

GROUPE DE TRAVAIL D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

PIERRETTE CASSOU-NOGUÈS

Fonctions L_p -adiques d'une extension abélienne d'un corps totalement réel

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 3, n° 2 (1975-1976), exp. n° J11, p. J1-J11

[<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A10_0>](http://www.numdam.org/item?id=GAU_1975-1976__3_2_A10_0)

© Groupe de travail d'analyse ultramétrique
(Secrétariat mathématique, Paris), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Groupe de travail d'analyse ultramétrique » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FONCTIONS L p -ADIQUES
D'UNE EXTENSION ABÉLIENNE D'UN CORPS TOTALEMENT RÉEL
par Pierrette CASSOU-NOGUÈS

Il s'agit ici d'étudier les fonctions L p -adiques de corps de nombres totalement réel en utilisant la décomposition de ces fonctions en fonctions zêta partielles attachées à des classes de rayon. On va voir comment deux méthodes fondamentalement différentes d'étude de ces fonctions aux entiers négatifs donnent lieu à deux méthodes d'interpolation p -adique. On étudiera ensuite dans le cas où le corps de base est $\mathbb{Q}$ des applications de l'une de ces méthodes.

I. Valeurs aux entiers négatifs et interpolation p -adique.

Après avoir rappelé quelques définitions, on donnera deux méthodes d'étude des valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta d'une classe de rayon et les deux méthodes d'interpolation p -adique qui s'en déduisent.

1. Rappels.

Soit K un corps de nombres totalement réel. Pour tout idéal $\mathfrak{y}$ de K , notons $v_{\mathfrak{y}}$ la valuation $\mathfrak{y}$ -adique normalisée de telle sorte que $v_{\mathfrak{y}}(\pi) = 1$ si π est l'uniformisante locale. Soit $\mathfrak{f}$ un idéal entier de K . On note

$$K_{\mathfrak{f}} = \{\alpha \in K ; \alpha \gg 0 \text{ et } \forall \mathfrak{y} | \mathfrak{f}, v_{\mathfrak{y}}(\alpha - 1) \geq v_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{f})\}.$$

On appelle classe de rayon $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}} \bmod \mathfrak{f}$ le quotient du groupe des idéaux fractionnaires de K engendrés par les premiers de K qui ne divisent pas $\mathfrak{f}$ par le groupe des idéaux principaux de K engendrés par les éléments de $K_{\mathfrak{f}}$. Pour $r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$, on définit

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(r, s) = \sum_{\alpha} N(\alpha)^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1,$$

la sommation étant étendue aux idéaux α entiers de K qui sont premiers à $\mathfrak{f}$ et qui sont dans la classe de r . N désigne la norme de K sur $\mathbb{Q}$.

D'après la théorie du corps de classe, à chaque idéal $\mathfrak{f}$ entier, on peut faire correspondre une extension abélienne M de K dont le groupe de Galois sur K , $G(M/K)$, est isomorphe à $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$. Soit χ un caractère de $G(M/K)$, et r un élément de $\mathcal{R}_{\mathfrak{f}}$, on note $\chi(r)$ l'image par χ de l'image de r dans $G(M/K)$ par l'isomorphisme précédent. On a alors

$$L(s, \chi) = \sum_{r \in \mathcal{R}_{\mathfrak{f}}} \chi(r) \zeta_{\mathfrak{f}}(r, s) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Par exemple, dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, χ est un caractère de Dirichlet de conducteur f , et l'on a

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

On peut écrire

$$L(s, \chi) = \sum_{a=1}^f \chi(a) \sum_{k=0}^{\infty} (a + kf)^{-s}.$$

On pose

$$\zeta_f(a, s) = \sum_{k=0}^{\infty} (a + kf)^{-s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

et on a la décomposition précédente.

On peut montrer que, pour tout n entier positif, $\zeta_f(a, 1 - n) = -B_n(a)/n$, $B_n(X)$ désignant le n -ième polynôme de Bernoulli. Donc, pour tout n entier positif, $\zeta_f(a, 1 - n)$ est rationnel, et on peut prolonger sur $\mathbb{Z}_p$ la fonction

$$n \mapsto \zeta_f(a, 1 - n) \quad [3].$$

2. Valeurs aux entiers négatifs et interpolation p-adique.

On s'intéresse de façon plus générale aux valeurs aux entiers négatifs des fonctions $\zeta_f(r, \cdot)$ et à la possibilité d'interpoler p-adiquement ces valeurs. Il y a actuellement deux méthodes pour démontrer la rationalité des valeurs aux entiers négatifs qui donnent lieu à deux méthodes d'interpolation p-adique.

(a) Méthode des formes modulaires. - La première est celle de KLINGEN et SIEGEL ([11], [19]) qui ont obtenu $\zeta_f(r, 1 - k)$ pour tout k entier positif comme le terme constant de formes modulaires dont on connaît la rationalité des autres coefficients. Ils en déduisent que pour tout k entier positif $\zeta_f(r, 1 - k)$ est rationnel. C'est ce qui a donné l'idée à J.-P. SERRE [17] de définir des formes modulaires p-adiques, et d'obtenir les fonctions zêta p-adiques comme le terme constant de ces formes modulaires. J.-P. SERRE utilise des formes modulaires à une variable, ce qui ne lui permettait pas de résoudre certaines conjectures concernant notamment les dénominateurs ([9], [16]). P. DELIGNE et K. RIBET [7] ont raffiné la méthode en utilisant des formes modulaires à plusieurs variables. Ils démontrent les congruences conjecturées par J. COATES [6] qui permettent, grâce à la méthode d'IWASAWA [9] d'obtenir les fonctions p-adiques. Ils résolvent en outre les conjectures sur les dénominateurs.

(b) Méthode des valeurs explicites. - La deuxième méthode d'étude des valeurs aux entiers négatifs est due, dans le cas quadratique, à D. ZAGIER [20] et l'auteur [4] et, dans le cas d'un corps totalement réel quelconque, à T. SHINTANI [18]. Elle consiste à écrire tout d'abord

$$\zeta_f(r, s) = N(b)^{-s} \sum_x N(x)^{-s},$$

où $b \in r$, la sommation étant étendue à tous les éléments de K qui sont totale-

ment positifs tels que $x - 1 \in b^{-1} \mathfrak{f}$ et qui sont non associés par rapport au groupe des unités de $K_{\mathfrak{f}}$. T. SHINTANI a montré qu'il existait un nombre fini J de simplexes C_j , engendrés par $i(j)$ ($i(j) \leq n$) éléments de K tels que

$$\zeta_{\mathfrak{f}}(r, s) = N(b)^{-s} \sum_{j \in J} \sum_{y \in Y_j} \zeta(C_j, y, s) \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

où Y_j est un ensemble fini de $\mathbb{Q}^{i(j)}$.

Si $v_1, \dots, v_{i(j)}$ désignent les générateurs de C_j , $\zeta(C_j, y, \cdot)$ est définie par

$$\zeta(C_j, y, s) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_{i(j)}=0}^{\infty} N[L(n_1, \dots, n_{i(j)})]^{-s} \text{ pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

où $L(x_1, \dots, x_{i(j)}) = (x_1 + y_1) v_1 + \dots + (x_{i(j)} + y_{i(j)}) v_{i(j)}$.

On étudie ensuite les fonctions

$$s \mapsto \zeta(C_j, y, s),$$

et on montre que ces fonctions se prolongent à tout le plan complexe en des fonctions méromorphes dont on sait calculer les valeurs aux entiers négatifs. En effet, on peut montrer que

$$(1) \frac{\Gamma(s)^i}{\Gamma(is)} \zeta(C_j, y, s) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} u_1^{s-1} u_{n-1}^{s-1} K(u_1, \dots, u_{n-1}, is) du_1 \dots du_{n-1},$$

où

$$K(u_1, \dots, u_{n-1}, s) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_{i(j)}=0}^{\infty} \frac{1}{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(n_1, \dots, n_{i(j)}) u_{\ell} + L^{(n)}(n_1, \dots, n_{i(j)})]^s},$$

où $L^{(1)} \dots L^{(n)}$ désignent les conjugués dans K .

La fonction $s \mapsto K(u_1, \dots, u_{n-1}, s)$ a déjà été étudiée [3], et on sait qu'elle se prolonge à tout le plan complexe en une fonction méromorphe qui prend sur les entiers négatifs des valeurs qui appartiennent à $\mathbb{Q}(u_1, \dots, u_{n-1})$ et qui sont données par

$$K(u_1, \dots, u_{n-1}, -k) = J[X \mapsto \frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1, \dots, x_{i(j)}) u_{\ell} + L^{(n)}(x_1, \dots, x_{i(j)})]^{k+i(j)}}{M_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \dots M_{i(j)}(u_1, \dots, u_{n-1})^{(k+i(j))!}} k!],$$

où $X = (x_1, \dots, x_{i(j)})$, où $M_1(u_1, \dots, u_{n-1}) = \alpha_1^1 u_1 + \alpha_1^2 u_2 + \dots + \alpha_1^{n-1} u_{n-1} + \alpha_1^n$, et si F est une fonction définie sur $\mathbb{Z}^{i(j)}$,

$$J(F) = \lim_{r_1 \dots r_{i(j)} \rightarrow \infty} \frac{1}{p^{r_1} \dots p^{r_{i(j)}}} \sum_{n_1=0}^{p^{r_1}-1} \sum_{n_{i(j)}=0}^{p^{r_{i(j)}}-1} F(n_1, \dots, n_{i(j)}).$$

On transforme l'intégrale de la formule (1) en une intégrale complexe pour obtenir le prolongement de $s \mapsto \zeta(C_j, y, s)$ à tout le plan complexe, et les valeurs aux entiers négatifs se calculent en utilisant le théorème des résidus. On obtient

$$\zeta(C_j, y, -k) =$$

$$\text{Tr } J[X \mapsto \frac{k!}{(nk+n)!} \frac{d^k}{du_1^k} \dots \frac{d^k}{du_{n-1}^k} \left(\frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1 \dots x_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(x_1 \dots x_{i(j)})]}{M_1(u_1 \dots u_{n-1}) \dots M_{i(j)}(u_1 \dots u_{n-1})} \right)_{u_1=0 \dots u_{n-1}=0}]^{nk+n}$$

Ceci permet d'obtenir les valeurs $\zeta(C_j, y, -k)$ comme somme de produits de nombres de Bernoulli. De même que KUBOTA et LEOPOLDT [12] ont défini la fonction zêta p -adique après avoir remarqué que

$$\zeta(-k) = \frac{-b_k}{k} = J(x \mapsto \frac{x^k}{k}),$$

et en étudiant

$$k \mapsto J(x \mapsto \frac{x^k}{k}),$$

on peut étudier de la même façon la possibilité de prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbb{Z}_p$ la fonction

$$k \mapsto \text{Tr } J[X \mapsto \frac{k!}{(nk+n)!} \frac{d^k}{du_1^k} \dots \frac{d^k}{du_{n-1}^k} \left(\frac{[\sum_{\ell=0}^{n-1} L^{(\ell)}(x_1, \dots, x_{i(j)}) u_\ell + L^{(n)}(x_1, \dots, x_{i(j)})]}{M_1(u_1, \dots, u_{n-1}) \dots M_{i(j)}(u_1, \dots, u_{n-1})} \right)_{u_1=0 \dots u_{n-1}=0}]^{nk+n}$$

On utilise la propriété suivante.

Soit G une fonction définie par une série $\sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_i=1}^{\infty} f(n_1, \dots, n_i)^{-s}$ convergente dans un demi-plan, et prolongeable à tout le plan complexe en une fonction méromorphe, ayant un nombre fini de pôles, qui prend, sur les entiers négatifs, des valeurs qui appartiennent à un corps de nombres.

On suppose qu'il existe, pour tout k entier positif, une fonction F_k uniformément dérivable sur $\mathbb{Z}_p$ telle que

$$(i) \quad \frac{\partial^i}{\partial x_1 \dots \partial x_i} F_k = f^k,$$

$$(ii) \quad J(x \mapsto F_k(x)) = G(-k),$$

(iii) $i \mapsto F_i(x)$ est prolongeable pour tout x en une fonction méromorphe admettant les mêmes pôles que G , dont la convergence des coefficients d'interpolation est uniforme en x .

Alors il existe une fonction G_p définie sur $\mathbb{Z}_p$ par

$$G_p(s) = J(x \mapsto F_s(x)).$$

Cette fonction est méromorphe, et elle admet les mêmes pôles que G , avec les mêmes résidus.

Ici on a la propriété (ii); la propriété (i) est aisée à vérifier; la propriété (iii) a été démontrée dans le cas quadratique [5], et l'auteur achève de la démontrer dans le cas général.

II. Applications de la méthode de KUBOTA et LEOPOLDT.

On va utiliser ici la définition de la fonction zêta p -adique de Kubota et Leopoldt pour retrouver de façon simple des résultats connus : les congruences de Coates, la formule de Leopoldt et la formule limite de Kroneker.

Rappelons que si

$$\zeta_f(a, s) = \sum_{k=0}^{\infty} (a + kf)^{-s} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 1,$$

alors

$$\zeta_f(a, 1 - n) = - \frac{B_n(a)}{n} = - J(x \mapsto \frac{(fx + a)^n}{n}),$$

où

$$J[x \mapsto (fx + a)^n] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{k=0}^{p^r-1} (fk + a)^n.$$

On définit θ par $\theta(x) = \lim_{r \rightarrow \infty} x^{p^r}$ pour tout x de $\mathbb{Z}_p$. On pose

$$\langle x \rangle = \frac{x}{\theta(x)} \quad \text{si } |x| = 1.$$

Si ζ_p désigne la fonction zêta p -adique, on a

$$\zeta_{p,f}(a, 1 - s) = - \frac{1}{fs} J[x \mapsto \langle fx + a \rangle^s \theta^0(xf + a)].$$

1. Congruences de Coates.

On va montrer comment on peut retrouver toutes les congruences de Coates [6] dans le cas $K = \mathbb{Q}$. La méthode doit se généraliser dans le cas d'un corps de nombres quelconque.

Posons, pour tout n ,

$$\delta_n(b, c, f) = c^n \zeta_f(b, 1 - n) - \zeta_f(bc, 1 - n).$$

D'autre part, si $\zeta_{p,f}(b, \cdot)$ désigne la fonction zêta p -adique, on écrit

$$\zeta_{p,f}(b, s) = \frac{1}{f(s-1)} + \rho_p(f, b) + c_1(s-1) + \dots$$

Posons

$$\delta_0(b, c, f) = \rho_p(f, b) - \rho_p(f, bc) - \frac{1}{f} \log \langle c \rangle.$$

Les congruences de Coates peuvent s'énoncer ainsi. Soit p un premier qui divise f , alors pour tous entiers b et c avec $(b, f) = (c, f) = 1$ et tout entier $n \geq 0$, on a

$$(1) \quad \delta_1(b, c, f) \in \mathbb{Z}_p,$$

$$(2) \quad \delta_n(b, c, f) \equiv (bc)^{n-1} \delta_1(b, c, f) \pmod{\omega_{n-1}(\mathbb{Q}(\sqrt[n]{f})) \mathbb{Z}_p}.$$

On va démontrer ces congruences.

Si $0 < b < f$ et $(b, f) = 1$, on a

$$\frac{\zeta_{p,f}(b, 1-s)}{\langle b \rangle^s} = \frac{1}{sf} J(x \mapsto \frac{\langle xf+b \rangle^s}{\langle b \rangle^s}) = \frac{1}{sf} J[x \mapsto (\frac{xf+b}{b})^s]$$

puisque p divise f .

Donc, pour tout n entier positif,

$$\frac{\zeta_{p,f}(b, 1-n)}{\langle b \rangle^n} = \frac{1}{sf} J(x \mapsto (\frac{xf+b}{b})^n) = \frac{\zeta_f(b, 1-n)}{b^n}.$$

Posons, pour tout s élément de $\mathbb{Z}_p$,

$$\delta_{p,s}(b, c, f) = \langle c \rangle^s \zeta_{p,f}(b, 1-s) - \zeta_{p,f}(bc, 1-s).$$

Alors

$$\frac{\delta_{p,s}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^s} = \frac{\zeta_{p,f}(b, 1-s)}{\langle b \rangle^s} - \frac{\zeta_{p,f}(bc, 1-s)}{\langle bc \rangle^s}.$$

On a, pour tout n entier positif,

$$\frac{\delta_{p,n}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^n} = \frac{\delta_n(b, c, f)}{(bc)^n}$$

et

$$\delta_{p,0}(b, c, f) = \delta_0(b, c, f).$$

Les congruences 1° et 2° sont alors en fait équivalentes aux congruences

$$(1') \quad \frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} \in \mathbb{Z}_p,$$

(2') Pour tout n entier positif ou nul,

$$\frac{\delta_{p,n}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^n} \equiv \frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} \pmod{\omega_{n-1}(\mathbb{Q}(f, \sqrt[n]{f})) \mathbb{Z}_p}.$$

Soit g l'entier $0 \leq g < f$ tel que $bc = g + rf$,

$$\frac{\zeta_{p,f}(bc, 1-s)}{\langle bc \rangle^s} = \frac{1}{sf} J[x \mapsto (\frac{(x-r)f}{bc} + 1)^s]$$

et

$$\frac{\delta_{p,s}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^s} = \frac{1}{sf} J[x \mapsto \{(\frac{(x-r)f}{bc} + 1)^s - (\frac{xf}{b} + 1)^s\}].$$

Démontrons (1')

$$\frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} = \frac{1}{f} J[x \mapsto \{(\frac{(x-r)f}{bc} + 1) - (\frac{xf}{b} + 1)\}] = J[x \mapsto \frac{x}{b}(\frac{1}{c} - 1) - \frac{r}{bc}].$$

Si $p \neq 2$,

$$\frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} \in \mathbb{Z}_p.$$

Si $p = 2$, $(c, 2) = 1$. Donc $c - 1$ est divisible par 2. Donc

$$\frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} \in \mathbb{Z}_{\sim p}.$$

Pour démontrer (2'), on va montrer qu'il existe une fonction K analytique sur $\mathbb{Z}_{\sim p}$ telle que pour tout $s \in \mathbb{Z}_{\sim p}$

$$\frac{\delta_{p,s}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^s} = \frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} + (s - 1) K(s)$$

et

$$K(s) \in \omega_1(Q(f/\sqrt{1})) \mathbb{Z}_{\sim p}.$$

On écrit

$$\left(\frac{xf}{b} + 1\right)^s = 1 + s \frac{xf}{b} + s(s-1)f \sum_{r=2}^{\infty} \binom{s-2}{r-2} \left(\frac{x}{b}\right)^r \frac{f^{r-1}}{r(r-1)},$$

$$\frac{\delta_{p,s}(b, c, f)}{\langle bc \rangle^s} = \frac{\delta_{p,1}(b, c, f)}{\langle bc \rangle} + (s-1) \sum_{j=r}^{\infty} \binom{s-r}{j-r} J[x \rightarrow \left(\frac{x-r}{bc}\right)^j - \left(\frac{x}{b}\right)^j] \frac{f^{j-1}}{j(j-1)}.$$

Posons

$$K(s) = \sum_{r=2}^{\infty} \binom{s-2}{r-2} J[x \rightarrow \left(\frac{x-r}{bc}\right)^j - \left(\frac{x}{b}\right)^j] \frac{f^{j-1}}{j(j-1)}.$$

On a bien $K(s) \in \omega_1(Q(f/\sqrt{1})) \mathbb{Z}_{\sim p}$.

On a donc la propriété.

2. Formule de Léopoldt.

Soit χ un caractère de Dirichlet primitif pair, f son conducteur, Z_f une racine primitive f -ième de 1 et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss associée à χ et Z_f . Rappelons la définition de $L_p(\chi)$ [12].

(a) Si f n'est pas une puissance de p ,

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log(1 - Z_f^a).$$

(b) Si $f = p$,

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f} \frac{1}{p-1} \sum_{a=1}^p \bar{\chi}(a) \log\left\{\frac{(1 - Z_f^a)^{p-1}}{p}\right\}.$$

(c) Si $f = p^e$, $e > 1$, on pose

$$L_p(\chi) = \frac{-\tau(\chi)}{f} \frac{1}{p} \sum_{a=1}^f \bar{\chi}(a) \log\left\{\frac{(1 - Z_f^a)^p}{1 - Z_f^{ap}}\right\}.$$

On a le théorème suivant ([1][13]).

Quels que soient le caractère primitif $\chi \neq \varepsilon$, et le nombre premier p , on a

$$L_p(1, \chi) = \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) L_p(\chi).$$

On va démontrer ce théorème en utilisant le fait que

$$L(s, \chi) = \sum_{a=1}^f \chi(a) \zeta_f(a, s)$$

et donc

$$L_p(s, \chi) = \sum_{a=1}^f \chi(a) \zeta_{p,f}(a, s)$$

$$\zeta_{p,f}(a, 1-s) = \frac{1}{sf} J(x \mapsto \theta^0(xf+a) \langle xf+a \rangle^s)$$

$$\langle xf+a \rangle^s = 1 + s \log \langle xf+a \rangle + \dots$$

Donc

$$(1) \quad L_p(1, \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a) J(x \mapsto \theta^0(xf+a) \log \langle xf+a \rangle) .$$

On sait que

$$\chi(a) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) Z_f^{ab} .$$

Alors, en remplaçant dans (1),

$$L_p(1, \chi) = \frac{\tau(\chi)}{f^2} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \sum_{a=1}^f Z_f^{ab} J(x \mapsto \theta^0(xf+a) \log \langle xf+a \rangle)$$

$$\begin{aligned} \sum_{a=1}^f Z_f^{ab} J(x \mapsto \log \langle xf+a \rangle) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=0}^{p^r-1} \sum_{a=1}^f \theta^0(nf+a) \log \langle xf+a \rangle Z_f^{(nf+a)} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r} \sum_{n=1}^{p^r f} \theta^0(n) \log \langle n \rangle Z_f^{nb} \\ &= f \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r f} \sum_{n=0}^{p^r f-1} \theta^0(n) \log \langle n \rangle Z_f^{nb} . \end{aligned}$$

Poisons

$$J(F)(T) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{p^r a} \sum_{n=0}^{p^r a-1} F(n) T^n .$$

On peut montrer [2] que cette limite existe pour T , élément de $\tilde{C}_p$, tel que $|1-T| < 1$, et ne dépend pas de a , et que la fonction $T \mapsto J(F)(T)$ admet un prolongement fonctionnel pour tout T tel que $|Z_a - T| < 1$. Donc on a

$$(1') \quad L_p(1, \chi) = \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) J(x \mapsto \theta^0(x) \log \langle x \rangle) (Z_f^b) .$$

Mais on sait que si F désigne une fonction uniformément dérivable sur $\tilde{Z}_p$, alors les séries de Taylor $\sum_{n=1}^{\infty} F(n) T^n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} F'(n) T^n$ se prolongent en des fonctions analytiques, notées $I(F)(T)$ et $I(F')(T)$, définies dans un domaine D qui contient $\{T \in \tilde{C}_p ; |1-T| = 1\}$. On a alors, $\forall T \in D$ tel que $|T| = 1$,

$$J(F)(T) = -I(F')(T) - I(F)(T) \log T ,$$

où $\log T$ désigne éventuellement le prolongement fonctionnel du $\log$.

D'autre part, on peut montrer aussi que la série de Laurent formelle en $1-T$,

$$I(F')(T) + I(F)(T) \log T ,$$

est en fait une série de Taylor convergente dans $\{T \in \tilde{C}_p ; |1-T| < 1\}$ et, dans ce domaine, on a

$$J(F)(T) = - [I(F')(T) + I(F)(T) \log T] .$$

Ici on considère

$$F : x \mapsto \theta^0(x) \log(x)$$

$$F' : x \mapsto \theta^0(x)/x$$

$$I(F')(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^0(n) T^n}{n} = \frac{1}{p} \log \frac{(1-T)^p}{1-T^p}$$

Si $f \neq p$, puisque $\log Z_f = 0$, on a

$$J(x \mapsto \theta^0(x) \log(x))(Z_f^b) = -\frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^b)^p}{1-Z_f^{bp}} .$$

Donc

$$L_p(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \frac{1}{p} \log \frac{(1-Z_f^b)^p}{1-Z_f^{bp}} .$$

Si $f = p^e$, c'est la formule cherchée.

Si f n'est pas une puissance de p , on écrit

$$L_p(1, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{f} \left[\sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \log(1-Z_f^b) - \frac{\chi(p)}{p} \sum_{b=1}^f \chi(bp) \log(1-Z_f^{bp}) \right] .$$

Donc

$$L_p(1, \chi) = - \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \frac{\tau(\chi)}{f} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \log(1-Z_f^b) .$$

Si $f = p$, on veut calculer

$$\sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) J(x \mapsto \theta^0(x) \log(x))(Z_f^b) .$$

Or

$$\begin{aligned} & \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) J(x \mapsto \theta^0(x) \log(x))(Z_f^b) \\ &= \lim_{T \rightarrow 1} \left[\sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) I(x \mapsto \frac{\theta^0(x)}{x})(Z_f^b T) + \log T \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) I(x \mapsto \theta^0(x) \log x)(Z_f^b T) \right] . \end{aligned}$$

$T \mapsto \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) I(x \mapsto \frac{\theta^0(x)}{x})(Z_f^b T)$ est la fonction analytique qui prolonge la série de Taylor $\sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta^0(n)}{n} Z_f^{bn} T^n$, convergente pour $|T| < 1$ et au voisinage de $T = 1$, fonction analytique qui peut s'écrire

$$\frac{1}{p-1} \sum_{b=1}^f \bar{\chi}(b) \log \frac{(1-Z_f^b T)^{p-1}}{p} .$$

D'où le résultat.

3. Analogie de la formule complexe $L(1, \chi) = \frac{1}{f} \sum_{b \bmod f} \chi(b) (\Gamma'(\{b/f\})/\Gamma(\{b/f\}))$.

Dans cette formule va intervenir la fonction Γ p -adique. Nous allons tout d'abord rappeler sa définition. Elle a été étudiée par DIAMOND [8] et MORITA [15]. La définition que l'on va donner est proche de celle de DIAMOND.

On part du fait que pour la fonction Γ complexe on a $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$, donc

$$\log \Gamma(s+1) - \log \Gamma(s) = \log s.$$

On va chercher une fonction p -adique qui satisfait cette équation fonctionnelle, donc l'analogue p -adique de $\log \Gamma$.

On utilise le résultat suivant [2].

Soit $\mathcal{W}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ l'espace de Banach des fonctions uniformément dérivables sur $\mathbb{Z}_p$, muni de la norme usuelle sur cet espace. Soit Δ l'opérateur défini sur $\mathcal{W}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ tel que

$$\Delta(g)(x) = g(x+1) - g(x).$$

Alors Δ est un opérateur linéaire continu surjectif sur $\mathcal{W}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p)$ et

$$J(f) = g'(0) \text{ si } \Delta(g)(x) = f(x).$$

On avait

$$L_p(1, \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a) J(x \mapsto \theta^0(xf+a) \log \langle xf+a \rangle).$$

On pose $\log f = \log \langle f_1 \rangle$, où f_1 est le facteur de f non divisible par p . On définit en outre la fonction analytique

$$x \mapsto \log(x + \frac{a}{f}) = \log f + \theta^0(xf+a) \log \langle xf+a \rangle.$$

Or $\sum_{a=1}^f \chi(a) \log f = 0$. Donc

$$L_p(1, \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a) J[x \mapsto \log(x + \frac{a}{f})].$$

Donc

$$L_p(1, \chi) = \frac{1}{f} \sum_{a=1}^f \chi(a) g'(0),$$

où g est définie par $g(x+1) - g(x) = \log(x + \frac{a}{f})$.

Donc $g'(0)$ est l'analogue p -adique de $\Gamma'(a/f)/\Gamma(a/f)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMICE (Y.) et FRESNEL (J.). - Fonctions zêta p -adiques des corps de nombres abéliens réels, Acta Arithm., Warszawa, t. 20, 1972, p. 353-384.
- [2] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Formes linéaires p -adiques et prolongement analytique, Thèse 3e cycle, Université de Bordeaux-I, 1971 (multigraphiée).
- [3] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Analogues p -adiques de quelques fonctions arithmétiques, Publications mathématiques de Bordeaux, Année 1974/75, p. 1-43.
- [4] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Prolongement analytique et valeurs aux entiers négatifs de certaines séries arithmétiques relatives à des formes quadratiques, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, 1975/76, exposé n° 4.
- [5] CASSOU-NOGUÈS (P.). - Fonctions p -adiques attachées à des formes quadratiques, Groupe d'étude d'Analyse ultramétrique, 3e année, 1975/76, n° 16.
- [6] COATES (J.). - Fonctions zêta partielles d'un corps de nombres totalement réel, Séminaire Delange-Pisot-Poitou : Théorie des nombres, 16e année, 1974/75, n° 1, 9 p.
- [7] DELIGNE (P.) and RIBET (K.). - Values of abelian L functions at negative

integers (à paraître).

- [8] DIAMOND (J.). - The p -adic log gamma function and p -adic Euler constants (à paraître).
- [9] FRESNEL (J.). - Valeurs des fonctions zêta aux entiers négatifs, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, Année 1970/71, exposé n° 27.
- [10] IWASAWA (K.). - On p -adic L functions, Annals of Math., t. 89, 1969, p. 198-205.
- [11] KLINGEN (H.). - Über die Werte der Dedekindschen Zeta-Funktion, Math. Annalen, t. 145, 1962, p. 265-272.
- [12] KUBOTA (T.) und LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, I: Einführung der p -adischen Dirichletschen L -Funktionen, J. reine und ang. Math., t. 214-215, 1964, p. 328-339.
- [13] LEOPOLDT (H. W.). - Zur Arithmetik in abelschen Zahlkörpern, J. reine und ang. Math., t. 209, 1962, p. 54-71.
- [14] LEOPOLDT (H. W.). - Eine p -adische Theorie der Zetawerte, II (à paraître).
- [15] MORITA (Y.). - A p -adic analogue of the Γ function, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, Section I-A, t. 22, 1975, p. 255-266.
- [16] SERRE (J.-P.). - Cohomologie des groupes discrets, "Prospects in mathematics", p. 77-169. - Princeton, Princeton University Press, 1971 (Annals of Mathematics Studies, 70).
- [17] SERRE (J.-P.). - Formes modulaires et fonctions zeta p -adiques, "Modular functions of one variable, III", p. 191-268; - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1973 (Lecture Notes in Mathematics, 350).
- [18] SHINTANI (T.). - On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integral place, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo (preprint).
- [19] SIEGEL (C. L.). - Über die Fouriersche Koeffizienten von Modulformen, Gött. Nachr., t. 3, 1970, p. 15-56.
- [20] ZAGIER (D.). - A Kronecker limit formula for real quadratic fields, Math. Annalen, t. 213, 1975, p. 153-184.

(Texte reçu le 20 juillet 1976)

Pierrette CASSOU-NOGUES
 Mathématiques et Informatique
 Université de Bordeaux-I
 351 cours de la Libération
 33405 TALENCE
