}) d'espaces compacts totalement discontinus pour lequel l'ensemble des indices I est préordonné filtrant à droite; $X = \varprojlim X_i$ est un espace compact totalement discontinu. On note par θ_i l'application canonique de X dans X_i . Il est clair que $(\mathcal{C}(X_i, K), \theta_{ij})$ est un système inductif d'algèbres de Banach commutatives unitaires.

PROPOSITION 2. - Soit (X_i, θ_{ij}) un système projectif d'espaces c. t. d.; l'ensemble des indices I étant préordonné filtrant à droite.

Soit $X = \varprojlim X_i$. Alors X est non vide ; on a

$$\mathcal{C}(X, K) = \varinjlim_n \mathcal{C}(X_i, K) \text{ et } \mathcal{C}(X, K)' = \varprojlim_n \mathcal{C}(X_i, K)'.$$

On sait que si I est filtrant à droite, $X = \varprojlim X_i$ est non vide. Soit

$$B = \bigcup_{i \in I} \tilde{\theta}_i(\mathcal{C}(X_i, K)) ;$$

B est une sous-algèbre unitaire de $\mathcal{C}(X, K)$. Si x et y sont deux points distincts de X , il existe $j \in I$ tel que les composantes x_j et y_j de x et y dans X_j sont distinctes ; il existe aussi un voisinage ouvert fermé V_j de x_j dans l'espace c. t. d. X_j tel que $y_j \notin V_j$. La fonction $f = \chi_{V_j} \circ \theta_j$ (χ_{V_j} étant la fonction caractéristique de V_j) appartient à B avec $f(x) = 1$ et $f(y) = 0$; donc B sépare les points de X et est dense dans $\mathcal{C}(X, K)$ (théorème de Weierstrass, cf. [5]). On en déduit que l'application linéaire continue $\tilde{\theta}$ de $\varinjlim_n \mathcal{C}(X_i, K)$ dans $\mathcal{C}(X, K)$, définie par les $\tilde{\theta}_i$, est surjective. On se ramène au cas où les θ_i sont surjectives pour voir que $\tilde{\theta}$ est injective.

Le reste découle de la proposition 1.

3. L'algèbre des mesures d'un groupe c. t. d.

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf complète de coproduit c ; on définit sur le dual $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$ une structure d'algèbre de Banach en posant $f' * g' = {}^t c(f' \otimes g')$, où $f', g' \in \mathcal{H}'$ et $\mathcal{H}' \otimes \mathcal{H}'$ est identifié à une partie de $(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})'$. Si G est un groupe c. t. d., considérons sur le dual $\mathcal{C}(G, K)'$ de l'algèbre de Hopf complète $\mathcal{C}(G, K)$ le produit $\mu * \nu = {}^t c(\mu \otimes \nu)$, où μ et $\nu \in \mathcal{C}(G, K)'$; ce produit coïncide avec le produit de convolution usuelle :

$$\forall f \in \mathcal{C}(G, K),$$

$$\langle \mu * \nu, f \rangle = \langle \mu \otimes \nu, c(f) \rangle = \langle \mu, \langle \nu, \gamma_s^{-1} f \rangle \rangle = \langle \nu, \langle \mu, \delta * f \rangle \rangle.$$

Soit θ un homomorphisme continu du groupe c. t. d. G dans le groupe c. t. d. G_1 , $\tilde{\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres de Hopf complètes de $\mathcal{C}(G_1, K)$ dans $\mathcal{C}(G, K)$ (c'est-à-dire $c \circ \tilde{\theta} = (\tilde{\theta} \otimes \tilde{\theta}) \circ c_1$) et ${}^t \tilde{\theta}$ est un homomorphisme d'algèbres de Banach de $\mathcal{C}(G, K)'$ dans $\mathcal{C}(G_1, K)'$. Considérons un système projectif de groupes c. t. d., $(\mathcal{C}(G_i, K), \theta_{ij})$ est un système inductif d'algèbres de Hopf complètes. On sait (cf. [4]) que le produit tensoriel topologique commute aux limites inductives complètes ; donc $\varinjlim_n \mathcal{C}(G_i, K)$ est une algèbre de Hopf complète, et on peut énoncer la proposition suivante.

PROPOSITION 3. - Soit (G_i, θ_{ij}) un système projectif de groupes c. t. d. (l'ensemble des indices I étant filtrant à droite). Alors on a

$$\mathcal{C}(G, K) = \varinjlim_n \mathcal{C}(G_i, K) \text{ (égalité d'algèbres de Hopf complètes)}$$

et

$$\mathcal{C}(G, K)' = \varprojlim_n \mathcal{C}(G_i, K)' \text{ (égalité d'algèbres de Banach)}.$$

Remarque. - $\mathcal{C}(G, K)'_0 = \varprojlim \mathcal{C}(G_i, K)'_0$ et $\mathcal{C}(G, K)'_1 = \varprojlim \mathcal{C}(G_i, K)'_1$.

Remarque. - Supposons K sphériquement complet.

Il y a une correspondance bijective décroissante entre idéaux à gauche (resp. à droite, resp. bilatères) $\sigma(\mathcal{C}(G, K)', \mathcal{B}(G, K))$ -fermés de $\mathcal{C}(G, K)'$ et sous-espaces fermés de $\mathcal{B}(G, K)$ stables par γ (resp. δ , resp. γ et δ).

La famille $\mathbb{W}$ des sous-groupes ouverts distingués du groupe c. t. d. G ordonnée par l'ordre opposé à l'inclusion est filtrante à droite. On sait que

$$G = \varprojlim_{H \in \mathbb{W}} G/H.$$

Considérons pour $H \in \mathbb{W}$ l'application canonique θ_H de G sur G/H alors θ_H est un isomorphisme d'algèbres de Hopf de $\mathcal{C}(G/H, K)$ sur $\mathcal{C}(G, K)^{H'}$; donc

$$[\mathcal{C}(G, K)^{H'}]' = \mathcal{C}(G/H, K)' = K[G/H],$$

où $K[G/H]$ est l'algèbre du groupe fini G/H munie de la norme

$$\|\sum_{\bar{s}} a_{\bar{s}} \bar{s}\| = \max_{\bar{s}} |a_{\bar{s}}|, \quad \bar{s} \in G/H \text{ et } a_{\bar{s}} \in K.$$

COROLLAIRE. - Soit G un groupe c. t. d.; lorsque H parcourt la famille $\mathbb{W}$ des sous-groupes ouverts distingués de G , on a

$$\mathcal{B}(G, K) = \varinjlim_n \mathcal{C}(G/H, K)$$

et

$$\mathcal{C}(G, K)' = \varprojlim_n \mathcal{C}(G/H, K)' = \varprojlim_n K[G/H].$$

Remarques.

(i) Soit Λ l'anneau des entiers du corps K , et $\mathfrak{M}$ son idéal maximal; on a

$$\mathcal{C}(G, K)'_0 = \varprojlim \Lambda[G/H]$$

et

$$\mathcal{C}(G, K)'_1 = \varprojlim \mathfrak{M}[G/H]$$

(ii) La topologie $\mathcal{E}_p$ sur $\mathcal{C}(G, K)'$, induite par la topologie produit des espaces normés $\mathcal{C}(G/H, K)'$, est définie par la famille de semi-normes

$$\|\mu\|_H = \max_{1 \leq i \leq n_H} |\langle \mu, x_{s_i} \rangle|, \quad H \in \mathbb{W}.$$

De plus, $\mathcal{E}_p = \sigma(\mathcal{C}(G, K)', \mathcal{R}^*(G))$; les topologies induites sur $\mathcal{C}(G, K)'_0$ par $\mathcal{E}_p$ et $\sigma(\mathcal{C}(G, K)', \mathcal{C}(G, K))$ sont égales.

Comme exemple d'illustration, si $G = \mathbb{Z}_p$ et $K = \mathbb{Q}_p$,

$$\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)'_0 = \varprojlim \mathbb{Z}_p[\mathbb{Z}_p/p^n \mathbb{Z}_p] = \mathbb{Z}_p[[X]]$$

l'anneau des séries formelles sur $\tilde{Z}_p$, donc

$$\mathcal{C}(\tilde{Z}_p, \tilde{Q}_p)' = \tilde{Q}_p^{(b)}[[X]]$$

l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés (cf. [1] et [6]).

4. Modules de Banach sur $\mathcal{C}(G, K)'$

Soit E un espace de Banach sur K qui est un $\mathcal{C}(G, K)'$ -module tel que

$$\|\mu \cdot x\| \leq \alpha \|\mu\| \|x\|, \quad \mu \in \mathcal{C}(G, K)', \quad x \in E \quad (\alpha \geq 1).$$

Si l'on pose, pour tout $s \in G$, $V_s(x) = \varepsilon_s \cdot x$, alors

$$V_s \in \mathcal{L}(E), \quad V_e = 1_E \quad \text{et} \quad V_{st} = V_s \circ V_t, \quad \forall s, t \in G.$$

Considérons une représentation linéaire continue de G dans E et le soufflet $\langle \rangle$ comme forme linéaire continue de $\mathcal{C}(G, K)' \otimes \mathcal{C}(G, K)$ sur K . Posons :

$$\mu \cdot_U x = (\langle \rangle \otimes 1_E) \circ (1 \otimes \Delta_U)(\mu \otimes x) = (\langle \rangle \otimes 1_E)(\mu \otimes \Delta_U(x)).$$

On définit ainsi sur E une structure de $\mathcal{C}(G, K)'$ -module telle que

$$\|\mu \cdot_U x\| \leq \alpha \|\mu\| \|x\|, \quad \text{où} \quad \alpha = \sup_{s \in G} \|U_s\|.$$

Nota Bene.

(i) On a aussi $\mu \cdot_U x = (\mu \otimes 1_E) \circ \Delta_U(x)$.

(ii) $\mu \cdot_U x = \lim_{H \in \mathcal{W}} \sum_{i=1}^{n_{H_1}} \langle \mu, \chi_{s_i H} \rangle U_{s_i}(x)$.

THÉOREME 2. - Il y a une correspondance bijective entre représentations linéaires continues de G dans E et structures de $\mathcal{C}(G, K)'$ -module de Banach sur E telles que, pour tout $x \in E$, l'application Λ -linéaire $\mu \rightarrow \mu \cdot x$ de $\mathcal{C}(G, K)'_0$ dans E est continue lorsque $\mathcal{C}(G, K)'_0$ est muni de la topologie induite par $\mathcal{C}_p = \sigma(\mathcal{C}(G, K)', \mathcal{R}^*(G))$.

En effet, soit U une représentation continue de G dans E ; on a vu que, pour $x \in E$,

$$\Delta_U(x) = \lim_{H \in \mathcal{W}} \sum_{i=0}^{n_H} \chi_{s_i H} \otimes U_{s_i}(x);$$

si $\varepsilon \in \mathcal{R}_+^*$, il existe $H_\varepsilon \in \mathcal{W}$ tel que

$$\|\Delta_U(x) - \sum_{i=0}^{n_{H_\varepsilon}} \chi_{s_i H_\varepsilon} \otimes U_{s_i}(x)\| < \varepsilon.$$

On en déduit, pour tout $\mu \in \mathcal{C}(G, K)'$,

$$\|\mu \cdot_U x - \sum_{i=0}^{n_{H_\varepsilon}} \langle \mu, \chi_{s_i H_\varepsilon} \rangle U_{s_i}(x)\| < \varepsilon \|\mu\|,$$

donc, pour tout $\mu \in \mathcal{C}(G, K)'_0$,

$$\|\mu \cdot_U x - \sum_{i=0}^{n_H} \langle \mu, \chi_{s_i H} \rangle U_{s_i}(x)\| < \varepsilon.$$

si $\mu \in \mathcal{C}(G, K)_0'$ est tel que

$$\|\mu\|_{H_\varepsilon} = \max_{1 \leq i \leq n_{H_\varepsilon}} |\langle \mu, \chi_{S_{i, H_\varepsilon}} \rangle| < \varepsilon / \alpha \|x\|,$$

on a

$$\|\mu \cdot_U x\| \leq \max(\varepsilon, \alpha \|x\| \|\mu\|_{H_\varepsilon}) < \varepsilon.$$

Réciproquement, si la structure de $\mathcal{C}(G, K)'$ -module de Banach sur E vérifie l'hypothèse du théorème ; puisque $G \simeq X(\mathcal{C}(G, K)) \subseteq \mathcal{C}(G, K)_0'$, la représentation linéaire de G dans E , définie par $V_s(x) = \varepsilon_s \cdot x$, est continue. On voit que

$$\mu \cdot_U x = \lim_{H \in \mathcal{H}} \sum_{i=1}^{n_H} \langle \mu, \chi_{S_{i, H}} \rangle \varepsilon_{S_{i, H}} \cdot x = \mu \cdot x.$$

Remarque. - Si K est local (resp. sphériquement complet), alors $\mathcal{C}(G, K)_0'$, muni de la topologie $\mathcal{C}_p$, est compact (resp. c -compact) et, pour tout $x \in E$, $\mathcal{C}(G, K)_0' \cdot_U x$ est un convexe compact (resp. c -compact) de E .

RÉFÉRENCES

- [1] AMICE (Y.). - Mesures p -adiques, Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres, 6e année, 1964/65, n° 16, 6 p.
- [2] ARIAUD (F.). - Représentations linéaires p -adiques des groupes compacts totalement discontinus, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 12e année, 1969/70, n° 16, 24 p.
- [3] DIARRA (B.). - Exemples de représentations linéaires p -adiques du groupe compact $\mathbb{Z}_{\sim p}$, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, t. 276, 1973, p. 97-100.
- [4] GRUSON (L.). - Théorie de Fredholm p -adique, Bull. Soc. math. France, t. 94, 1966, p. 67-95.
- [5] KAPLANSKY (I.). - The Weierstrass theorem for non-archimedean valued fields, Proc. Amer. math. Soc., t. 1, 1950, p. 356-357.
- [6] PUT (M. Van der). - Difference equations over p -adic fields, Math. Annalen, t. 189, 1972, p. 189-203.
- [7] SCHIKOFF (W. H.). - Non-archimedean representations of compact groups, Compositio Math., Groningen, t. 23, 1971, p. 215-232.

(Texte reçu le 1er juillet 1976)

Bertin DIARRA
111 avenue de Russie
03700 BELLERIVE SUR ALLIER